الألف كتاب

الرياضيات للمليون

الجزء الأول

تأليف
لانسلوت هوجبن

ترجمة

الدكتور
حسن محمد حسين

الأستاذ
عبد الحميد لطفي

الدكتور
عطية عبد السلام عاشور

الدكتور
راجي حليم مقار

الدكتور
محمد طلبه السيد عويضة

راجعه

الدكتور
محمد مرسي أحمد

الدكتور
عبد المنعم ناصر الشافعي

نشرته
مكتبة الشرق بالفجالة
تليفون ٥٧٩٦٩
١٩٥٧

الألف كتاب (١٠٢)

الرياضة للمليون

الجزء الأول

باشراف ادارة الثقافة العامة
بوزارة التربية والتعليم

الألف كتاب (١٠٣)

الرياضة للمليون

الجزء الأول

تأليف

لانسلوت هوجبن

ترجمة

الدكتور
حسن محمد حسين

الأستاذ
عبد الحميد لطفي

الدكتور
عطية عبد السلام عاشور

الدكتور
راجي حليم مقار

الدكتور
محمد طلب السيد عويضة

راجعه

الدكتور
محمد مرسي أحمد

الدكتور
عبد المنعم ناصر الشافعي

نشرته
مكتبة الشرق بالفجالة
تليفون ٥٧٩٦٩
١٩٥٧

اعتذار

قمت بتأليف هذا الكتاب وأنا مريض بالمستشفى بقصد الترويح عن نفسى ، ولكن بعض الأصدقاء من بين الكثيرين الذين أخافتهم الرياضة فى المدارس أقنعونى بنشره فوافقت على ذلك بشرط أن يعفونى من تصحيح تجارب الطبع ، ذلك العمل الذى يتعارض وواجبات عملى .

ومع أنى لا أدعى أننى من الاخصائيين فى هذا الموضوع .فانى أرغب فى توضيح أمرين : الأول أننى كتبت هذا الكتاب بصفتى أحد المواطنين المهتمين بشئون التعليم ، والثانى أنه مهما تكن الاعتذارات التى توجه إلى طريقة العرض أو إلى الآراء التى جاءت بهذا الكتاب ، فانه يكون قد أدى الغرض المقصود منه إذا أثار اهتمام هؤلاء الذين فقدوا الأمل فى تعلم الرياضة من طريقتها المألوف . وعلى القراء الذين يعيشون على نصف الكرة الجنوبى أن يتذكروا أن الخرائط التوضيحية الواردة فى هذا الكتاب إنما عملت من وجهة نظر المشاهد الذى يعيش شمال خط الاستواء . أما النكات فيجب ألا تؤخذ بكل جدية فقد وضعت لتسهيل عملية الهضم . فهى كالبهار ليست ذات قيمة غذائية كبيرة .

ويمكن للقارىء الذى يود المزيد من المعرفة عن مكانة الرياضة فى تاريخ الثقافة البشرية أن يرجع إلى أعمال روس بول وكانتو وهيث وسلبال وذانس وكجورى ومجلدى سميث الهامين ومؤلف نويجبور الحديث عن الرياضة القديمة . كما يمكن الرجوع إلى الكتب الآتية التى تبين علاقة الرياضة بتقدم المعرفة العلمية ومنها :

العلوم الشرقية قبل الاغريق	لمؤلفه	آبل راى
آلة العالم	لمؤلفه	كارل سندر
التماثيل البريطانية	لمؤلفه	سير نورمان لوكر
الاكتشافات الجغرافية فى عصر الحروب الصليبية	لمؤلفه	رايت

كما تجب الإشارة إلى مؤلفين هامين ظهرا بعد نشر هذا الكتاب ، وهما :

العلم منذ القدم	لمؤلفه	الأستاذ فارنجتون
البحث عن الحقيقة	لمؤلفه	بل

ويمكن للقارىء الذى يود التمرن على استخدام الطرق الرياضية أن يرجع إلى مؤلف مان المسمى « الرياضة العملية » .

ولو كان الغرض من هذا الكتاب هو إظهار نصيب المؤلف فى البحوث الواردة فيه ، لكان الواجب إظهار المواضع التى لا يتفق فيها مع غيره فى الرأى ولفقد الكتاب جاذبيته ، ولأصبح غير صالح للغرض الوحيد من نشره . وقد أدخلت كثيراً من التعديلات على الطبعة الأولى ، نتيجة لما وصلنى من القراء ، وقد قام بمراجعة هذه التعديلات الدكتور ميلر مدرس الرياضة التطبيقية بجامعة ليفربول ، كما أضفت أحد الملاحق بناء على اقتراح الأستاذ نيفل .

تعليق على الطبعة التاسعة

منذ ظهور الطبعة الأولى المعدلة تسلمت ثلاث خطابات هامة تحوى ملاحظات على هذا الكتاب . الأول من الدكتور روبرتسون من مدينة الكاب ، وفيه يذكر أنه يمكن الحصول على معلومات هامة عن الأساس الاجتماعى للعلوم الرياضية من بحث لروثر عنوانه « أصل الفن الثقافى الخ » ومنشور فى مجلة التاريخ الاقتصادى والاجتماعى رقم ٤٤ ، ٤٥ سنة ١٩٣٧ . والثانى من الدكتور دندس هويت ، وفيه يقول إن المربع فى ص ١٩٩ والذى يحوى كلمة Sator كان جناسا لفظيا بارعا فى القرون الوسطى يمكن أن يستدل منه على عدد الحاضرين فى العشاء الأخير للسيد المسيح وبداية ونهاية رؤيا يوحنا والصليب المقدس للحروف التى تتكون منها كلمة tenet (العقيدة) تقرأ من جهتيها وأية من الأنجيل الرابع (يوحنا ، الجزء الخامس ، ٧) ومنافع كثيرة لكل مجد .

أما الخطاب الثالث فهو من المهندس مستر روجر جيب وفيه يوضح أن المهندسين العمليين لا يستخدمون كلمة ميل بالمعنى المعروف فى الرياضة . فميل خط السكة الحديد هو النسبة بين الارتفاع وطول الخط المنحدر نفسه الذى يمكن قياسه مباشرة ، فهى بذلك النسبة بين العمود والوتر فى المثلث القائم الزاوية فى (شكل ٣١) . فاذا كانت θ هى ميل الطريق على الأفقى . فان الميل كما يستخدمه المهندسون هو حا θ وليس طا θ ولكن هاتين القيمتين متساويتان تقريبا إذا كانت θ صغيرة .

الباب الأول

الرياضة مرآة الحضارة

تحكى عن « ديدرو » القصة الآتية : كان ديدرو عالماً دهريا وشخصية بارزة فى النهضة الفكرية التى سبقت الثورة الفرنسية مباشرة . وأقام فى البلاط الروسى حيث كان يسلى النبلاء بفصاحته ولباقته . وشعرت القيصرة فى ذلك الوقت بأن عقيدة حاشيتها بدأت تتزعزع ، فكلفت « أويلر » أشهر رياضى ذلك العصر بمناظرة ديدرو علنا ، فأخبر ديدرو أن عالماً رياضياً قد أقام الدليل على وجود الله ، ثم استدعى ديدرو إلى البلاط دون أن يعلن باسم مناظره ، وأمام مجلس البلاط المجتمع واجهه أويلر بالعبارة التالية ، وقد ألقاها عليه بصيغة مناسبة من الوقار : « $\frac{ا + ب^{ن}}{ن} = س$. وإذن فالله موجود . أجب ! » وقد كان الجبر بالنسبة لديدرو لغة لا يفهمها ، ولكنه لسوء الحظ لم يفطن إلى أن هذه هى الصعوبة . فلو أنه كان قد فطن إلى أن الجبر هو مجرد لغة نصف بها الأشياء من جهة الكم على النقيض من اللغات المعتادة التى نستخدمها لوصف هذه الأشياء من جهة الكيف ، لطالب من أويلر أن يترجم له النصف الأول من جملته إلى اللغة الفرنسية التى كانا يتفاهمان بها . وهذه الجملة إذا ترجمت إلى اللغة العربية لأصبحت : « يمكننا الحصول على عدد س بأن نجمع أولا عددا ا وعددا ب مضروباً فى نفسه عدداً معينا من المرات ، ثم نقسم حاصل الجمع على عدد مرات ضرب ب فى نفسها . وعلى ذلك فالله موجود . فما قولك الآن ؟ » . وإذا طلب ديدرو من أويلر أن يوضح الجزء الأول من عبارته زيادة فى تبسيط فهمها للبلاط الروسى فربما أجاب أويلر بأن س تكون ٣ عندما تكون ا قيمتها ١ ، ب قيمتها ٢ ، ن قيمتها ٣ ؛ أو بأن س تكون ٢١

عندما تكون ا قيمتها ٣ ، ب قيمتها ٣ ، ه قيمتها ٤ ، وهكذا . أما إذا طلب أعضاء البلاط من أويلر أن يفسر لهم كيف أن الجزء الثانى من جملته ينتج من جزئها الأول فهنا كان يجد صعوبة شديدة . ولكن ديديرو أصابته رهبة الموقف كما يحدث لكثير منا عندما يواجه بجملة فى لغة الكم ، وأسرع بمغادرة البلاط فجأة وسط تهكم الحاضرين ، ولازم الغرف المخصصة له وبادر بالعودة إلى فرنسا بعد أن التمس تأمين طريقه .

– وفى الواقع قد انتصر ديديرو ، وهو لا يدرى، أمام محكمة التاريخ . وقد انهزمت الاكليرية التى حاربها ديديرو ، كما أن القوى التى فوق الطبيعة التى كان يدافع عنها أويلر أخذت فى التقهقر من ذلك الوقت ، رغم أنها لم تحرم فى أى وقت من خدمات رياضى ممتاز . ويحدثنا أحد علماء الفلك المعاصرين المشهورين فى محاضرات جيفورد بأن « ديراك » قد اكتشف العددين ف ، ه وإذن فالله موجود . وعالم فلكى آخر شهير يسلينا بحسابات مدهشة عن المسافات بين النجوم ، وفى خلال ذلك يمنح مهندس الكون الأعظم درجة فخرية فى الرياضة . وقد كان لهذه الأمور سوابق قبل عهد أويلر وديديرو بزمن طويل / لأن الرياضيين الأوائل كانوا هم صناع التقاويم من الكهنة الذين كانوا يحسبون مواقيت الفصول . وكانت المعابد المصرية مجهزة بمقاييس نيلية استخدمها الكهنة فى تسجيل ارتفاع النهر المقدس وانخفاضه بعناية فائقة، وتمكنوا بواسطتها من التنبؤ بفيضان النيل بدرجة كبيرة من الدقة . ويتبين من قراطيسهم (أوراق البردى) أنه كانت لديهم لغة للقياس تختلف كثيراً عن الأساليب الادعائية التى كانوا يصوغون فيها تنبؤاتهم للعامة . ولم يكن فى مقدور هؤلاء العامة أن يعرفوا العلاقة بين النبوءة والحقيقة ، لأن المقاييس النيلية كانت تتصل بالنهر عن طريق قنوات تحت الأرض مخفاة بمهارة عن أعين الناس. أى أن كهنة مصر كانوا يستخدمون لغة للكتابة فى نشرات جمعية علمية ، ولغة أخرى غيرها لأحاديثهم الصحفية الرخيصة .

وقد كانت الكتابة والقراءة فى الأزمنة القديمة لغزاً كما كانت حرفة . فالرجل العادى لم يكن فى استطاعته فك رموز بردية « رايند » التى دون فيها الكاتب أحمس قوانين قياس الأشياء . أما الجماعات المتحضرة فى القرن العشرين فقد جعلت قراءة لغة الكيف وكتابتها فى متناول الجماهير. وأصبح من الممكن للرجل العادى أن يفهم المخترعات العلمية إذا لم تتضمن مقاييس معقدة . فهو يعرف شيئاً عن نظرية التطور ،

وانهارت بذلك تعاليم الكهنوت عن الخليقة والتجأت السرية إلى الذرة ، حيث وجدت مكاناً أميناً لا بسبب صغر حجم الذرة بل لاضطرارك لعمل مقاييس معقدة واستخدام « قنوات تحت الأرض » لتتبين سبيلك بها . وهذه القنوات التى تحت الأرض مخفاة عن أعين الناس لأن الرجل العادى لم يتعلم كيف يقرأ لغة الكم ويكتبها . وعند ما كان القساوسة يؤدون الصلاة باللاتينية منذ ثلاثة قرون أسس المصلحون البروتستنت مدارس لتعليم الناس كيف يقرأون الانجيل .. والآن قد حان الوقت لإصلاح آخر لتعليم الناس كيف يقرأون لغة القياس ويكتبونها حتى يمكنهم فهم إنجيل العلوم الحديثة .

– فى عهد ديدرو ربما كانت حياة الأفراد وسعادتهم تتوقف على تمسكهم بالمعتقدات الدينية الصحيحة . اما اليوم فان حياة الناس وسعادتهم تتوقف أكثر مما يعتقد معظمنا على التفسير الصحيح للاحصائيات العامة التى تقوم بجمعها المصالح الحكومية . فعندما تعلن لجنة من الخبراء أن الرجل المتوسط يمكنه إذا كان عاطلا أن يعيش على الإعانة التى تمنحه إياها الحكومة لتعطله ، أو أن الطفل المتوسط يحصل على قدر كاف من اللبن ، فان مجرد ذكر متوسط معين أو إعطاء قائمة من الأعداد يكفى لإيقاف نقد أى عاقل . ولكن الحقيقة أنه عندما يحصل الرجل المتوسط أو الطفل المتوسط على كفايته ، فإن نصف المجموعة أو أكثر من نصفها قد لا يحصل على ما يكفيه . وأغلبية الناس الآن فى الدول المتحضرة غير قادرين على قراءة لغة الكم أو كتابتها بسهولة . كما كانت أغلبية الناس فى عصر ويكليف ولوثر تجهل اللاتينية لغة الجدل الدينى فى ذلك الوقت . فعلى ديدرو الحديث الآن أن يتعلم لغة الكم للدفاع عن نفسه ، إذ أن المجتمع لا يسلم إذا هو ترك مقاليد أموره فى أيدى المهرة منه .

– فقد تعلم الناس الكلام أحقابا طويلة قبل أن يبدأ مهرتهم قراءة وكتابة اللغات العادية التى تستعمل فى وصف الأنواع المختلفة للأشياء . والرجل العادى فى هذه الأيام ، مثل قارئ هذا الكتاب أو كاتبه ، يتمتع بمزايا لم يكن يتمتع بها جمهور المستمعين للآراء الكهنوتية فى العصور القديمة . فقد تعلمنا جميعا التكلم بلغة الكم حتى إذا لم نتقن قراءتها وكتابتها . فاذا سئلنا عما يميز رجال هذا العصر ، عصر الآلة ، عن الرجال الذين عاشوا قبل الثورة الأمريكية أو الفرنسية لتعددت الإجابات . وقليل جداً من كان يعطى الإجابة التى أعطاها بيرك . فبعد حوالى أربعين سنة من

وقصة ديدير كتب بيرك كتابات قوية الدفق شهير بالثورة الاجتماعية التى أشعلها الموسوعيون . ولا تختلف كتابات بيرك عن الأوصاف المألوفة للحوادث الجارية فى الروسيا الآن كما تنعكس مشوهة عن مرآة الصحافة اليومية إلا فى أن كتاباته كانت بالنثر الرشيق الرنان الأخاذ. فقد ضمن آراءه هذه فى مقطوعة هى أشد مقطوعاته صدى ولكنها أكثرها رعونة ، وتعتبر مرثية للنظام العتيق . فلم يكن مما يزيد فى حرارة غضبه إلى درجة البياض أن أوربا ستصبح قارة لأصحاب المحال التجارية ، بل أن أوربا ستصبح قارة للحاسبين . «مضى عهد الفروسية ، وحل مكانه عهد السفسطائيين والاقتصاديين والحاسبين . وانطفأ مجد أوربا إلى الأبد ... »

- وقد كان أول رجال سكنوا المدن حيوانات ناطقة . أما الرجل فى عصر الآلة فهو حيوان حاسب . فنحن نعيش فى جو من الأرقام : وصفات أصناف الطعام ، جداول مواعيد القطارات ، عدد العاطلين ، الغرامات ، الضرائب ، ديون الحرب ، أنظمة العمل الإضافى ، حدود السرعة ، متوسط عدد رميات الكرة ، مكاسب الرهان ، نتائج البلياردو ، عدد السعرات ، أوزان الأطفال ، درجة حرارة المرضى ، غزارة المطر ، ساعات شروق الشمس ، الأرقام القياسية للسيارات ، الأرقام القياسية للقوة ، قراءات عداد الغاز ، معدلات المصارف ، معدلات الشحن ، معدلات الوفيات ، الحطيطة ، الفائدة ، اليانصيب ، أطوال الموجة ، وضغط إطار السيارة . ففى كل ليلة ، عندما يملأ الرجل الحديث ساعته قبل نومه ، يقوم بضبط آلة علمية لها من الدقة والرقة ما لم يكن يطوف بخيال أمهر صناع الإسكندرية فى أوجها . كل هذه معلومات عامة . ولكن الذى يفوتنا هو أننا أثناء قيامنا بهذه الأشياء تعلمنا استخدام أساليب كانت من الصعوبة بمكان على أمهر الرياضيين القدامى . فالنسب والنهايات والعجلات ليست تجريدات بعيدة التصور لا يكاد يدركها إلا العباقرة الفلائل ، بل إنها مرسومة فى كل صفحة من صفحات كياننا . وفى خلال المغامرة التى نحن على وشك مباشرتها سنجد دواما أننا لا نصادف صعوبة فى الإجابة عن أسئلة دوخت عقول أمهر الرياضيين فى العصور القديمة . وليس ذلك لأنك أنت وأنا ماهران جدا ، ولكن لأننا نرث ثقافة اجتماعية تأثرت باصطدامها بقوى مادية غريبة على الحياة العقلية فى العالم القديم . فإن أمهر العقول أسير فى سجن تراثه الاجتماعى .

- وإليك مثال لتوضيح هذا من البداية . لقد شغل «زينو» الفيلسوف الأيلى أذهان جميع معاصريه بالحدس فى سلسلة من الأحاجى قدمها لهم ، وأكثر هذه الأحاجى ذكرا

متناقضة «أخيل والسلحفاة» . وفيما يلي المشكلة التي تجادل فيها مخترعو الهندسة المدرسية حتى بحت أصواتهم وكلت أيديهم : أخيل في سباق مع السلحفاة ، ولكنه يجري بسرعة تساوي عشرة أمثال سرعة السلحفاة . فإذا بدأت السلحفاة من نقطة تسبق نقطة بدء أخيل بمسافة ١٠٠ ياردة فإن زينو يقول إن أخيل يجري ١٠٠ ياردة فيصل إلى نقطة بدء السلحفاة وفي هذه الأثناء تقطع السلحفاة عشر المسافة التي قطعها أخيل فتسبقه بمسافة ١٠ ياردات . فيجري أخيل هذه الياردات العشر وفي أثناء ذلك تجري السلحفاة عشرها أي تسبق أخيل بياردة واحدة . فيجري أخيل هذه الياردة وفي نفس الوقت تقطع السلحفاة عشر ياردة أي تسبق أخيل بعشر ياردة . فيجري أخيل هذا العشر ياردة وفي أثناء ذلك تقطع السلحفاة عشر عشر الياردة فتسبق أخيل بمسافة جزء من مائة جزء من الياردة . وفي أثناء قطع أخيل هذا الجزء من مائة من الياردة تقطع السلحفاة جزءا من ألف من الياردة وتسبقه به . وهكذا أراد زينو أن يبين أن أخيل يقترب تدريجا من السلحفاة ولكنه لا يصل إليها تماما .

ولا تذهبن بك الظنون إلى أن زينو وجميع العقلاء الذين تناقشوا في هذا الموضوع فاتهم أن يدركوا أن أخيل سبق السلحفاة فعلا . ولكن الذي حيرهم هو أين المغالطة؟ وقد تكون أنت نفسك سألت هذا السؤال . والنقطة الجوهرية هي أنك لم تسأله لنفس السبب الذي دفعهم إلى سؤاله . فإن الذي يقلقك هو السبب في أنهم كانوا يفكرون في ألغاز تافهة مضحكة كهذه . والواقع أن ما يشغلنا هنا هو مشكل تاريخي . وسأبين لك في دقيقة أن المشكل لا يثير أي صعوبة رياضية لك . ففي إمكانك ترجمته إلى لغة الكم لأنك ترث ثقافة اجتماعية يفصلها عن ثقافتهم انهيار اثنتين من الحضارات الكبيرة وقيام ثورتين اجتماعيتين كبيرتين . فصعوبة الأقدمين لم تكن صعوبة تاريخية وإنما كانت صعوبة رياضية . لأنهم لم يكونوا قد وصلوا إلى لغة الكم التي يمكن ترجمة هذه المشكلة إليها بسهولة .

ولم يكن من المألوف لدى الإغريق حدود السرعة أو تعريفة نقل البضائع . فقد كانوا يجدون المسائل المتضمنة القسمة أصعب بكثير جداً من تلك التي تتضمن الضرب . ولم تكن لديهم وسيلة لإجراء عمليات القسمة بأي درجة من الدقة لأنهم اعتمدوا في عملياتهم الحسابية على المساعدات الآلية المستمدة من العداد المبين في شكل ٦ . ولم يكن في إمكانهم إجراء العمليات على الورق . لكل هذه الأسباب ولغيرها مما سنقابله المرة بعد الأخرى لم يستطع الرياضي الإغريقي أن يرى أشياء نراها نحن الآن دون

اهتمام برؤيتنا لها من عدم رؤيتها . نعلم أننا إذا راكمنا اعداداً كبيرة ثم أكبر منها فوق بعضها البعض فإن الكوم يستمر فى النمو بسرعة بدون نهاية ما دمنا نستمر فى الإضافة إليه . وقد خيل للمعاصرين لزينو أنه ما دام فى إمكاننا إضافة كميات أكبر فأكبر بدون نهاية وبلا توقف فإنه ينبغى أن يكون فى إمكاننا أيضا إضافة كميات أصغر فأصغر بلا نهاية دون الوصول إلى حد . فقد ظنوا أن الكوم فى الحالة الأولى يستمر فى النمو إلى الأبد بسرعة متزايدة ، وفى الحالة الثانية يستمر فى النمو إلى الأبد ببطء متزايد . فلم يكن عندهم فى لغة الأعداد ما يوحى إليهم أن الآلة عندما يتعدى بطئها حداً معينا فإنها تتوقف عن العمل .

– ولرؤية ذلك بوضوح سنضع المسافات التى تقطعها السلحفاة فى مراحل السباق المختلفة بعد بدء أخيل فى صورة أعداد . فترى مما سبق أن السلحفاة تقطع فى المرحلة الأولى مسافة ١٠ ياردات ، وفى المرحلة الثانية ياردة واحدة ، وفى المرحلة الثالثة عشر ياردة ، وفى المرحلة الرابعة جزءاً من مائة من الياردة ، وهكذا . ولنفرض أن عندنا لغة أرقام مثل ما كان عند الإغريق أو عند الرومان أو العبريين الذين استعملوا الحروف الأبجدية . واستعملنا اللغة المألوفة لنا التى لا تزال تستعمل فى ساعات الحائط وعلى شواهد المقابر الإفرنجية وفى دور المحاكم فإنه يمكننا كتابة مجموع المسافات التى قطعتها السلحفاة قبل أن يلحق بها أخيل هكذا :

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{C} + \frac{1}{X} + 1 + X$$ وهكذا (١)

وقد وضعنا « وهكذا » لأن الأقدمين كانوا يعانون صعوبات شديدة فى استعمال أعداد تزيد على بضعة آلاف . وبجانب أننا تركنا ذيل المتسلسلة لخيالك (ولا تنس أن ذيل الحيوان يكون جزءه الأكبر إذا كان يمتد إلى الأبد) يلاحظ أن هناك عيباً آخر لهذه الكتابة . إذ ليس فيها مطلقا ما يبين كيفية ارتباط المسافات فى المراحل المختلفة للسباق ببعضها البعض . ولكن أسلوبنا الحالى فى كتابة الأعداد يمكننا من إظهار هذه العلاقة بوضوح عند كتابتها هكذا :

$$١٠ + ١ + \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٠٠} + \frac{١}{١٠٠٠} + \frac{١}{١٠٠٠٠} + \frac{١}{١٠٠٠٠٠} + \frac{١}{١٠٠٠٠٠٠}$$ وهكذا

(١) لم يكن لدى الرومان فعلا الاسلوب المناسب لكتابة الكسور الاعتيادية المستخدم أعلاه للتمثيل فقط .

وفى هذه الحالة نضع ، وهكذا ، لكى نريح أنفسنا من عناء الكتابة لا لأنه ليست عندنا الرموز الدالة على الأعداد . وقد استعيرت هذه الألفاظ العددية من الهندوس الذين تعلموا كتابة لغة الأعداد بعد وفاة زينو وإقليدس . ولقد أمدتنا الثورة الاجتماعية ، ثورة الإصلاح البروتستنتى ، بمدارس جعلت لغة الأعداد ملكا مشاعا لبنى البشر . وفى انقلاب اجتماعى ثان ، وهو الثورة الفرنسية ، تعلمنا استخدام هجاء معدل . وبفضل قوانين التعليم التى سنت فى القرن التاسع عشر أصبح هذا الهجاء المعدل جزءاً من ذخيرة المعرفة العامة التى يأخذ نصيبه منها كل فرد عاقل فى جميع الأقطار المتكلمة بالإنجليزية . فإذا كتبنا المجموع الأخير باستخدام الهجاء المعدل الذى نسميه الطريقة العشرية نكتبه هكذا :

١٠ + ١ + ٠,١ + ٠,٠١ + ٠,٠٠١ + ٠,٠٠٠١ + ٠,٠٠٠٠١ + ٠,٠٠٠٠٠١ وهكذا .

وباستعمال هذا الهجاء المعدل نجد أنه يمكننا وضع هذا بصورة ألطف هكذا :

١١,١١١١١١ الخ

أو بالصورة الأفضل ١١,١̇

ونحن نعرف الكسر ٠,١̇ على أنه كمية أقل من ٢/١٠ وأكثر من ١/١٠ . وإذا لم نكن قد نسينا الحساب الذى تعلمناه بالمدرسة فقد تتذكر أن ٠,١̇ تناظر الكسر ١/٩ . ومعنى هذا أنه كلما أطلنا فى المجموع ٠,١ + ٠,٠١ + ٠,٠٠١ الخ اقتربنا من ١/٩ ولا يمكن أن يزيد أبدا عن ١/٩ . ومجموع الياردات التى تتحركها السلحفاة حتى تتلاشى المسافة بينها وبين أخيل هى بالضبط ١١ ١/٩ ياردة ، ولا تزيد على ذلك .

— والآن يتجلى لك المقصود من أن اللغز ليست فيه صعوبة رياضية بالنسبة لك . لأن عندك لغة للأعداد يسمح تركيبها بأن تأخذ فى الحسبان إمكانا معينا يصفه الرياضيون باسم رنان . إذ يسمونه تقارب متسلسلة لا نهائية إلى قيمة محدودة . أو بصورة أوضح ما معناه أننا إذا داومنا على تراكم كميات أصغر فأصغر اطول مدة ممكنة فأننا قد نحصل على كوم حجمه لا يزيد زيادة محسوسة بالاستمرار فى الإضافة . والصعوبة العظيمة التى كان يعانيها رياضيو العالم القديم عند معالجتهم عمليات قسمة تستمر إلى مدى غير محدود ، أو معالجتهم ما يسميه الرياضيون الحديثون المتسلسلات

اللانهائية ، أو النهايات ، أو الأعداد المتسامية ، أو الكميات المنطقة ، أو غير ذلك ، تعطينا مثالا لحقيقة اجتماعية عظيمة يدعمها تاريخ المعرفة البشرية بأ كمله . وهى أن النشاط الذهنى المثمر لأمهر الناس يستمد قوته من المعلومات العامة التى يساهم فيها كل منا بنصيب . ولا يمكن لمهرة الناس أن يتجاوزوا نقطة خاصة فى حدود الثقافة الاجتماعية التى يرثونها . وعندما يفاخر مهرة الناس بعزلتهم فعندئذ يصح لنا أن نتعجب إن كانوا بالفعل مهرة . وسيتبين لنا من دراستنا للرياضة أنه عندما تفقد ثقافة قوم صلتها بحياة البشر العامة وتصبح مجرد ألعوبة لطبقة من ذوى الفراغ تصبح عندئذ من الفنون الكهنوتية . ومصيرها إلى الانقلاب إلى خزعبلات كمصير الفنون الكهنوتية . وإنها لحماقة ، بل وإثم ، أن نفاخر بالعزلة الذهنية عن الحياة العامة للجنس البشرى وأن نحتقر واجب التربية الاجتماعى العظيم . وهى غاية التقدم فى المعرفة . ويثبت التاريخ أن الخزعبلات ليست من صنع الإنسان العادى، بل إنها من اختراع ذوى الأعصاب المريضة من الأذكياء الذين ليس عندهم ما يشغلهم . فالرياضى والرجل العادى يحتاج كل منهما إلى الآخر . ويحتمل أن يكون العالم الغربى على وشك الخوض فى حالة همجية إلى غير رجعة . فاذا أمكنه الهروب من ذلك المصير فسيجد الرجال والنساء من ذوى الفراغ الذى فى متناولنا الآن أنه لا بد من جعل الرياضة شعبية كخطوة حاسمة فى سبيل تقدم المدنية .

— والخطر من الارتداد إلى حالة همجية خطر حقيقى جداً فى زمان كزماننا هـذا . وربما يمكننا أن نطبق على الرياضة الكلمات التى استعملها « كوبيت » فى شرح فوائد النحو للعمال فى أيامه عندما لم يكن هناك نظام عام للمدارس المجانية . وقـد كتب كوبيت فى خطابه الأول لغلام من العمال عن نحو اللغة الانجليزية ما يلى : « لكن لاكتساب هذا الفرع من المعرفة يابنى العزيز هناك دافع ولو أنه ينبغى الشعور به بقوة فى جميع الأحوال إلا أنه فى الوقت الحالى يجب الشعور به بقوة غير عادية . وأعنى بذلك الرغبة عند كل رجل وخاصة كل شاب فى أن يتمتع بكافة حقوق وطنه وحرياته . وعندما تقرأ تاريخ قوانين انجلترا التى اكتسب بها الشعب حرياته .. ستجد أن الظلم ليس له عدو أشد من القلم . وعندما تهلل لرؤية « وليام برين » الذى نفى وطال سجنه وأثقلت الغرامات كاهله ، عندما تراه وقد أطلقت حريته محمولا على أعناق الشعب من سوثهامبتن إلى لندن فوق طريق مفروش بالأزهار ، وعندما ترى الاتهام والمحاكمة وتنفيذ العقوبة فى أولئك الطغاة الذين قاسى هو ووطنه منهم الكثير ظلما

وعدوانا ، وبينما يرقص قلبك وقلب كل شاب فى المملكة طربا لهذه المناظر ينبغى عليكم جميعا أن تتنبهوا إلى أن برين لم يكن ليستطيع القيام بأى عمل من الأعمال التى خلدت اسمه وأكسبته شرفا إذا لم يكن على علم بالنحو » .

- وليس للظلم الاقتصادى الآن صديق أقوى من المعجزة الحسابية . فبدون معرفة الرياضـــة ، نحو الكم والرتبة . لايمكن تصميم خطة لمجتمع عاقل يتمتع الجميع فيه بالفراغ ولايشكو أحد فيه الفقر . وإذا كنا نميل إلى الخوف قليلا من هذه الفكرة فأول خطوة نخطوها نحو فهم هذا النحو هو أن ندرك أن الأسباب التى تنفر كثيراً من الناس من دراستها ليست كلها شائنة ، فالمدارس تقوم بتعليم الرياضة وتفسيرها دون محاولة بيان تاريخها الاجتماعى ودلالتها فى حياتنا الاجتماعية واعتماد الإنسان المتمدين عليها اعتماداً كبيراً . فلم يخبرنا أحد ، لافى طفولتنا ولافى شبابنا ، كيف استخدمت معرفة هذا النحو مراراً وتكراراً خلال التاريخ فى مساعدة الجنس البشرى على التحرر من الخزعبلات . ولم يبين لنا أحد كيف يمكن استخدامها فى صيانة حريات الشعوب . فلننظر فى أسباب ذلك .

- كان النظام التعليمى فى شمال غرب أوربا فى عصر الاصلاح مصاغا من ثلاثة عوامل مستقلة . أحد هذه العوامل لغوى بالمعنى المألوف . إذ لإضعاف سلطة الكنيسة فى السيادة الاقتصادية العليا كان من الضرورى إزالة تأثيرها على خيال الشعوب . فتوسل المصلحون البروتستنت بسلطة الكتاب المقدس المعتمدة لإثبات أن مايمارسه القساوسة بدعة ، وكان عليهم لذلك أن يجعلوا الكتاب المقدس كتابا مباحا ، أى فى متناول الجميع . وقد كان اختراع الطباعة الأداة الميكانيكية لتهديم السلطة الذهنية للبابا . وأصبح تعليم اللاتينية واليونانيـة ضروريا لكى يكون الإنجيل فى متناول الجميع ، وقد ساعد هذا على تعضيد البدعة التعليمية العظيمة التى دعا اليها «جون نوكس» كما شجع فى انجلترا أسلوبا أقل نفقات بتشييد مدارس النحو . وقد عملت الجبهة الفكرية ضد البابوية والأديرة الغنية على تقوية موقفها الاستراتيجى بعمل ترجمات جديدة للكتب السماوية وفحصها بدقة شديدة . وهذا هو أحد الأسباب التى دعت إلى أن تحتل الدراسات الكلاسيكية مرتبـــة عالية من الشرف فى النظام التعليمى للطبقات المتوسطة .

وتدين لغة الكم بموضعها من التربية الغربية لتأثيرين اجتماعيين مختلفين فبينما

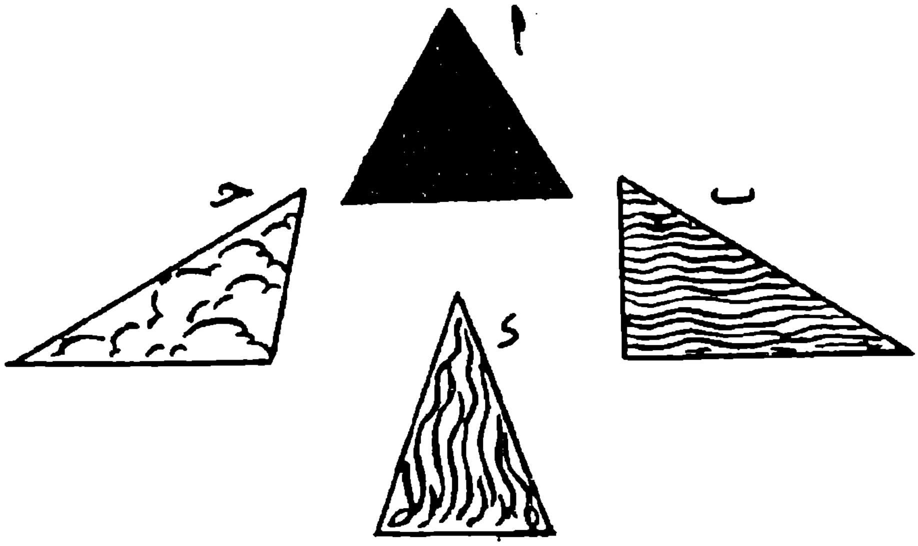
كانت الثورة ضد سلطة الكنيسة تجمع قواتها وقبل أن تبدأ العقيدة الجديدة فى اكتساب تأثير واسع على التجار والصناع فى المدن فى العصور الوسطى ، كانت احتياجات تجار « ألمانيا » قد أدت إلى تشييد مدارس خاصة فى ألمانيا لتعليم الحساب الجديد الذى أخذته أوربا عن العرب . وقد كانت كتب الحساب التجارى تكون نسبة كبيرة من الكتب المطبوعة فى السنوات الثلاث التالية لإنشاء أول مطبعة . وقد قام لوثر بتثبيت التعاليم التجارية الأربعة وهى الجمع والطرح والضرب والقسمة ببراعة سياسية حاذقة عندما نادى بعقيدته الغريبة وهى أن كل ولد يجب أن يتعلم طرق الحساب. فقد كان نحو الأعداد مقيدا بالاستعمالات التجارية فقط قبل أن ينتبه الناس إلى الطرق العديدة المختلفة التى كان قد أوشك أن يغزو بها الحياة الإجتماعية للانسان .

ـ ولم تدخل الهندسة التى كانت قد طلقت فعلا من فن الحساب ، فى التربية الغربية من نفس الطريق ، فبجانب استثارة صناعة الأناجيل لدراسة اللغات، الميتة استمدت الدراسات الكلاسيكية تشجيعا ، من كون النظريات السياسية لفلاسفة اليونان كانت موافقة لأمانى التجار الذين كانوا يتوقون إلى ديمقراطية مدنية محدودة. وقد استمرت ديمقراطية ولايات المدن تداعب خيال أغنياء الطبقة المتوسطة حتى ما بعد الثورة الفرنسية حيث ووريت التراب بالإحتفال اللائق . وكانت طبقة ذوى الفراغ فى ولايات المدن اليونانية تلهو بالهندسة كما يلهو الناس الآن بألغاز الكلمات المتقاطعة أو الشطرنج . وكان من تعاليم أفلاطون أن الهندسة أعلى رياضة يمكن قضاء الفراغ الإنسانى فيها . وهكذا تضمنت التربية الأوربية الهندسة كجزء من الدراسات الكلاسيكية دون أن تتضح العلاقة بينها وبين حقيقة قياس «العالم يحاط به» لدريك . فإن من قاموا بتعليم هندسة إقليدس لم يفهموا فائدتها الاجتماعية ، وقد درس إقليدس أجيال من الطلبة دون أن يعرفوا أنه قد نشأت بعدها هندسة استمدت أصولها من تعليم هندسة إقليدس فى حياة الإسكندرية المزدحمة وجعلت من المستطاع قياس حجم العالم . وقد هدمت هذه الأقيسة الهياكل الوثنية لآلهة النجوم وأضاءت الطريق للعمليات الملاحية العظيمة . وقد كان إظهار مدى سطح الأرض الذى لم يستكشف بعد ، هو الأساس الصلب لما نسميه مذهب كولومبوس .

وقد كان أفلاطون يشيد بالرياضة على أنها طقوس عظيمة غامضة ، وأساس ذلك يرجع إلى الخزعبلات المظلمة التى أزعجت الناس والأوهام الصبيانية التى خلبتهم

فى زمن طفولة الحضارة وقت أن كان حتى أمهر الناس لا يميز بوضوح الفرق بين القول إن ١٣ عدد « أولى » والقول إن ١٣ عدد منحوس . وكان من آثره فى التربية أن ألقى نقابا من الغموض على الرياضة وساعد على المحافظة على الماسونية الحرة للإخوة الفيثاغورية التى كان يعدم أعضاؤها لافشاء أسرار رياضية تجدها الآن مطبوعة فى الكتب المدرسية . وإذا كان هذا النقاب من الغموض ، يجعل المادة غير مستساغة فليس هذا مشيننا لأحد. فقد كان أهم عمل أنجزه أفلاطون اختراع ديانة ترضى الحاجات العاطفية لنفر من الناس ليسوا فى انسجام مع بيئتهم الاجتماعية ويتمتعون بنصيب من الذكاء أو الزاتية يجعلهم أرفع من أن يلوذوا بالعمليات الحيوية البدائية . وقد أدى حب الاستطلاع عند الناس ، الذين بدأوا التأمل فى الذرة، ودرسوا خواص حجر المغناطيس ، ولاحظوا نتائج دلك الكهرباء ، وشرحوا الحيوانات، ووضعوا الفهارس للنباتات فى القرون الثلاثة السابقة لكتابة أرسطو الفصل الختامى فى العلم اليونانى ، أدى حب الاستطلاع هذا إلى تجريد الأشياء الطبيعية المألوفة من شخصياتها وقد حمى أفلاطون الحيوانية من التعرض للتجارب باختراع عالم من «المثل» . هذا العالم من المثل كان هو العالم كما يعرفه الله ، أى العالم « الحقيقى » الذى يعتبر عالمنا ظله . فى هذا العالم «الحقيقى» تكتسب الرموز الكلامية والعددية قوة السحر الذى يفارق أجسام الحيوانات وجذوع الشجر بمجرد تشريحها أو وصفها .

– والتيماوس Timaeus عبارة عن مجموعة مختارات جميلة من المتناقضات العجيبة التى يمكن تطبيق هذه الرموز السحرية عليها . فالأرض الحقيقية تختلف عن الأرض الصلبة التى نبنى عليها بيوتنا فى أنها مثلث متساوى الأضلاع . والماء الحقيقى يختلف عن ذلك الذى نعتبره أحيانا من المشروبات فى أنه مثلث قائم الزاوية . والنار الحقيقية تختلف عن النار التى نؤمن ضدها فى أنها مثلث متساوى الساقين . والهواء الحقيقى يختلف عن الهواء الذى نملأ به إطار السيارة فى أنه مثلث مختلف الأضلاع (شكل ١) وإذا وجدت ذلك صعب التصديق فما عليك إلا أن تقرأ كيف أن أفلاطون حول هندسة الكرة إلى تفسير سحرى لأصل الإنسان . فهو يحدثنا أن الله « قلد الشكل الكروى للعالم فأودع النهجين الإلهيين فى جسم كروى هو ما نسميه الآن الرأس » . ولكى تمنع الرأس «من التقلب فى وهاد الأرض ومرتفعاتها ولتتمكن من الخروج من الأولى وارتقاء الثانية »، فإنها أمدت « بجسم يحملها ويتنقل بها ، ومن ثم كان لهذا الجسم طول ومنح أربعة أعضاء ممتدة ذات مفاصل ... » وتفوق الرأس



شكل (١)

لقد انتزع أفلاطون القياس من الهندسة ووضع السحر محله

كان عالم أفلاطون الحقيقى عالما من الصور لم يكن للمادة فيه وجود ٠

(ا) المثلث المتساوى الاضلاع (أى الذى تتساوى أضلاعه الثلاثة) هو الصورة الاولية للارض ٠

(ب) المثلث القائم الزاوية هو روح الماء ٠ (أقوى أنواع السحر هو ايجاد روح للماء) ٠

(حـ) المثلث المختلف الاضلاع الذى لا يتساوى فيه ضلعان هو روح الهواء

(د) المثلث المتساوى الساقين (أى الذى يتساوى ضلعان فيه فقط) هو النار الاولية ٠

(اذا كنت تجهل الاسماء فلاحظ معانيها ٠ فقد تقابلك ثانية ٠ ولقد أنذرت) ٠

هكذا يدعو المفكرين الذين لا تشغلهم أمور عملية مطلقا إلى الاعتزاز بأنفسهم . فليس من الغريب أن تحتفظ فلسفة أفلاطون فيما وراء الطبيعة بتأثيرها على التربية بعد أن أصبح مشروعه الجرىء عن جماعة منظمة يعتبر عقيدة من غير المناسب دراستها للشباب . وأى نظام تربوى مبنى على تعاليم أفلاطون لا بد أن يعهد بتعليم الرياضة إلى نفر يقدمون الرأس على المعدة ويضلون طريقهم بين مرتفعات الأرض ومنخفضاتها إذا هم اضطروا إلى تعليم مادة أخرى . وهذا بطبيعة الحال ينفر الأصحاء من الناس



شكل (١ أ)

الرياضة فى الحياة اليومية

هذا الشكل مأخوذ من مؤلف أجريكولا الشهير فى القرن السادس عشر عن فن التعدين • وكان عمال المناجم فى ذلك الوقت أشراف العمال ، وقد لفت الكتاب الانظار الى لفيف من المشاكل العلمية الحديثة السابق اهمالها فى حضارات العبيد القديمة حيث كان التعاون منعدما بين التأمل النظرى والخبرة

الذين يعتبرون الرموز مجرد أدوات للخبرة الإجتماعية المنظمة ، ويجتذب أولئك الذين يستخدمون الرموز للهرب من عالمنا هذا ، عالم الظلال ، الذى يتقاتل فيه الناس لإحراز القليل الذى يمكنهم إحرازه من الحقيقة إلى عالم «حقيق» تظهر فيه الحقيقة واضحة للعيان .

— ومن المحتمل أن تكون طبيعة الرياضيين هى التى تجعلهم يميلون إلى الاحتفاظ بالأسرار العليا لأخوتهم الفيثاغورية . ولو أن الكمال فى عالمهم « الحقيقى » يظهر للشخص العادى كأنه وهمى . لأن العالم الذى يعيش فيه الشخص العادى عالم كفاح وفشل ، عالم محاولة وخطأ . أما فى عالم الرياضة فكل شىء واضح بمجرد أن يألفه الإنسان . ولكن قلما يشرح لنا أن الجنس البشرى ربما استغرق ألف سنة فى الوصول إلى أن إحدى الخطوات فى مناقشة رياضية « واضحة » . فطريقة عمل مقياس النيل واضحة لك إذا كنت قسيسا فى المعبد . أما إذا كنت خارج المعبد فلا تتضح لك إلا بتتبع القناة التى تحت الأرض التى تصل المعبد بنهر خبرة الإنسان الاجتماعية . وكذلك الطرق التربوية التى امتزجت بالكهنوت والسحر تمكنت من إخفاء الإرتفاع والهبوط فى النهر وحركته الدائمة عن فحصنا الدقيق . وهكذا أخموا عنا الابتداع الذى قد يكون أكبر نجاح عقلى فى صراع الإنسان مع العناصر . ولم يكن أفلاطون ، الذى نشأ أساتذتنا فى مدرسته ، يوافق على عمل المشاهدات وتطبيق الرياضة فى ترتيبها والإستنتاج منها . وقد أورد على لسان أستاذه سقراط فى إحدى محاوراته كلمات يمكن أن تستخدم فى كثير من كتب الميكانيكا التى مازالت تستعمل للآن . « والسماوات التى نراها مرصعة بالنجوم مصنوعة فوق أرضية مرئية وعلى ذلك فهى وإن كانت

العلمية فبقياس المسافة ع ر وهى طول الحبل المشدود يمكنك ايجاد المسافة اللازم حفرها أفقيا للوصول الى البئر ، أو عمق البئر اللازم حفره للوصول الى النفق الافقى . ويمكنك أن ترى بسهولة من شكل بمقياس رسم آن نسبة النفق الافقى الى المسافة المقاسة ع ر كنسبة الطولين الممكن قياسهما ه : م . وبالمثل نسبة عمق البئر الى ع ر هى س : م . ويزداد هذا وضوحا بعد معرفة نظرية ٧ / والمستقيم ه معمول بواسطة حبل موضوع أفقيا باستعمال ميزان مائى / وعلى ذلك فهو عمودى على كل من خيطى المطمار / وعندما تقرأ الباب السادس ستجد أن خيط المطمار الاضافى والميزان المائى لا يلزمان ان كانت لديك منقلة لقياس الزاوية العليا وجدول لجيوب الزوايا وجيوب تمامها .

أصفى المرئيات وأكملها إلا أنها بالضرورة تعتبر أحط بكثير من الفكرة الحقيقية عن السرعة المطلقة والذكاء المطلق . . وهـــذه لايمكن إدراكها بالنظر بل بالعقل وبالذكاء . . فالسماوات المرصعة ينبغي إستخدامها أنموذجا بقصد الوصول إلى هذه المعرفة العليا . ولن يتصور الفلكي أبداً أن النسب بين الليل والنهار . . أو بين النجوم بعضها والبعض يمكن أن تكون أيضا أبدية .. ومن السخف أن نهتم اهتماما شديداً بفحص حقيقتها بدقة .. في الفلك كما في الهندسة يجب أن نستخدم المسائل ونترك السماوات وشأنها ، هذا إذا أردنا بحث الموضوع بحثا صحيحا نستفيد فيه من موهبة العقل » .

— وسيقص هذا الكتاب كيف تطور « نحو القياس والعد » تحت ضغط أعمال الإنسان الاجتماعية المتغيرة ، وكيف كانت تعرقله قيود العادات في مراحله المتتالية ، وكيف استخدم في تصوير العالم الذي يمكن حكمه باطاعة القوانين ولا يفلح استعطافه مطلقا بالطقوس والقرابين . وحينما تتضح خطوط هذه القصة فستخف شدة صعوبة هامة تصادف كثيراً من الناس . فالخبير في الرياضة هو في جوهره صانع ، وهمه الأساسي في التعليم أن يوجد صناعا آخرين ، ولذلك تجد كتب الرياضة مكتظة بالتمارين التي يقصد بها تقدم الصناعة . وهذا يثبط همتنا لكبر المسافة التي علينا أن نجتازها قبل أن نحصل على لمحة إلى نوع الرياضة المستخدم في العلم الحديث والإحصائيات الإجتماعية . والواقع أن الرياضة الحديثة لاتستعير كثيراً من القديم ، وحقيقة أن كل تقدم مفيد في الرياضة يعتمد على أساس تاريخي لفرع سابق ، ولكن كل فرع جديد يلغي في الوقت نفسه فوائد أدوات سبقته أعقد منه . فمع أن الجبر وحساب المثلثات والرسم البياني وحساب التفاضل والتكامل تعتمد كلها على قواعد الهندسة الإغريقية إلا أننا لانحتاج إلى أكثر من اثنتي عشرة نظرية من المائتي نظرية في أصول إقليدس لنفهم كيفية استعمالها . وبقية النظريات ماهي إلا أساليب معقدة لعمل أشياء يمكننا عملها بسهولة أكثر بعد معرفتنا فروعا أحدث من الرياضة . وهذه التعقيدات قد تمد الصانع الرياضي بتهذيب مفيد ، ولكنها لاتعدو أن تكون محيرة ومثبطة للشخص الذي يريد أن يعرف مركز الرياضة في الحضارة الحديثة . فإلى الذين أصابتهم الحيرة والتثبيط فعلا فنسوا لذلك ما قد كانوا تعلموه أو فشلوا في تبين معنى أو فائدة مايذكرونه نقدم مايلي . ولذلك فسنبدأ من البداية .

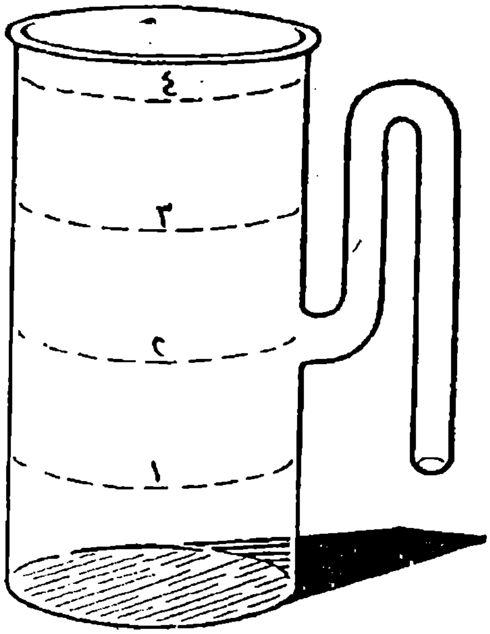
هناك وجهتا نظر عن الرياضة . إحداهما تأتى من أفلاطون ، وهى أن النظريات الرياضية تمثل حقائق أبدية . وقد استخدم الفيلسوف الألمانى (كانت) عقيدة أفلاطون كعصا يضرب بها ملحدى عصره ، الذين كانوا يقومون بكتابات ثورية مثل ديدرو لتحدى الكهنوت . فقد اعتقد (كانت) أن القواعد الهندسية أبدية وأنها مستقلة استقلالا تاما عن حواسنا . فقد تصادف أن قام (كانت) بكتاباته قبيل إكتشاف علماء الحياة تمتعنا بحاسة تتأثر بقوة الجاذبية وهى جزء مما يسمى بالأذن الداخلية / ومنذ هذا الإكتشاف الذى اعترف تماما بدلالته عالم الطبيعة الألمانى إرنست ماخ هبطت الهندسة التى كان يعرفها (كانت) إلى الأرض بفعل أينشتين ، ولم تعد تسكن السماء حيث وضعها أفلاطون / فنحن نعرف أن النظريات الهندسية ما هى إلا حقائق تقريبية عند تطبيقها على العالم الحقيقى / وقد أزعجت نظرية النسبية الرياضيين كثيرا وأصبح مبتدعا الآن أن يقال عن الرياضة إنها مجرد لعبة . وهذا القول لا يحيطنا علما بشىء عن الرياضة . وإنما يحيطنا علما بشىء عن مدى ثقافة بعض الرياضيين . فعندما يقول شخص إن الرياضة لعبة فهو يقرر قولا خاصا به يبين لنا فيه شيئا عن نفسه وهو أسلوبه فى الرياضة ، ولا يخبرنا بشىء عن المعنى العام لتقرير رياضى .

- فلو أن الرياضة كانت لعبة لما كان هناك ما يدعو إلى اضطرار الناس إلى لعبها وهم لا يرغبون / فتكون كلعبة كرة القدم التى ما هى إلا تسلية يمكن أن نحتمل الحياة بدونها. ووجهة النظر التى سنفحصها هى أن الرياضة لغة الكم وأن فهم هذه اللغة جزء جوهرى من الإعداد اللازم لكل مواطن ذكى / وإذا كانت القواعد الرياضية قواعد نحو فإنه ليس من الحماقة أن نخفق فى رؤية الحقائق الرياضية واضحة جلية . فقواعد النحو العادية ليست واضحة بل تحتاج إلى تعليم ، وهى ليست حقائق أبدية بل إنها وسائل لا يمكن بدونها نقل الحقائق عن أنواع الأشياء فى العالم من شخص إلى آخر . وعلى حد قول كوبيت المأثور أنه لو لم تكن سيطرة المستر بيرين على النحو كافية لكى تجعله مفهوما لما أمكنه مواجهة رئيس الأساقفة «لود» . وكذلك الحال فى الرياضة . نحو المقادير . فإن قواعد الرياضة تحتاج إلى التعليم / فإذا كانت هذه القواعد مخيفة فهى مخيفة لأنها غير مألوفة عند أول مقابلة مثل كثير من قواعد النحو المخيفة . وهى أيضا مخيفة لأنه توجد فى جميع اللغات كثير من القواعد والكلمات التى لا بد من حفظها قبل أن نتمكن من قراءة الجرائد أو تفهم الأخبار المذاعة من المحطات الأجنبية . وكل إنسان يعلم أن القدرة على التشدق بعدة لغات أجنبية ليست دليلا على ذكاء إجتماعى كبير .

وكذلك الحال فى التشدق بلغة المقادير . فالذكاء الإجتماعى الحقيقى هو فى استعمال اللغة ووضع الكلمات فى مواضعها الصحيحة من الحديث . ومعرفة لغة المقادير مهمة جدا لأن وضع مقاليد قوانين المجتمع البشرى ، والإحصائيات الإجتماعية ، والسكان ، وكيان الإنسان الوراثى ، والميزان التجارى ، فى يد الرياضى المنعزل بدون مراجعة نتائجه يناظر تركنا لجنة من علماء اللغة تضع الحقائق عن تشريح الإنسان والحيوان والنبات من بنات أفكارهم .

— وإنك لتسمع الناس كثيراً ما يقولون إنه ليس هناك ما هو مؤكد أكثر من أن اثنين واثنين يساوى أربعة . والواقع أن القول بأن اثنين واثنين يساوى أربعة ليس قولا رياضيا ، وإنما القول الرياضى الذى يشير إليه الناس بوضع صحيحا بالشكل الآتى : ٢ + ٢ = ٤ .

— ويمكن ترجمة ذلك هكذا : « أضف ٢ إلى ٢ لتحصل على ٤ » ، وليست هـــذه بالضرورة تقريرا عن شيء يحدث دائما فى العالم الحقيقى ، فإنك ترى من الإيضاح (شكل ٢) أنك فى العالم الحقيقى لا تحصل دائما على ٤ بإضافة ٢ إلى ٢ . فقولنا ٢ + ٢ = ٤ مجرد توضيح لمعنى الفعل «إجمع» عند استخدامه لترجمة الفعل الرياضى «+» ، وقولنا إن ٢ + ٢ = ٤ تقرير حقيقى ما هو إلا مجرد إصطلاح نحوى عن الفعل « + » والاسمين « ٢ » و « ٤ » . ففى النحو يكون صحيحا قولك إن جمع « فأر » هو « فيران » ، أو إذا شئت « أضف فأرا إلى فأر تحصل على فيران » . ولا يكون صحيحا قولك إن جمع « دار » هو « ديران » قياسا عليها . كذلك قولنا « ٢ + ٢ = ٢ » خطأ بنفس الكيفية تماما ، وبتغيير بسيط فى معنى كلمة « إجمع » المستعملة كترجمة « + » نحصل على تقرير صحيح تماما عن الجهاز فى شكل ٢ . ويؤدى التغيير فى المعانى هكذا إلى الخلط ، والغرض من النحو ضبط حرية الكلمات حتى لا يحدث احتقان فى الحركة الفكرية ، فقولنا إن دور البرلمان البريطانى تقع فى جلاسجو كذب واضح من حيث كونه تقريرا عن العالم الحقيقى . أما من حيث كونه تقريرا فى النحو فهو مثال حقيقى لكيفية تكوين جمع « دار » . فإذا قال نائب بريطانى إن ديران البرلمان تعامل المتعطلين فى جلاسجو بطيش مشين فقـــد ينقل حقيقة هامة عميقة عن العالم الحقيقى لنفر قليل من الأذكياء ، ولكنها عبارة خاطئة كتقرير فى النحو . ولا يفهم كثير من الناس هـذه العبارة بل يشكون فى سلامة عقل قائلها ، وسيفشل هذا النائب فى النهوض بحرية الشعوب بعكس برين الذى كان يفهم النحو



شكل (٢)

فى العالم الحقيقى لاتجد دائما أنك تحصل على أربعة عند جمع اثنين واثنين.
حاول ملء هذا بالماء . فستجد قوانين « الجمع » فيه ،

١ +. ١ = ٢
١ +. ٢ = ٢
١ +. ٣ = ٢
٢ +. ٢ = ٢   وهكذا .

وقد وضعت النقطة هنا لبيان أن نوع الجمع المستخدم هنا ليس هو نوع الجمع (+ بلا نقطة) الذى ينطبق على وعاء لايمكن أن يرشح ، وكبيرا بحيث لايمكن ملؤه .

ولا ينبغى أن نندهش إذا وجدنا أن قواعد الرياضة ليست دائما وصفا كاملا لكيفية قياس بعد نجم عنا ، أو كيفية عد الأفراد فى مجتمع ، كما أن قواعد النحو الانجليزى ليست وصفا كاملا لكيفية استعمال اللغة الانجليزية ، لأن الناس الذين صاغوها كانوا مشغولين بترجمة الإنجيل ومتون أخرى من الأدب القديم ، ولذلك كان اهتمامهم شديدا بإيجاد مكافئات مضبوطة للخواص الغريبة فى اليونانية واللاتينية فكانوا فى ذلك كعلماء الحيوان المتقدمين الذين استعملوا أسماء أطراف الإنسان وأعضائه لوصف الأجزاء الخاصة بالحشرات ، فالنحو الإنجليزى الذى يدرس بالمدارس الإنجليزية يناظر علم الحيوان البدائى ، وهو أيضا فى جوهره وصف لعادات الكلام المنتشر فى الطبقة الإنجليزية المهنية التى من بين أفرادها مؤلفو كتب النحو ، فتجد أهل الريف

فى إنجلترا يستعملون أحياناً كلاماً أدق وأصح من أهل المدن وذلك لأن أهل المدن الأسبقين كانوا من كبار المــلاك الأجانب الذين لم يتمكنوا من معرفة اللغة جيدا ، فثبتت بعض الكلمات فى اللغه على النحو الخاطىء الذى استعمله أهل المدن الناجحون ، كذلك النحو الرياضى يتغير أيضا ، فى تحليل الموجهات الحديث قواعد استخدام « + » ليست نفس القواعد التى تعلمناها فى المدرسة

– فإذا أمكننا اكتشاف المعالم الهامة فى طريق تقدم الإنسان اجتماعيا بفحص اللغة التى يستعملها فى حياته اليومية فإن اكتشافها يكون أسهل إذا نحن درسنا نحو الرياضة. فاللغة التى يصف بها الناس أنواع الأشياء المختلفة فى العالم أكثر بداءة ومحافظة من لغات الكم التى تضاعف عددها للتمكن من اللحاق بالدقة المتزايدة فى تحكم الإنسان فى الطبيعة . فنى العالم المفتوح للفحص العام ، عالم الطبيعة العضوية وغير العضوية ، لم يضطر الإنسان إلى توسيع مجال اللغة لوصف أنواع جديدة من الظواهر فيما بين سنة ٢٠٠٠ قبل الميلاد وبين الزمن الذى ظهرت فيه الأبحاث التى قام بها فاراداى وهرتز أب الراديو . وحتى الجذب الكهربائى والجذب المغناطيسى كانا معروفين كنوع خاص من الأشياء قبل أن يوجد فى العالم واحد من المؤرخين . فنى القرن السابع قبل الميلاد سجل طاليس جذب الجزئيات الصغيرة بواسطة قطعة من الكهرباء (باليونانية « الكترون ») إذا دلكت/ والصينيون كانوا يعرفون فعلا حجر المغناطيس أو المغناطيس الطبيعى . ومنذ حوالى سنة ١٠٠٠ قبل الميلاد عندما انقطع بعض الناس عن استعمال الكتابات التصويرية أو كتابات كالصينية تربط الأصوات برموز من الصــور وبدأوا فى استعمال الأبجدية المبنية فقط على كيفية نطق الكلمات جاء إختراع واحد فقط من نوع خلاب لوصف خواص الأشياء فى العالم . وأتى بهذا الإختراع علماء الحياة فى القرن الثامن عشر عندما اضطرهم الخلط الحادث وقتئذ فى الأعشاب الطبية القديمة إلى إختراع لغة دولية لا يمكن الخلط فيها . وقد أصبح الوصف الواضح للأنواع العديدة من الكائنات العضوية ممكنا بإدخال كلمات غير مألوفة عمداً فسميت الأقحوانة العادية مثلا « بليس بيرينيس » ، والبرغوث العادي « بوليكس إريتانس » وهى كلمات مأخوذة من لغات ميتة / وقد ترك علماء الحياة جميع المعانى التى لايستخدمونها الآن مدفونة فى بطون الكتب المنسية من عهد بعيد . وبنفس الطريقة استعار سكان شمال أوربا أبجديتهم ذات الرموز الصوتية من الكتابات التصويرية ، ودفنوا العلاقات المجازية المحيرة فى الرموز التى كانت تستخدمها شعوب العالم القديم .

وتختلف لغة الرياضة عن لغة الحياة اليومية لأنها فى جوهرها لغة مبنية على العقل فلا تتسع لغات الكم لفعل العواطف الخاصة ، سواء كانت عواطف أفراد أو شعوب. فهى لغات دولية مثل مجموعة الأسماء العلمية فى التاريخ الطبيعى . فالإنسان فى تعامله مع حياته الإجتماعية الشديدة التعقد لم يبدأ بعد فى ابتداع تنسيق معقول للغة العادية عند وصفه الأنواع المختلفة للمعاهد والسلوك البشرى . فلغة الحياة اليومية تعرقلها العاطفة وعلم الطبيعة البشرية لم يتقدم للدرجة التى تمكننا من وصف العاطفة الفردية بأسلوب واضح . ولذلك فقد عاقت التفكير الإنشائى حول المجتمع البشرى نفس الرجعية التى أربكت علماء التاريخ الطبيعى المتقدمين . وفى الوقت الحالى لا يختلف الناس فى نوع الحيوان المقصود بكلمة «سيمكس» أو «بديكولوس» لأن أمثال هاتين الكلمتين لا يستعملها من يستعملونها إلا بمعنى ثابت . وما زال فى إمكانهم ان يقصدوا معانى متعددة ـ وكثيراً ما يفعلون ـ عند قولهم إن مرتبة قد ملئت بالبق أو القمل. ودراسة الحياة الإجتماعية للإنسان لم تظهر لنا للآن مثل « لينايوس » العالم النباتى السويدى الذى رتب النباتات ترتيباً خاصاً . وإن مناقشة عن «ذبول الحكومة» قد تنجلى عن تفاوت فى إستعمال القاموس وليس عن تفاوت فى فائدة رجل البوليس . ومن المدهش أن الناس الذين يؤمنون بالحاجة إلى تصميم شئون اجتماعية مناسبة فى نواح أخرى لا يرون بسرعة الحاجة إلى ابتداع لغة دولية معقولة .

ـ وقد سار أسلوب القياس والعد على القوافل والسفن فى الطرق التجارية الكبرى ولكنه نما ببطء شديد . فقد مضت على الأقل أربعة آلاف من السنين بين الوقت الذى تمكن فيه الناس من حساب ميعاد حدوث الكسوف التالى والوقت الذى تمكن فيه الناس من حساب كمية الحديد الموجودة فى الشمس . كما مضى ألفان من السنين بين الوقت الذى سجلت فيه الملاحظات الأولى عن الكهرباء المتولدة بالاحتكاك وبين الوقت الذى قيست فيه قوة جذب جسم مكهرب . وربما مرت مدة أطول بين الوقت الذى عرف فيه الحديد المغناطيسى (أو حجر المغناطيس) وبين الوقت الذى قيست فيه القوة المغناطيسية . أى أن تصنيف الأشياء تبعا لمقاديرها كان عملا أشق كثيراً من معرفة الأنواع المختلفة للأشياء . وكان دائما أكثر اتصالا بأعمال الإنسان الإجتماعية منه بإعداده الحيوى . فإن أعيننا وآذاننا يمكنها أن تدرك الأنواع المختلفة للأشياء من بعد كبير ، ولكن لقياس الأشياء من بعد اضطر الإنسان أن يصنع لنفسه أعضاء حس جديدة الاسترلاب والمقرب والميكروفون. كما صنع موازين تظهر فروقا

فى الوزن لاتحس بها أيدينا . ولقد هذب الإنسان لغة الكم فى كل مرحلة من مراحل تطور آلات القياس/ فبتحول الإبداع البشرى من عد القطيع والمواسم إلى بناية المعابد ، ثم من بناية المعابد إلى قيادة السفن فى بحار لم تعمل لها خرائط ، ثم من التخبط فى البحار إلى آلات تحركها قوى مستمدة من مادة ميتة ، ظهرت على التوالى لغات جديدة للكم . وقد قامت حضارات وسقطت حضارات . وفى كل مرة كانت ثقافات أكثر بداءة وأقل سفسطة تخترق حواجز التفكير المألوف وتدخل قواعد جديدة فى نحو القياس حاملة فى طياتها حدود نموها وضرورة أنها سيعقبها فى دوره ما هو أصلح منها . فتاريخ الرياضة هو مرآة الحضارة .

- وتوجد مبادىء لغة الكم فى الحضارات الكهنوتية لمصر وسومريا . ولقد جنينا الثمار الأولى للمعرفة الدنيوية من هذه الحضارات القديمة التى أمتدت على طرق التجارة البرية إلى الصين وانتشرت فى البحر المتوسط وما وراءه حيث كانت الشعوب السامية ترسل سفنها للتجارة فى القصدير وفى الأصباغ / أما الغزاة الشماليون الأقل تحضرا فى اليونان وآسيا الصغرى فقد جمعوا أسرار بناة الأهرام وامتصوها فى مدن لم تنشأ فيها طائفة القسس بعد/ وعندما حل الرخاء باليونان أصبحت الهندسة ملهاتهم / وقد فسد التفكير اليونانى من عبادة النجوم التى انتشرت فى العالم القديم / وفى الوقت الذى تبين فيه أن الهندسة لا بد أن تفسح الطريق للغة جديدة توقف تقدمها / وانتقل المشهد إلى الإسكندرية أكبر مركز لأعمال السفن والفنون الآلية فى العالم القديم / ثم بدأ الناس يفكرون فى مقدار الجزء المجهول من العالم الذى ينتظر الكشف / وبدأ تطبيق الهندسة فى قياس السماوات/ ثم أخذ حساب المثلثات مكانها / وقيس حجم الأرض ، وبعدنا عن الشمس وعن القمر ، وبذلك قل شأن آلهة النجوم / وفقدت المعتقدات القديمة للديانات قابليتها للتصديق فى الحياة الفكرية للإسكندرية مصنع أديان العالم . وفقد الناس عقيدتهم فى وجود إله فى السماء ولو أنه يحتمل أن يؤمنوا بوجود إله فيما وراء السماء .

- وفى الإسكندرية حيث نشأت اللغة الجديدة لقياس النجوم بدأ التفكير فى أعداد لا يمكن تصوركبرها بالمقارنة بالأعداد التى يمكن للعقلية اليونانية إدراكها . فقد أرعب أنكساجوراس بلاط « بريكليز » بتصريحه أن الشمس كانت من الكبر بحيث تساوى أرض اليونان . وبعد ذلك فقدت اليونان نفسها أهميتها بجانب الأرض التى قاس محيطها « إراتوستنيز » و« بوزيدونيوس » ثم فقدت الأرض نفسها أهميتها بجانب

الشمس التي قاسها « أرستارخس » . وقبل أن يبتلع ليل الخرافات الرهبانية البهيم العالم القديم الكبير ، كان الناس يتلمسون طريقهم إلى وسائل جديدة للحساب . وأصبحت قضبان العداد القديم قضبان قفص سجنت فيه حياة الإسكندرية العقلية . وقام رجال مثل «ديوفانتوس» و «ذيون» باستعمال الأشكال الهندسية لتصميم طرق تقريبية للحساب . وكانوا على وشك ابتداع اللغة الجديدة الثالثة وهي الجبر . ويعزى فشلهم في ابتداعها إلى تراثهم من الثقافة الإجتماعية . أما في الشرق فقد بدأ الهندوس من مستوى أحط بكثير ولو أنه لم يكن لديهم كابوس نظام عددي قديم فإنهم قاموا بتصميم رموز جديدة خضعت للعمليات الحسابية البسيطة دون الحاجة إلى مساعدات آلية . أما الحضارة الإسلامية التي اكتسحت الجزء الجنوبي من الإمبراطورية الرومانية فقد وفقت بين أسلوب القياس كما نما على أيدي الأغريق والإسكندريين وأضافوا إليه الأداة الجديدة لاستعمال الأعداد التي نشأت نتيجة اختراع الرموز العددية الهندية . وقد صيغت المبادىء الأساسية للغة الحساب بأيدي الرياضيين العرب مثل عمر بن الخيام . وما زلنا نسميها باسمها العربي « الجبر » فنحن مدينون بكل من الجبر ونظام الشعر الأوربي الحديث لشعب غير آري يستبعد من الانتخابات في اتحاد جنوب أفريقيا .

– وعلى امتداد طرق التجارة أدخل هذا الحساب الحديث في أوربا بواسطة الطلبة اليهود من الجامعات المغربية في إسبانيا وبواسطة التجار من غير اليهود يتعاملون مع سكان السواحل الشرقية لإيطاليا وكان بعض هؤلاء يعضدهم أشراف اتسع أفقهم بدون قصد بواسطة الحروب الصليبية . فأوربا تقع في طريق الرحلات الملاحية الكبيرة . وقد كان الملاحون يصطحبون معهم فلكيون يهود يستطيعون استخدام التقاويم النجمية التي كان يقوم بإعدادها علماء العرب . وقد أثرى التجار فأصبح تفكير العالم في الأعداد الكبيرة أكثر مما كان في أي وقت مضى . ثم احتضن الحساب الحديث أسلوبا مدهشا أنبتته الحاجة إلى جداول دقيقة بمقاييس النجوم لاستخدامها في الملاحة . فكانت اللوغاريتمات من الثمار الثقافية الأولى للرحلات البحرية الكبرى . وبدأ الرياضيون يفكرون في الخرائط ، وفي خطوط الطول وخطوط العرض . وقد نشأ فرع جديد للهندسة (ما نسميه في كلامنا اليومي بالرسم البياني) كنتيجة لامفر منها / وهذه الهندسة الجديدة التي ابتدعها ديكارت كانت تحتوي شيئاً أهملته الهندسة الأغريقية / في العالم القديم المتمهل لم تكن هناك ساعات . وعندما اتجه العالم نحو الرحلات البحرية بدأت الساعات الميكانيكية تحل محل الوظيفة الطقسية القديمة للكهنة كقوامين على الزمن . وقد نبت من نفس المتن الإجتماعي هندسة تستطيع

الدلالة على الزمن وديانة خالية من أيام قديسين ، ومن هندسة الوقت هذه قام جماعة من الناس كانوا يدرسون ميكانيكا الساعة البندولية ويعملون اكتشافات جديدة عن حركة الكواكب باختراع لغة كم جديدة لقياس الحركة . وهى ما نسميه اليوم حساب التفاضل والتكامل .

- وفى الوقت الحالى يمكن ترك هذا الملخص لتاريخ الرياضة كمرآة للحضارة متداخلة فى الثقافة العامة للإنسان ومخترعاته وتدبيراته الإقتصادية ومعتقداته الدينية ، عند المرحلة التى وصلت إليها عند وفاة نيوتن . فكل ما حدث منذ ذلك الوقت كان مجرد ملء فتحات وشحذ أدوات سبق اكتشافها . وتجد هنا وهناك دلالات على فرع جديد من الرياضة . فترى لمحة من هذا فى الإحصاء الاجتماعى وفى دراسة الذرة . ونبدأ فى رؤية إمكانيات لغات جديدة للكم تفوق ما نستعمله الآن عندما جمع حساب التحليل للحركة أى التفاضل فى كيانه كل ما قد سبقه .

تعليمات لقراء هـــذا الكتاب :

الطريقة المألوفة فى كتابة كتاب عن الرياضة هى توضيح التسلسل المنطقى لكل خطوة دون توضيح الفائدة من كل خطوة . ولكن هـذا الكتاب قد ألف ليوضح لك كيف أن كل خطوة نتجت تاريخيا من الخطوة السابقة ، والفائدة التى تعود عليك أو على أى شخص آخر من أخذها . والطريقة الأولى تنفر كثيراً من الناس الأذكياء واليقظين إجتماعيا ، لأن الأذكياء يتشككون فى المنطق البحت ، وذى اليقظة الإجتماعية يعتبرون العقل البشرى آلة للنشاط الاجتماعى .

ومع أنه قد أخذت العناية القصوى فى وضع القواعد المنطقية ، أو قل القواعد النحوية ، فى تتابع مستمر ينبغى ألا تتوقع أن تتمكن من تتبع كل خطوة فى المناقشة من أول قراءة . وهناك نصيحة قيمة لرياضى اسكتلندى شهير بدونها تضعف همم كثير من الناس بلا ضرورة . فقد قال كريستال «كل كتاب رياضى يستحق الذكر يجب قراءته طرداً وعكساً» . أو كما نصح رياضى فرنسى «سر قدما والثقة تتبعك» .

وعلى ذلك فهناك تحذيران ضروريان لابد من مراعاتهما إن شئت التمتع بقراءة هذا الكتاب .

أولا أن تقرأ الكتاب كله مرة بسرعة لتلقى نظرة عابرة على الارتباطات الإجتماعية

للرياضة ، وعندما تبدأ قراءته للمرة الثانية لتفهم التفاصيل عليك بقراءة كل فصل بأكمله قبل أن تبدأ فى فحص دقيق لمحتوياته .

ثانيا أن تجعل دائماً القلم والورق ، ويفضل ورق المربعات ، فى متناول يدك ، وكذلك القلم الرصاصى والممحاة ، عند قراءة الكتاب لدراسة جدية وأن تحل جميع الأمثلة العددية والأشكال أثناء القراءة . ويمكنك الحصول بمبلغ زهيد على كراسة من ورق المربعات من أى مكتبة ، وماتحصل عليه من هـــذا الكتاب يتوقف على مقدار تعاونك فى المهمة الإجتماعية للتعليم .

الباب الثانى

الخطوات الأولى فى القياس

أو

الرياضة فيما قبل التاريخ

يخبرك بعض الناس أن الرياضة لم تبدأ إلا بعد أن وجدت طبقة من الناس عندها من الفراغ ما يمكنها صرفه فى اللعب بالأعداد والأشكال . وسيرد فيما يلى الكثير من الأدلة على صدق الرأى القائل بأن الرياضة تقدمت عندما وجدت أمور عملية استدعت اهتمام الرياضى ، وأصابها الركود عندما اعتبرت مجرد تسلية لطبقة منعزلة عن الحياة المألوفة للبشر . وسواء صوابا كان هذا الرأى أم خطأ، فإنه لاشك أن العمل العقلى فى الرياضة — كجميع الأنواع الأخرى للعمل العقلى — يتوقف على تراثنا الحيوى ، والثقافى كما يتوقف على بيئتنا الإجتماعية والطبيعية . فالأغريق ، أسبق الكتاب الأقدمين فى الرياضة ، كانوا يعيشون فى عالم يرون فيه الناس تقيس الزوايا بين النجوم ، وتبنى المعابد بالاستعانة بأشكال يخططونها على الرمال، وتحسب إرتفاعات الأشياء بقياس ظلالها ، وتصمم الزخارف على الفخار ، وتصنع القراميد فقد كان هؤلاء الناس، وهم أقدم المؤلفين للكتب الرياضية ، يعيشون فى عالم من الأشياء المألوفة فيه الفن المعمارى الكهنوتى للهرم والألعاب السحرية بالأعداد ، والزهريات القبرصية المزينة بزخارف هندسية ، والجدران والأرضية المبطنة بقراميد الفسيفساء وكان من حولهم تجار يعدون النقود ، وجباة الضرائب يضبطون القياس لتقدير الخراج ، وصناع من العبيد يشيدون المبانى باستخدام المثلث وخيط المطمار وميزان الماء ، وبحارة يرسمون طريقهم بالإسترشاد بالنجم القطبى . أما الفراغ فأقصى فائدته تنحصر فى إتاحة الفرصة لقوم ليطيلوا التفكير والتأمل فى عالم تتغير معالمه وتتحور بفعل قوم آخرين لافراغ عندهم .

فالحقيقة أنه من الخطأ أن تتصور أن الرياضة اخترعها أثينيون مثاليون فى أوقات

فراغهم نتيجة إعجابهم بخلوها من الفائدة إطلاقا / فقد تمكن البابليون والمصريون من قبلهم من الحصول على نتائج تدل على مستوى للعمل غير وضيع فقد بز البابليون إغريق آتيكا كثيراً فى فن الحساب/ وإن شدة قدم ما وصل إليه هؤلاء القوم وقوة الارتباط بين الكتابة البدائية والنشاط الإجتماعى لحساب الزمن ليوحى إلينا بأن نرجع في بحثنا إلى ما قبل الواح نيبور وأهرام خوفو بكثير لكى تتمكن من فهم الأصول الإجتماعية للدراسات الرياضية . فقبل أن يبدأ الناس تأليف الكتب فى الرياضة تمكن الإنسان من إيجاد وسائل وأساليب للإجابة عن أسئلة من أنواع متعددة تكون الإجابة عنها بالأعداد . وسنقوم بفحص بعض هذه الأسئلة لكى نتمكن من أن نفهم كيف نشأت الحاجة إلى الرياضة .

١ — كم من الأفراد يكونون مجموعة ؟

كان الوطنيون الأصليون فى تسمانيا الذين انقرضوا الآن فى إمكانهم العد لغاية أربعة فقط ، ولم يكد تطورهم الثقافى يتعدى المستوى الباليوليثى . ويمكننا أن نفترض أن الحاجة إلى إحصاء أعداد كبيرة من الأشياء لم تنشأ حتى بدأ الناس فى اقتناء قطعان من الغنم والماشية . فكان على الراعى أن يحصى عدد الغنم أو البقر فى قطيعه ليعلم إن كان بعضها مفقوداً ، وقد وفق الإنسان إلى كيفية عد غنمه فى مجموعات قبل أن يبدأ فى إنشاء مدن لسكناه بزمن طويل . ونحن الآن فى نظامنا العددى نعمل من الأشياء التى نقوم بعدها مجموعات من عشرات ، أو عشرات العشرات (مئات) أو عشرات عشرات العشرات (آلاف) . وهذا هو ما نعنيه عندما نقول ان عشرة هى أساس نظامنا العددى .

وتجد أحد مضاعفات الخمسة (خمسة أو عشرة أو عشرين) يتكرر كأساس أو طريقة أساسية لتجميع الأعداد فى أغلب النظم العدديه فى جميع أنحاء العالم . ويرجع هذا إلى أن الإنسان البدائى يشبه الطفل فى استعمال أصابعه كعلامات لمطابقة الأشياء التى يعدها ، وهو فى العالم الحديث يستخدم أحيانا أصابع قدميه . وتستعمل إحدى قبائل الوطنيين الأصليين فى بارجواى أسماء خاصة للدلالة على الأعداد من واحد إلى أربعة ، ثم خمسة يسمونها اليد الواحدة ، وعشرة اليدين ، وخمسة عشر يدين وقدم . وعشرين اليدين والقدمين . وقد كان تقويم «المايا» القديم (شكل ١٠٦ بالباب السابع) يحوى رموزاً مختلفة للأعداد من واحد إلى أربعة ، وللعدد خمسة ، وللعدد عشرين .



شكل (٣)

الكتابات العددية القديمة

سوف نشير الى هذه الاشكال ثانية فى الابواب التاليــة ٠ والشرطة الممثلة للصفر قلما كانت تستخدم فى نهــاية سلسلة الاعــداد الستينية فى الكتابة البابلية كما هو مذكور فى نهاية هذا الباب ٠ وعند وضعه كمــا هو مبين هنا فالعدد ٦٠ يكون ١ (٦٠) + ٠ (١) والعــدد ٣٦٠٦٠ يكون ١٠ (٦٠) ٢ + ١ (٦٠) + ٠ (١) والعدد ٦٦٠ وهوعبارة عن ١١ (٦٠) + ٠ (١) يكتب بنفس الطريقة ووجود فتحة بين الرموز أو الكلام كانت تدل على المقصود ٠

وللعدد أربعمائة (عشرين عشرينا) . وما زالت هناك بقايا لاستخدام اليدين والقدمين للعد فى اللغة الإنجليزية ، فنرى فى العهدالقديم رمزاً خاصاً للعدد عشرين score يتكرر كثيراً . وقد كان هناك أسلوب آخر قديم لتجميع الأعداد أزواجا أو أربعات (يدان وقدمان) كان يستعمله السريانيون فى نظامهم العددى الذى كان أساسه إثنان (شكل ٣) . وفى اللغة الانجليزية ما زالت هناك تفرقة لغوية بين إحدى عشرة أو إثنتى عشرة وثلاث عشرة أو أربع عشرة . . . . الخ .

٢ — منذ كم من الزمن حدث ؟

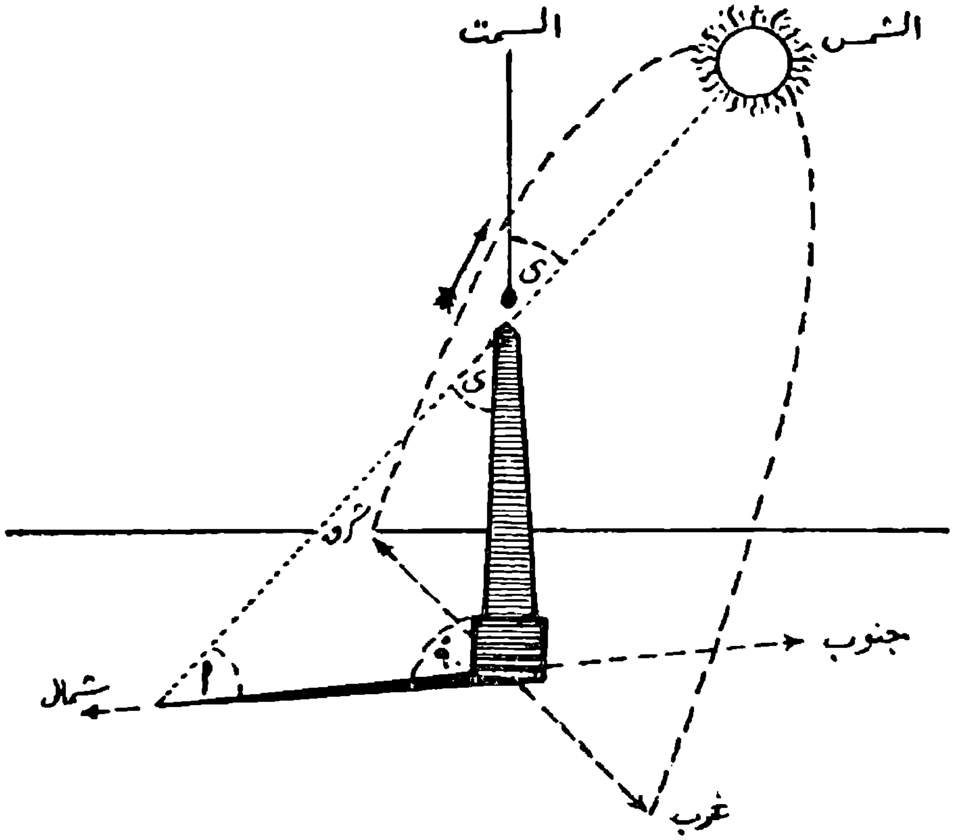
لا يمكننا الجزم بأن استعمال الأعداد لعد الأشياء كالغنم والبقر سبق فعلا استخدامها فى غرض آخر قام به الإنسان بمجرد أن تخطى مرحلة الصيد وجمع الغذاء . فقد اضطر

الإنسان إلى أن يلاحظ فصول السنة ويهتم بها بمجرد أن تعلم كيف يبذر الحب ويقوم بتربية الحيوانات التى تحمل فى مواقيت معينة من العام / فلاحظ أن القمر يتأخر شروقه كما يتأخر غروبه فى كل ليلة عن سابقتها فيما بين البدر والبدر التالى وبدأ يكون من الأيام مجموعات من ثلاثين يوماً سماها أقماراً أو شهوراً . كما لاحظ أيضاً ، كما يلاحظ حتى الآن معظم الأقوام البدائية [أن مجموعات النجوم الظاهرة فى السماء ليلا تتغير تبعا لتغير فصول السنة ، فتبكر فى الشروق كما تبكر فى الغروب فى كل ليلة] ومن الممكن لمعظم الشعوب أن تتعرف على فصول السنة المختلفة بمعرفة أى تجمعات نجمية تظهر فى السماء عقب غروب الشمس مباشرة ، كما يمكنها حساب عدد الأقمار الواقعة بين فصل جاف أو مطير وفصل آخر نظيره. وقد توصل قدماء المصريين إلى تحديد طول العام ٣٦٥ يوما قبل عام ٤٠٠٠ قبل الميلاد وذلك [بحساب عدد الأيام الواقعة بين ظرفين متتاليين لشروق نجم الكلب « الشعرى » قبل شروق الشمس مباشرة]

- وقد ساعد ظل الشمس على معرفة عدد مجموعة الأيام التى تتكون منها السنة بطريقة أخرى / فقد لوحظ أن ظل الشمس يشير دائما إلى اتجاه ثابت فى منتصف النهار عندما يكون هذا الظل أقصر ما يمكن / فالظل وقت الظهيرة يكون فى اتجاه خط يقطع الأفق يسمى خط الزوال ويمتد من الشمال إلى الجنوب / والشمس تشرق وتغرب فى بعض الفصـــول على مسافة بعيدة شمال الأفق أو جنوبه وعندئذ يكون الظل ظهراً أقصر ما يمكن أو أطول ما يمكن / فاليوم الذى يكون ظل الظهيرة فيه أقصر ما يمكن (٢١ يونية فى تقويمنا) هو نقطة الانقلاب الصيفى / وقد تحددت السنة بعد الأيام بين انقلابين صيفيين متتاليين / وقد كان يوما الاعتدالين الربيعى والخريفى يعتبران من المناسبات التى تؤدى فيها المراسم الدينية ، وفى هذين اليومين كانت الشمس تشرق فى منتصف المسافة بين هاتين النقطتين اللتين فى شمال الأفق وجنوبه أى تشرق من الشرق تماما وتغرب فى الغرب تماما / وبالإضافة إلى هذه الملاحظات عن ظل الشمس فى فصول السنة المختلفة ، تعلم الإنسان فى العصر النيوليثى كيف يحدد أوقات أكله وساعات عمله بملاحظة ظل الشمس الذى تلقيه أعمدة أو نصب من الحجر كان يشيدها لهذا الغرض / وقد نتجت ثلاث نتائج هامة عن دراية الإنسان بالزمن واهتمامه به الذى ازداد عندما استتب نظام الزراعة والرعى .

وفى المجتمعات البدائية توكل أحياناً مهمة ملاحظة تعاقب الفصول لأكبر أعضاء

القبيلة وأعقلهم ، وأحياناً تنحصر فى أسرة معينة ، أى يقوم بها أفراد تتوفر فيهم شروط العلم بأسرار السماوات . وتدل البقايا الأولى لحياة المدن قديماً فى مصر



شكل (٤)

الظهر الاعتدالية (٢١ مارس و٢٣ سبتمبر) عندما تشرق الشمس من الشرق وتغرب فى الغرب . ويقع ظل الشمس وقت الظهر دائما على الخط الواصل بين نقطتى الشمال والجنوب على الافق . وهذا هو أيضا خط زوال الطول للمشاهد الواصل بين القطبين الشمالى والجنوبى .

"السمت" هو الاسم الذى يطلقه علماء الفلك على البقعة من السماء فوق الرأس مباشرة .

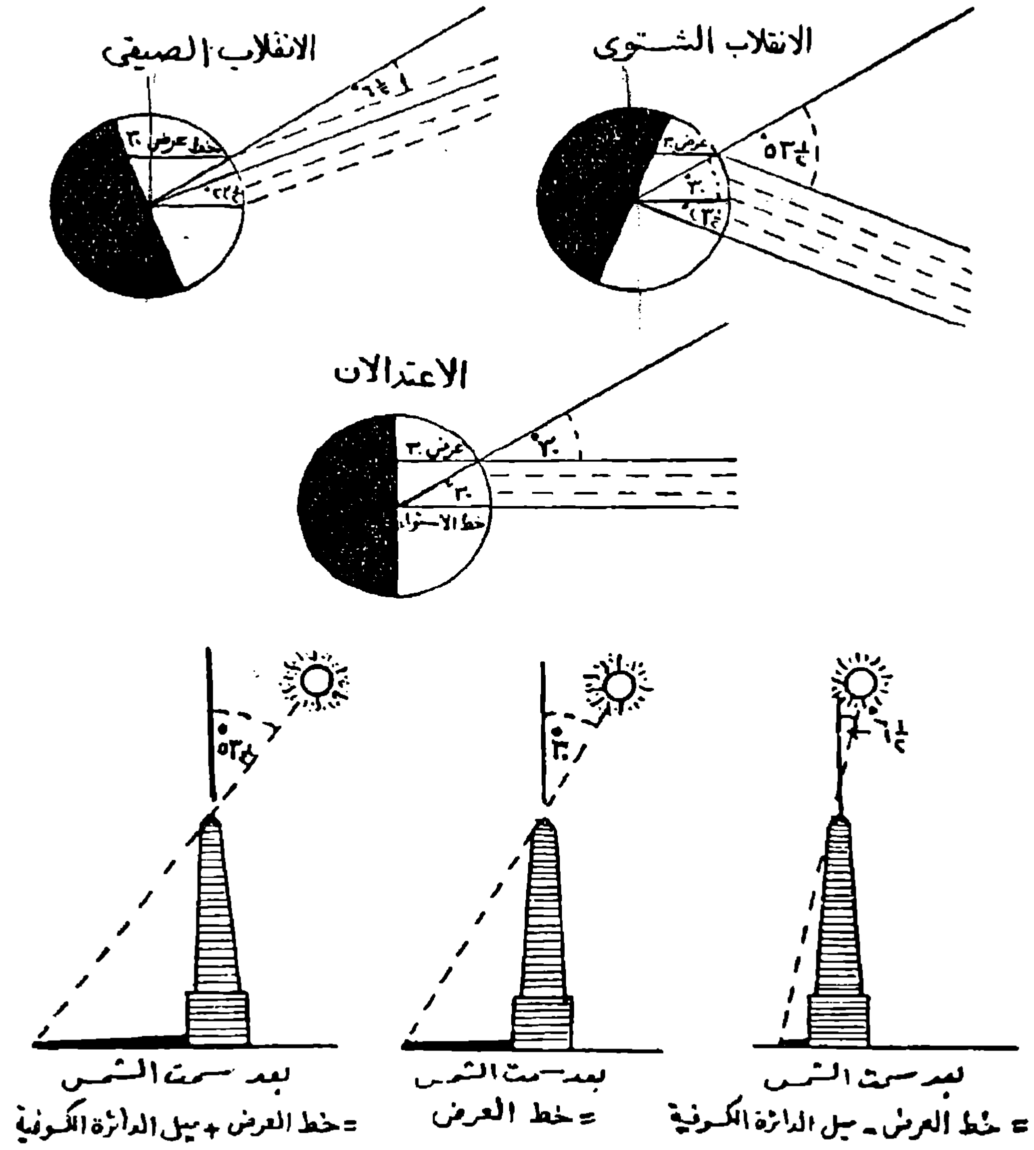
لاحظ أن الزاوية (ا) للشمس فوق الافق (وتسمى « ارتفاع » الشمس) والزاوية (ى) التى يعملها شعاع الشمس مع خيط المطمار أو الرأسى (وتسمى بعد سمت الشمس) مجموعهما زاوية قائمة أى ٩٠°. فتكون ا = ٩٠° ـ ى/ى = ٩٠° ـ ١ .

وسوميريا وبوقاطان البعيدة ، على تفرقة مبكرة لفريق من الكهنة تركزت مهمتهم الاجتماعية الأساسية فى رعاية التقويم وشئونه . فمن الخطأ الكبير أن نعتبر الكهنوت البدائى كمهمة دينية صرفة بمعناها الحديث . وقد كانت الحاجة الاقتصادية إلى تسجيل

مرور الزمن سببا فى وجود هذا الفريق ، وإذا كانت تأدية مهمتها قد اقترنت بمعتقدات وهمية باطلة إلا أنها قامت بجانب ذلك بوضع الأسس الأولى لمجموعة منظمة من المعلومات العلمية . وقد كانت هذه المعلومات ، رغم ما نعرفه عنها من أنها وهمية باطلة ، أقرب شبها بالفروض العلمية عنها بما نسميه الآن العقيدة الدينية . فقد كانت هذه المعلومات مستمدة من خبرة الإنسان اليومية ، كما أنها تمثل الخطوات الأولى نحو تفسير معقول للطبيعة .

— فى صفحة السماء المتغيرة رأى الإنسان الأول الموت والتوالد ، والنوم واليقظة ، والتتابع الأساسى للإخصاب والفناء . وكان شروق كوكبات نجمية جديدة واختلاف ظل الشمس بين الطول والقصر ينبىء عن وقت ولادة الحملان أو بذر الحبوب أو جفاف أعواد القمح / وقد إنطبق تتابع أوجه القمر على تتابع الحياة المخصبة للمرأة / وكان غروب الشمس وشروقها علامتين للنوم والتوتر البدنى لليقظة / وقد بدأنا نفهم فى هذه الأيام كيف توقظ دورات أحداث الطبيعة فى أجسامنا تغيرات تابعية تدبرها دوافع عصبية / إذ نعلم مثلا أن الضوء يحفز الغدة النخامية على العمل وهذه الغدة هى المسيطرة على الدورة التناسلية ، ويطبق الاتحاد السوفييتى هذه المعلومات على مدى واسع لزيادة إنتاج البيض بوضع الدجاج فى أماكن مضاءة بالكهرباء باستمرار / ولم يفطن الراعى قديما إلى أن الضوء فى غنى عن الدجاجة وإن لم تكن الدجاجة فى غنى عن الضوء / ولم يكن فى استطاعته أن يفهم أن هذه الساعة التقريبية التى تدل على مواقيت بذر الحبوب ومواقيت الاعتناء بالدواب ليست كرؤساء قبائله يمكن استمالتها أو اتقاء شرها بالرشوة . وعلى هذا الأساس اكتسب فريق الكهنة مكانة سلطان ممتازة فقاموا بمهمة ضابط الاتصال فيقدمون الرشوة لسكان السماء العظام القادرين ويستعطفونهم ووجدوا هذا العمل مربحاً لهم . فالرعاة المزارعون يحضرون الهدايا للآلهة فيستفيد بها الكهنة وتنمو أجسامهم عليها . وقد تمكن القساوسة الكلديون منذ خمسة آلاف سنة من التنبؤ بمواعيد كسوف الشمس التى كانت تحمل معانى إنذارت خطيرة لأقوامهم الذين كانوا يتفرسون النجوم ، وقد استغلوا قدرتهم هذه ليسيطروا لا ليخدموا / وأصبحت أسرار المعابد وسائل للظلم والتعسف ، كما يحدث فى جميع أنواع المعرفة عندما تمنعها الظروف من أن تكون ملكا مباحاً للجنس البشرى كله .

— وقد أضاف قساوسة التقاويم إلى معلومات البشر حقيقتين خالدتين وذلك قبل أن ينقطعوا



شكل (٥)

القياس المصرى لميل الدائرة الكسوفية بواسطة ظل الشمس وقت الظهر ·

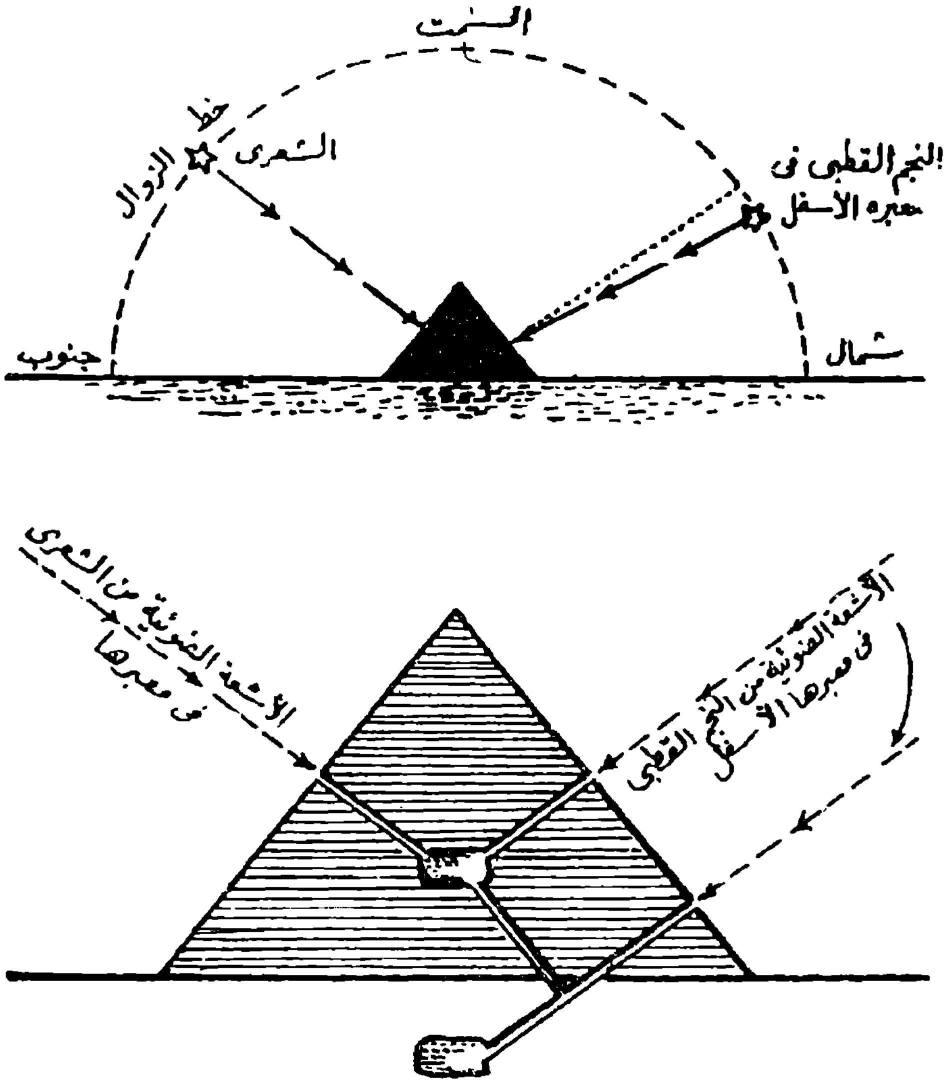
الشمس فى أقصى ارتفاعها وقت الظهر · والقطب ومركز الارض والمشاهد والشمس كلها فى نفس المستوى (أو السطح المسطح) · وفى الاعتدالين [٢١ مارس و٢٣ سبتمبر] يكون بعد سمت الشمس وقت الظهر هو خط عرض المشاهد (٣٠° فى ممفيس) ، فاذا كان ميل الدائرة الكسوفية هو هـ فان : ع + هـ = بعد سمت الشمس فى الانقلاب الشتوى [٢١ ديسمبر]

ع − هـ = بعد سمت الشمس فى الانقلاب الصيفى [٢١ يونية]

ويكون ميل الدائرة الكسوفية هو :

½ [ميل سمت الشمس فى ٢١ ديسمبر − ميل سمت الشمس فى ٢١ يونية]

وسيشرح هذا بتفصيل أوفى فيما بعد ·



شكل (١٥)

التوجيه الفلكى للهرم الأكبر .

أهرام خوفو وسنفرو مشيدة على نفس الفكرة الهندسية ، فمحيط أوجهه الاربعة التى تتجه تماما نحو الشمال والجنوب والشرق والغرب يحمل نفس النسبة الى ارتفاعه كنسبة محيط الدائرة الى نصف قطرها أى ٢ × ٣ ١/٧ أو ٢ ط ، وكما قال فلندرز بترى : [تربيع القاعدة وتسويتها صحيح بدرجة لامعة ، فالخطأ المتوسط أقل من جزء من عشرة آلاف من الضلع فى التساوى والتربيع والمنسوب] ، فالشعرى و نجم الكلب الذى كان شروقه الاحتراقى يبشر ببدء العام المصرى وفيضان النهر المقدس الذى كان يجلب الخير والرخاء للمزارعين ، كانت أشعتها فى عبورها خط الزوال تقع عمودية على الوجه الجنوبي للهرم الاكبر وتنفذ باستقامة خلال بئر التهوية الى المخدع الملكى مضيئة رأس فرعون الميت ، أما ضوء النجم القطبى الذى كان عندئذ النجم أ فى مجموعة التنين فكان ينفذ من الفتحة الرئيسية خلال بئر آخر يؤدى الى المخدع الاسفل عندما يكون النجم فى معبره الاسفل تحت القطب السماوى الحقيقى بثلاث درجات .

عن تأدية واجبهم الإجتماعى اللازم بقرون . وسنرجىء الكلام عن إحداهما إلى ما بعد ، أما الأخرى فهى اختراع كتابة الأعداد . فقد كان استخدام الأعداد فى عد الغنم والأبقار لا يحتاج إلى تسجيل ، ونشأت الحاجة إلى التسجيل عندما بدأت الملاحظات الدقيقة عن الفصول ، ولم تستخدم الكتابة كوسيلة لنقل الرسائل الابعد ذلك بكثير ، فقد نشأت الفكرة عندما بدأ الناس ينقشون علامات على الحجر أو الخشب لتسجيل الأحداث السماوية التى كانوا يحتفون بها بإقامة الحفلات وتقديم القرابين .

- وقد حملت كل الأساليب الأولى لكتابة الأرقام آثار الأصابع العشرة للإنسان ففى الكتابة الهيراطيقية القديمة لمنطقة البحر المتوسط كانت الأعداد من واحد إلى تسعة تمثل فعلا بالأصابع . وفى الكتابة التجارية التالية التى كان يستعملها الفينيقيون رمز للوحدة يمكن تكراره (مثل I, II, III فى الكتابة الرومانية) لغاية تسع مرات . وكان فيها رمز للعشرة يمكن تكراره (مثل X، XX، ... فى الرومانية) تسع مرات، ثم رمز آخر للمائة (مثل C فى الرومانية) . هذه الكتابة الفينيقية القديمة التى كانت أساس الأعداد التى استخدمها الأغريق الأيونيون والأتروسقان كانت معقدة ولكنها كانت على الأقل معقولة أكثر مما تلاها . ولكى يخفف الأتروسقان من تعقيدها عادوا إلى العد باليد الواحدة وأضافوا الرموز التى تمثل ٥ ، ٥٠ ، ٥٠٠ فى كتابة الأعــداد الرومانية ((D, L, V)) ثم جاء الأغريق المتأخرون فنبذوا الكتابة الأيونية واتخذوا نظاما للأعداد ورثه عنهم الإسكندريون وقد استخدموا فى هذا النظام جميع حروف الأبجدية ، مثل نظام كتابة الأعداد العبرية هذه الطريقة ولو أنها كانت مختصرة إلا أنه نتج عنها أمران أطاحا بها . وأحد هذين الأمرين سنعود إلى دراسته فى الباب الخامس ، وهى أنها شجعت نوعا خاصا من السحر بالأعداد يسمى « جمطريا » ، والأمر الثانى وهو الأهم ستأتى دراسته فى الباب السابع وقد كان إدخال هذا النظام الحرفى للتعبير عن الأرقام سبباً فى استحالة تمكن أذكى رياضيى الإسكندرية من إختراع قواعد بسيطة للعمليات الحسابية دون الإلتجاء إلى معونة آليه .

- ولو أن للإنسان عدداً كبيراً من الأرجل مثل « أم أربع وأربعين » ، أو لو أن له تسعة عشر زوجا من الأعضاء مثل « الإربيان » تتكون منها خمس مجموعات متميزة فى الوظيفة ، لاتخذ تطور لغة الأعداد عنده سبيلا آخر . كأنه كان من المحتمل اختلاف

الأسلوب أيضاً لو لم يكن الإنسان حيوانا «يلد» . فقد لاقى زينو ومعاصروه صعوبات كبيرة جداً لعدم وجود أعداد عندهم تقبل الامتداد مثل ١,٠ ، وقد كان من المحتمل أن تخفف حدة هذه الصعوبات لو كان الإنسان من الحيوانات التي تضع بيضا . وإنك لتجد في « الكتاب الصيني للتراتيب » ، وهو واحد من أقدم المؤلفات على العدد فقد كتب حوالى عام ١١٠٠ قبل الميلاد ، أن الأعداد الصحيحة مقسمة إلى مجموعتين ، مجموعة (أو متسلسلة) الأعداد الفردية ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ... ومتسلسلة الأعداد الزوجية ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ...

والأعداد الزوجية يقبل كل منها القسمة على ٢ بدون باق . واعتبروا الأعداد الزوجية « أنثى » والأعداد الفردية « ذكراً » والزواج الكامل للاثنين ينتج عنه المتسلسلة التامة للأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ...

وقد ظل الإنسان أجيالا عديدة تضايقه صعوبة تمثيل المقاييس التي يقوم بها بهذه الأعداد التامة جنسياً والتي أنشئت لوصف مقادير مجموعات من أشياء منفصلة متميزة عن بعضها البعض . فقد عجز أمهر الناس في العصور القديمة عن مواجهة فكرة عدد مثل الجذر التربيعي لاثنين الذي كان بالنسبة إليهم كبيضة لم تفقس . فالعدد عندهم لا يعدو أن يكون ولداً أو بنتاً .

ويجب ألا تدهشنا هذه العلاقة العديمة الأساس ظاهريا بين العدد والجنس / فكتابة الأعداد كانت وليدة تقويم منظم نشأت الحاجة إليه من اهتمام الإنسان بخصوبته وخصوبة مواشيه / وتجد أثر الربط الجنسي واضحا أيضاً في الكتابة العددية القديمة / فقد تكون الأهمية الكبيرة التي أعطيت للعدد ثلاثة ناتجة عن الاهتمام بأعضاء التذكير ففي كثير من اللغات تستعمل الثلاثة للدلالة على القوة والصولة ، ففي الإنجليزية يقال « مسلحا ثلاث مرات » وفي النظم القديمة للعدية نلاحظ أمارات العودة إلى هذا الاهتمام البدائي بالخصوبة . من أمثلة ذلك استخدام الرومان للفترة ثلاثه عندما أخذوا الأعداد عن الاتروسقان هكذا .

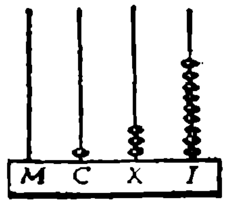
I	II	III	IV	V	. ...	(النهضة)
X	XX	XXX	XL	L	.. ..	(الروماني)
C	CC	CCC	CD	D	... ...	»

وقد سبق الفينيقيون والسومريون فى نظامهم العددى هذا التطور بتفضيلهم تجميع العلامات ثلاثا ثلاثا . وكتابة العدد أربعة والعدد أربعين وأمثالها بالطريقة العكسية السابقة شبيهة بقولنا إن الساعة الخامسة إلا عشر دقائق مثلا بدلا من الساعة الرابعة وخمسين دقيقة . وقد اتضح فيما بعد أنها طريقة معوقة لأنها زادت صعوبات الرومان فى اختراع قواعد للحساب، وقد كان من المحتمل ألا يقيم الرومان الصعوبات أمام أنفسهم بهذا الاستعمال العكسى المشئوم إذا كان الجنس البشرى يتناسل بطريقة الإخصاب الخارجى كالضفادع .

– وقد أنشأ الجنس البشرى المتحضر الرموز الكتابية للأعداد قبل أن تظهر حاجته إلى وسائل بسيطة سريعة للحساب بزمن طويل . ففى تصميم كتابة الأعداد لم يتنبأ الإنسان بحاجته إلى كتابة عددية يمكن بواسطتها القيام بالعمليات الحسابية ببساطة وعندما اضطر الناس إلى استعمال الأعداد الكبيرة لجأوا إلى الاستعانة بجهاز مادى أحاط بكل أفقهم العددى والقياسى ، ويزيد المثاليون تعقيد المشاكل بإخفاء الصعوبات التى صادفت هؤلاء الرياضيين القدامى . فقد كانت صلابة معداتهم المادية تعوق مرونة عملياتهم العقلية باستمرار ، وكان هذا التشويه والتعقيد الاضطرارى للعمليات يفسر على أنه تعمق غامض منهم ، وعندما تخطى الإنسان مرحلة الإعتماد الكلى على العصى للعد بعمل حزوز عليها تمثل الأعداد وقع على طريقة أخرى للعد باستخدام الحصى أو الأصداف وهى تمتاز بسهولة التخلص منها وإمكان استخدامها المرة تلو الأخرى . وهكذا نشأ إطار العد . ومن المحتمل أن يكون قد بدأ على صورة خطوط محفورة فى سطح مستو . ثم تطور إلى مجموعة من العصى الرأسية الموضوعة عليها حجارة صغيرة مثقوبة أو أصداف أو خرز . وأخيراً حل الإطار المقفل الموضح بالجزء الأسفل من شكل ٦ محل النوع القديم الموضح بالجزء الأعلى من الشكل . وإطار العد أو المعداد (شكل ٦) كان من اختراعات الإنسان المبكرة . فنجده يتبع طريق انتشار الثقافة الميجاليثية فى جميع أنحاء العالم . فقد وجد الإسبان عند غزوهم لأمريكا أن أهل المكسيك وبيرو يستعملون المعداد . واستعمله الصينيون والمصريون أيضا قبل عهد المسيح بآلاف السنين . وقد أخذه الرومانيون عن الاتروسقان . وقد ظل هذا الاطار الآلة الحسابية الوحيدة التى يستعملها الإنسان حتى قرب عهد المسيح .

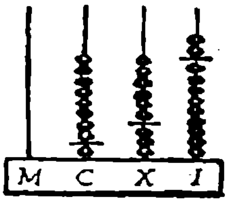
والأعداد بالنسبة إلينا رموز نستخدمها فى إجراء العمليات الحسابية . وكان

الجمع باستخدام الأباكوس



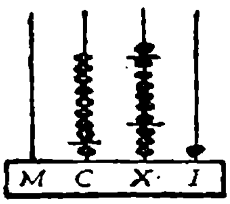
(أ)

١٣٩



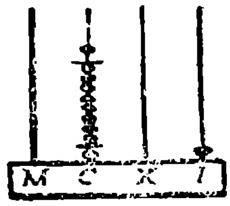
(ب)

٨٦٢ + ١٣٩



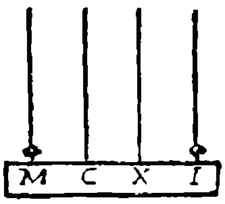
(ج)

أنقص ١٠ من العمود I
وأضف ١ الى العمود X



(د)

أنقص ١٠ من العمود X
وأضف ١ الى العمود C

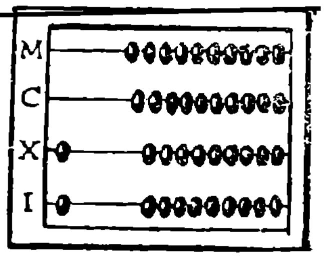


(هـ)

أنقص ١٠ من العمود C
وأضف ١ الى العمود M

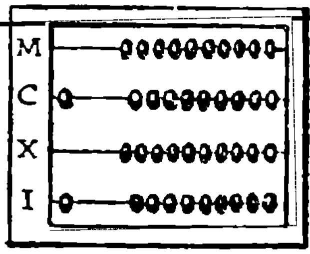
الجواب MI = ١٠٠١

لوحة العد



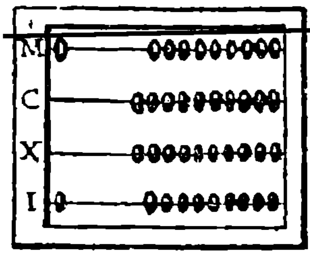
(أ)

٢ + ٩ = ١٠ + ١
اجمع الاحاد وضع ١
في الصف X
عن كل ١٠ تلقى بها
من الصف I



(ب)

٦٠ + ٣٠ + ١٠ + ١ = ١٠١
اجمع العشرات وضع ١
في الصف C
عن كل ١٠ تلقى بها
من الصف X



(ج)

١٠٠ + ٨٠٠ + ١٠٠ + ١ = ١٠٠١
اجمع المئات وضع ١
في الصف M
عن كل ١٠ تلقى بها
من الصف C

شكل (٦)

جمع ١٣٩ إلى ٨٦٢ على إطار العد .

هذا الاعتبار أبعد ما يمكن عن أرق الرياضيين الإغريقيين القدامى . فالصور الكتابية القديمة للأعداد لم تكن إلا وسائل لتدوين نتائج العمليات التى تجرى على العداد ، بدلا من إجرائها بالقلم على الورق / ولم يحدث فى تاريخ الرياضة أن أخذت خطوة انقلابية أجرأ من تلك التى أخذها الهندوس عندما اخترعوا الرمز « ٠ » دلالة على العمود الخالى فى العداد . وسترى بوضوح فى الباب السابع السبب فى أهمية هذه الخطوة وكيف أنها أدت إلى إمكان تبسيط قواعد الحساب . و يمكننا هنا أن نلاحظ شيئين عن اكتشاف «الصفر» ، الأول هو أنه إذا أخذنا ١٠ أساسا للعدية احتجنا إلى تسعة أعداد أخرى للتعبير عن أى عدد مهما كان كبيراً . وعلى ذلك لا تتقيد قدرتنا على التعبير عن الأعداد بعدد الحروف فى الأبجدية . كما أننا لا نحتاج إلى إدخال رمز جديد كلما ضربنا فى عشرة مثل M, C, X فى الرومانيـة / والشيء الثانى الهام عن «الصفر» قد يمكنك إدراكه إذا نظرت إلى الشكل رقم ٦ . فإن هذه الإضافة الهندوسية الحديثة إلى قاموس الأعداد تسمح لنا بإجراء عملية الجمع على الورق كما نقوم بها على العداد تماما / وسنترك الآن البحث فى كيف تم هذا الاختراع وفى مدى تأثيره على التاريخ التالى للرياضة / والشيء الأساسى الذى يجب أن ندركه هو أن رياضي العصور القديمة ورثوا ثقافة اجتماعيـة مزودة بكتابة عددية قبل شعورهم بالحاجة إلى إجراء عمليات حسابية شاقة / ولذلك كانوا يعتمدون اعتماداً كليا على معونات آلية أصبح استعمالها الآن مقصوراً على الأطفال الصغار .

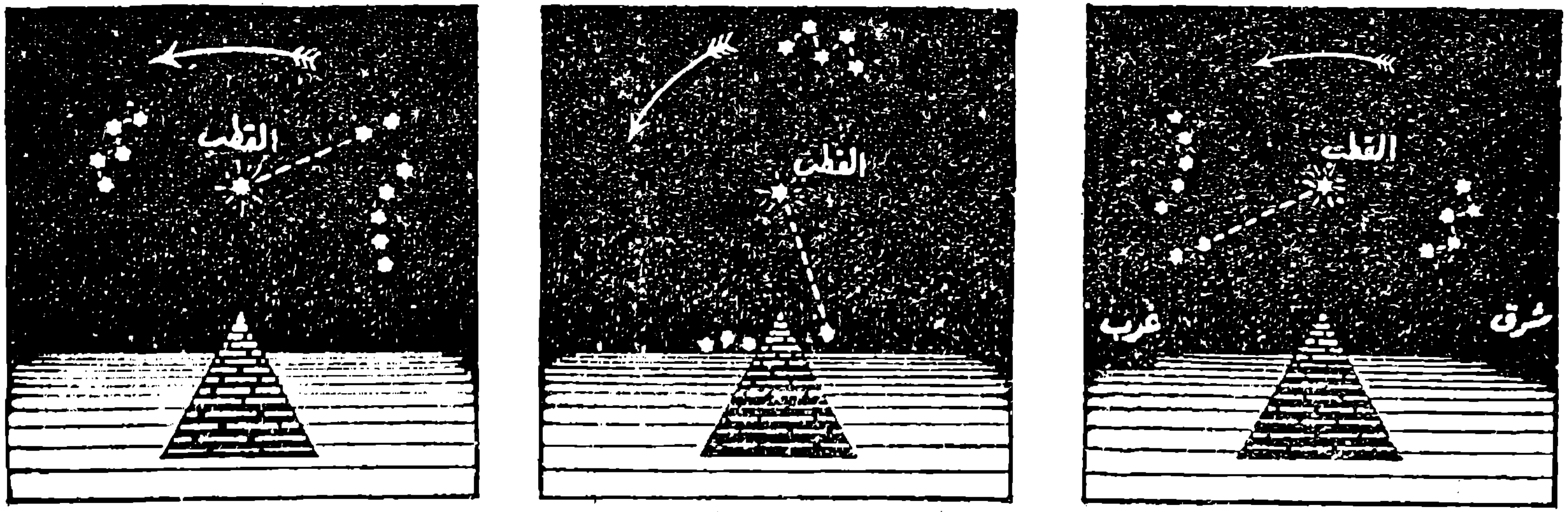
– ومن المألوف التمييز بين طريقتين لاستعمال الأعداد ، فهناك أعداد بصورة خاصة للدلالة على عدد الأفراد الداخلة فى تكوين مجموعة ، وأعداد بصورة أخرى للدلالة على وضع حادثة معينة فى سلسلة منها . وهذا التمييز أقل أهمية من تمييز آخر نتج عن المحاولات الأولى لتسجيل مرور الزمن . فعندما نقول إن القطيع يحوى ١٠٠ رأس فإننا نعنى نفس الشيء كما لو قلنا إنه عند ترتيب القطيع فى صف واحد فإن آخر الأغنام يكون ترتيبه المائة / وعندما سجلت الفصول على عصى العد إمتدت على أفق التجارب فى المراحل الأولى للثقافة البشرية كما تصطف الأغنام فى صف واحد / ونحن نعتبر كل رأس من الغنم مساوية لكل من الأخريات عند عد الأغنام وكل ما نعنيه بذلك عندئذ هى أن كل رأس وصفياً من نفس النوع كالرؤوس الأخرى / أما من الناحية الكمية فتختلف كل واحدة عن الأخريات فى إرتفاعها ووزنها وحجمها وعدد الشعرات فى فروتها / ولم يكن أساس التقاويم الأولى قياس الوقت على فترات

متساوية/ فقد كانت تسجل الترتيب التتابعى للحوادث المتميزة عن بعضها تمييزاً واضحاً بواسطة الظواهر الطبيعية/ فاليوم ينفصله عن اليوم التالى له قدر مختلف من الظلام كما يفصل الشاة عن زميلاتها من حجم آخر قدر مختلف من الهواء الطلق .

– وكل ما يقال عن إستعمال الأعداد لتمثيل مقدار مجموعة من الأفراد يمكن ترتيبها فى صف واحد ينطبق تماما على استعمال الأرقام لبيان ترتيب حادثة أو شىء فى سلسلة من الحوادث أو الأشياء الطبيعية أو الصناعية . ويمكننا ترتيب مجموعة من ثمان وعشرين من العصى المختلفة الأحجام ترتيباً متدرجاً فى الكبر أو فى الصغر دون أن نعلم طول كل منها بحسب التقسيمات على مسطرة مدرجة/ كذلك الرجل البدائى يمكنه حساب سن معينة بحلول الفصل الرابع عشر من فصول الجفاف دون التحقق من أن الفترات بين فصول الجفاف متساوية فعلا/ وليس هناك فارق كبير بين استعمال العدد عندما نقول إن هناك سبعة أغنام فى الحقل وعندما نقول إن يوم السبت هو سابع أيام الأسبوع . وهناك فرق كبير جد فى طريقة استعمال الأعداد عندما نقول إن السنة تحتوى على ٣٦٥ يوما واليوم يحتوى على ٢٤ ساعة . فعندما بدأ الناس يقسمون اليوم حسب موقع ظل الشمس بدأوا فى استعمال الأعداد القديمة بأسلوب جديد . فالساعة لا يفصلها عن ساعة تالية أى حادث طبيعى مثل المدة المطيرة التى تفصل بين فصلى جفاف أو مثل تتابع أوجه القمر المختلفة بين بدرين . فالساعات والدقائق لا تدل إلا على تقسيمات مناظرة على مقياس معين يمكننا استعماله بدقة كبيرة أو صغيرة حسب العناية بتدريج القياس وقراءة المؤشر وهو إما الزاوية التى يعملها الظل أو موعد سقوط آخر حبيبة من الرمل من الساعة الرملية أو موضع عقارب الساعة .

٣ – فى أى اتجاه تقع ؟

لقد نبتت الحاجة إلى القياس الدقيق من ممارسة قياس الوقت التى كانت سابقة ضرورية لحياة الاستقرار فى المدينة . فمن المؤكد أن الإنسان بدأ يقيس الزوايا قبل اهتمامه جديا بقياس الأطوال بزمن طويل . فمنـــذ بدأت حياة الاستقرار فى مدن ضفاف النيل حدد القوم عدد الأيام فى السنة بواسطة الشروق الاحتراقى للشعرى . إذ أن مراقبة شروق نجم معين أو مجموعة خاصة من النجوم تتضمن معرفة النقطة من الأفق التى سوف يظهر عندها ، وهناك ما يكفى من الأدلة لإثبات أن الرجل فى العصر



الدب الأكبر يشرق
وزات الكرسى تغرب

ذات الكرسى تقترب من المعبر الأعلى
والدب الأكبر فى معبره الأسفل

الدب الأكبر يغرب
وزات الكرسى تشرق

شكل (٧)

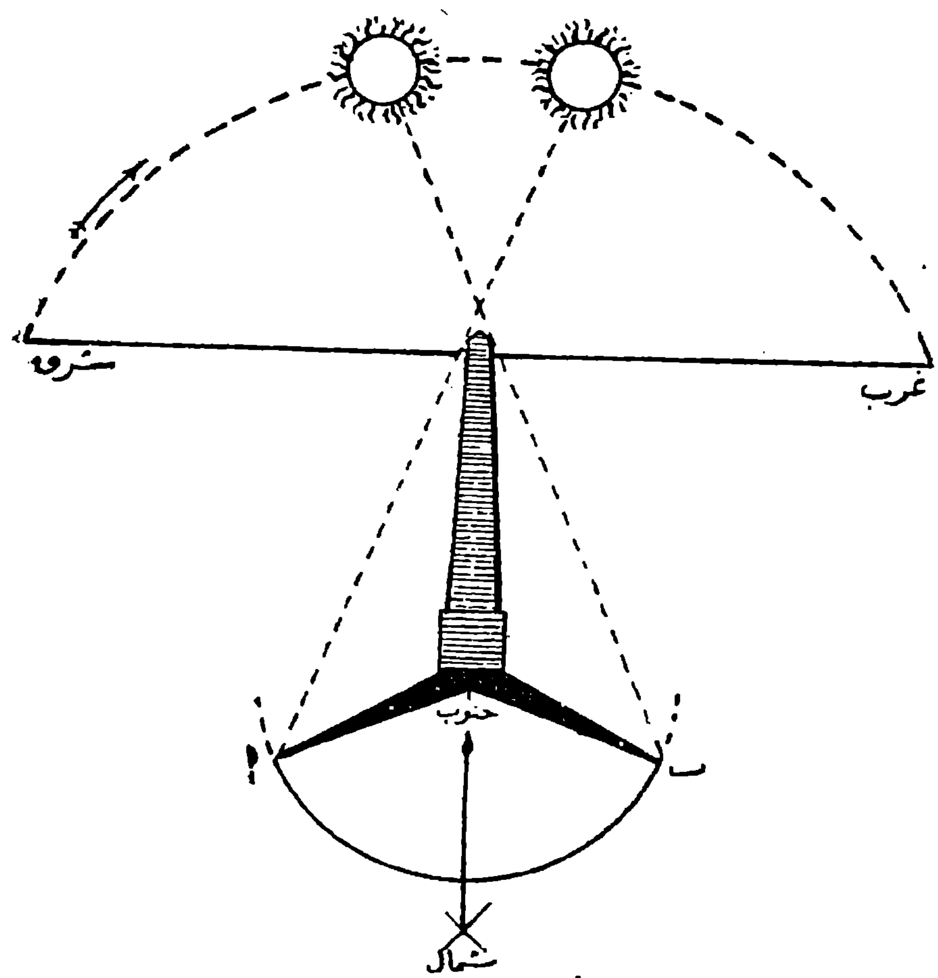
الدوران الليلى للنجوم

منظر تخطيطى للسماء كما نراها من الأهرام فى يومنا هذا فى أواخر الصيف . والمجموعتان المبينتان لا تغربان تحت الأفق لقربهما الشديد من القطب . وبعد ذلك بستة أشهر ترى مجموعة ذات الكرسى هابطة بعد غروب الشمس صاعدة قبيل شروقها .

« النيوليثى » تعلم كيف يقيم نصبا غير متقنة لتعيين اتجاهات بعض الظواهر السماوية وذلك قبل أن ينشىء الإنسان مدنا من نوع دامت بقاياه لتدل عليه . ولتعيين الاتجاه الذى سوف يظهر عنده على الأفق شىء معين يجب أن نقوم بعملية الملاحظة من نقطة ثابتة وأن يكون فى وسعنا أن نسند إلى مستقيم ثابت . وهناك محوران أساسيان للإسناد ، أحدهما خط الزوال الواصل من الشمال إلى الجنوب مارا بالنقطة والآخر خط عمودى عليه من النقطة ويصل الشرق بالغرب . ويحتمل أن يكون هذان الخطان قد استعملا قبل ظهور الحضارات التى استعملت التقاويم . واكتشافهما كان أول مشكلة رياضية فى الخبرة الاجتماعية للإنسان .

ـ واختير خط الزوال الواصل من الشمال إلى الجنوب على أساس موضع ظل الشمس فى أقصر حالاته فى منتصف النهار . وهذا الخط يشير دائما إلى موضع فى السماء تدور حوله النجوم أثناء الليل . وفى العصر الذى بنيت فيه الأهرامات كان هناك نجم لامع فى مجموعة « التنين » يدور حول هذا الموضع فى دائرة صغيرة (ثلاث درجات) . ومواضع التجمعات النجمية تتغير على مر القرون ، والقطب السماوى فى عصرنا هذا يعينه النجم القطبى الذى يبعد عنه بمقدار درجة واحدة فقط . وقد سجل القدامى الطريقة التى كانوا يستعملونها للتحديد الدقيق لموضع الظل وقت الظهر . فقد كانوا يقيمون أعمدة أو مسلات تقوم مقام الساعات العامة وكانوا يرسمون حولها دائرة بواسطة حبل على الرمال أو الأرض اللينة المحيطة بها . ثم توضع علامة عند كل من النقطتين على محيط الدائرة التين عندهما يصل الظل إلى المحيط فقط ولا يتعداه . ثم تنصف الزاوية التى رأسها قاعدة العمود أو المسلة ويمر ضلعاها بهاتين النقطتين ، ويحتمل أن يكون هذا التنصيف بدأ بمد حبل بين النقطتين وطيه نصفين ثم تطور بعد ذلك إلى رسم قوسين من دائرتين متساويتين حول النقطتين (شكل ٨) .

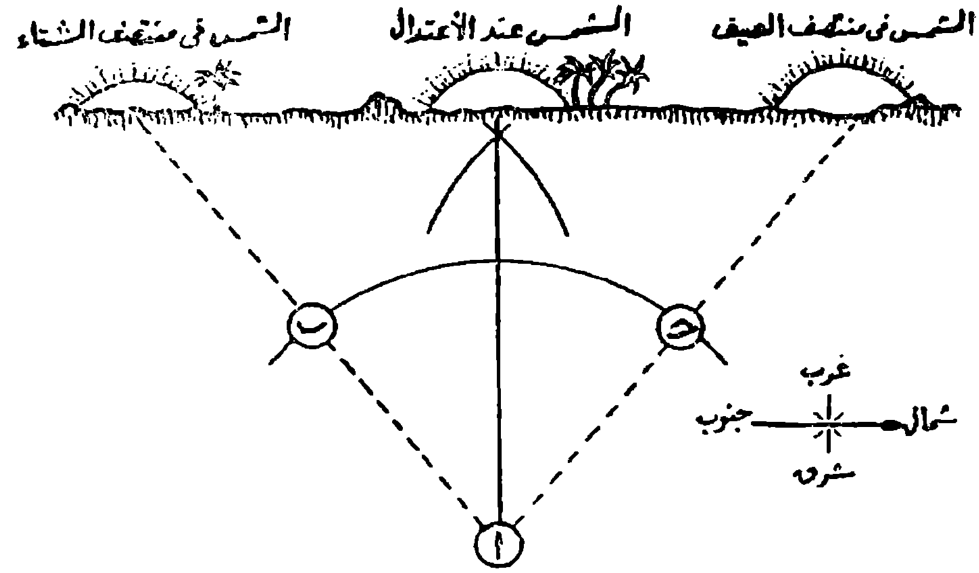
ـ ومعرفة خط زوال الشرق والغرب أو خط الاعتدالين اعترضتها صعوبة مماثلة ، وتوجيه مواقع دفن الموتى يدل على أنها هى الأخرى سبقت حياة المدن . ولقد تعودنا أن نعلم أن الشمس تشرق من الشرق وتختفى فى الغرب لدرجة أن كثيراً منا لا يفطنون إلى أنها لا تعمل ذلك فعلا إلا فى يومين اثنين من العام ـــ الاعتدالين الربيعى والخريفى عندما يتساوى الليل بالنهار . أما فى أثناء شتائنا فهى تطلع من جنوب



شكل (٨)

تعيين خط زوال للشمال الجنوب

الشرق وتختفى فى جنوب الغرب ، وفى الصيف تطلع من شمال الشرق وتختفى فى شمال الغرب/ والاحتفال العظيم بالخصوبة فى الاعتدال الربيعى تحدد له اليوم الذى فيه تشرق الشمس وتغرب فى منتصف المسافة بين الوضعين المتطرفين اللذين تشغلهما فى الانقلابين الشتوى والصيفى . والنصب القديمة مثل « ستونهنج » ، وبقايا ثقافة تقويم « المايا » تبين كيف أن موضع الشمس وقت الشروق أو الغروب فى الاعتدالين كان يتعين بتنصيف الزاوية المبينة فى شكل (٩) . أو يحتمل أنه كان يتعين برسم مستقيم عمودى على خط زوال الشمال والجنوب .



شكل (٩)

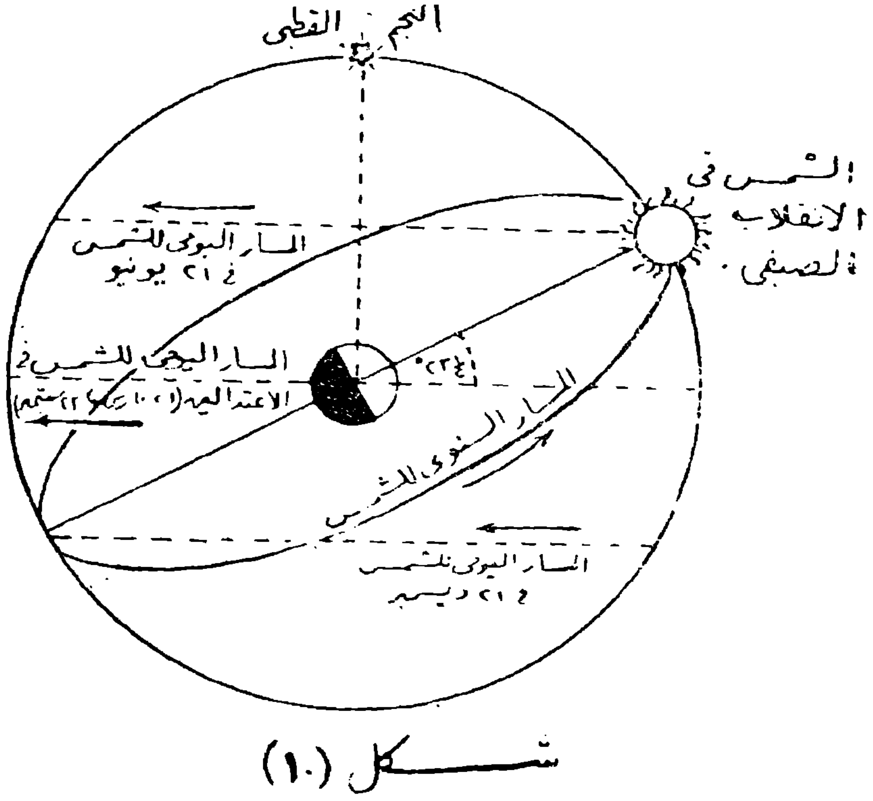
تعيين الاعتدال

توحى بعض النصب التقويمية المبكرة بأن الاعتدال كان يتعين بمشاهدات عن شروق الشمس وغروبها فى الانقلابين (٢١ ديسمبر و٢١ يونية) عندما تشرق الشمس وتغرب فى وضعيها الاكثر تطرفا نحو الجنوب والشمال على الترتيب / والنقطتان ا ، ب فى الشكل قطبان موضوعان على استقامة الشمس فى غروبها فى الانقلاب الشتوى / البعد بين ٢ ، حـ على استقامة الشمس فى غروبها فى الانقلاب الصيفى كالبعد بين ا ، ب ٠وفى منتصف رحلتها بين الطرفين المتناقضين تشرق الشمس من الشرق تماما وتغرب فى الغرب تماما ويتساوى طولا النهار والليل / ولذلك يسمى هذان اليومان (٢١ مارس و٢٣ سبتمبر) بالاعتدالين / فقد كانا فى الطقوس القديمة من الايام الكبيرة الاهمية . ويمكن الحصول على نقطتى الشرق والغرب عن الافق بتنصيف الزاوية ب ا حـ

وقبل أن يحل العهد الذى وصلت إلينا منه دلائل مكتوبة عما تمكن العالم القديم من عمله ، بزمن طويل ، كان القساوسة قد ألفوا الاتجاهات المضبوطة للنجوم عند وصولها إلى أقصى ارتفاعاتها (عبور أو اجتياز) فوق الأفق . فالوجه الجنوبى للهرم الأكبر كان مبنياً قبل الميلاد بحوالى ٢٨٠٠ سنة فى وضع يجعل أشعة « الشعرى » تقع عليه عمودياً أثناء عبورها . وقد كان أحد آبار التهوية الواصل إلى المخدع الملكى

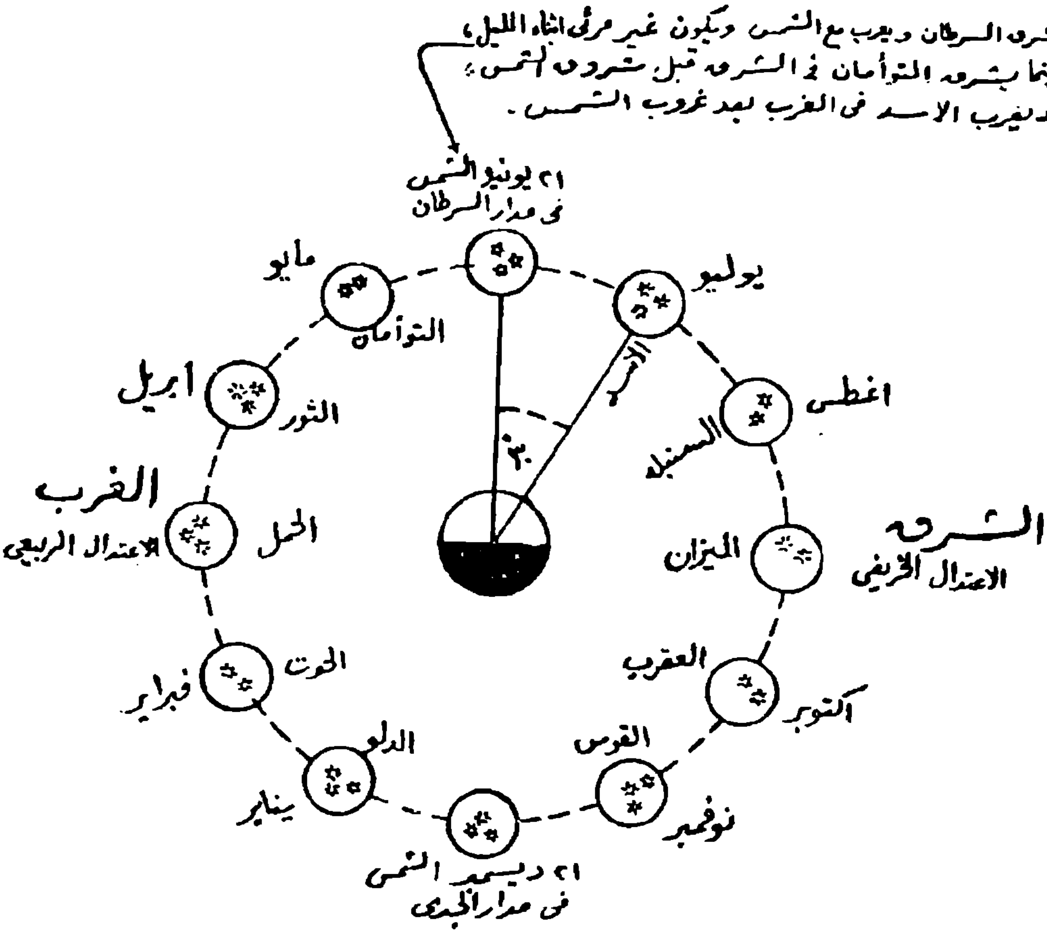
فى وضع يسمح لنجم « الكلب » أن يضىء فرعون الميت عند عبوره خط الزوال . فى حين أن الفتحة الرئيسية وبئراً آخر كان يدخل منهما ضوء النجم القطبى « التنين » عند عبوره المنخفض . والدقة المدهشة لهذه الأعمال الإنشائية كانت ثمرة تسجيل ملاحظات لعدة قرون ، وما زالت وسائل تسجيل الاتجاه الذى يقع فيه شىء معين تحمل أثر الحقيقة المادية التى منها استمد قياس الزاوية أصوله .

- وقد اعتقد الكهنة القدماء أن الكرة السماوية بأكملها تدور حول محور يمر بالقطب السماوى . وأن الشمس والقمر والكواكب والنجوم تدور حول هذا المحور فى دوائر متوازية . وأن القمر ينزلق فى كل يوم على الكرة السماوية قليلا إلى الوراء بحيث يتأخر فى الشروق وفى الغروب وهو آخذ فى الزيادة والنقصان وأن الشمس تنزلق فى كل يوم بميل على الكرة السماوية قليلا إلى الوراء ولذلك تبكر نفس المجموعة من النجوم ليلة بعد أخرى ، ولا ترى بعض النجوم فى الفصول التى تكون فيها الشمس فى نفس الموضع من السماء . ومسلك الشمس المائل خلال منطقة البروج يفسر السبب فى ارتفاعها فى السماء وقت الظهر فى بعض الفصول عنها فى الفصول الأخرى . ويستلزم



شكل (١٠)

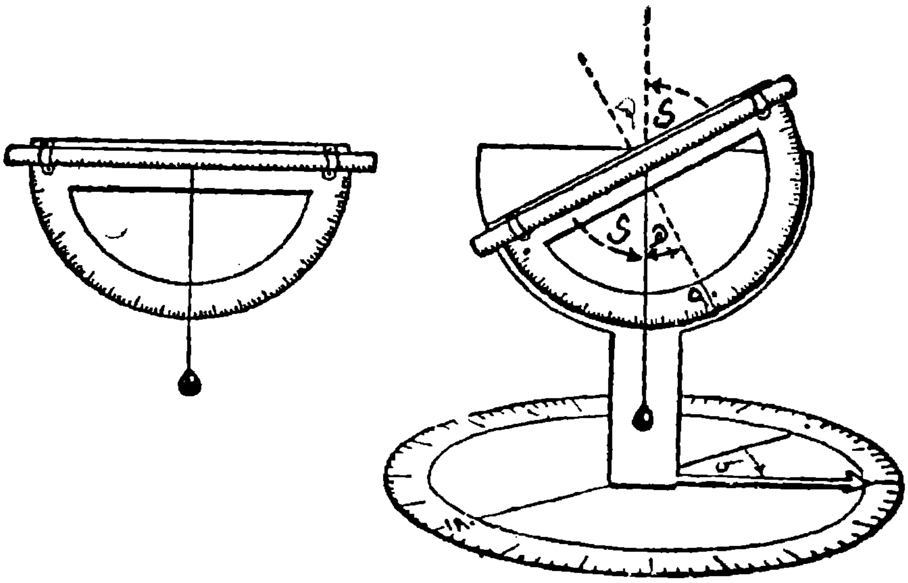
الحركة السنوية (الظاهرية) للشمس فى الكرة السماوية



شكل (١١)

التقهقر السنوى (الظاهرى) للشمس خلال مجموعات البرج

حساب طول السنة قياسا دقيقا ولذلك ليس مستغربا أن تكون التقديرات الأولى أقل جودة مما جاء بعدها / فالسنة عند البابليين كانت ٣٦٠ يوما ، والسنة المصرية لابد أنها كانت أيضا تعتبر ٣٦٠ يوما فى وقت من الأوقات لأن السنة المصرية الآن تتكون من ١٢ شهراً كل منها ٣٠ يوما يضاف إليها خمسة أيام أعياد . وبناء على ذلك فإن المسلك الدائرى للشمس فى منطقة مدارها فى الكرة السماوية قد قسم فى الخرائط إلى ٣٦٠ خطوة كل منها تناظر يوما وليلة/ وليس هناك أدنى شك فى أن الدرجة تستمد أصلها من هذه الـ ٣٦٠ قسما الطبيعية لرحلة الشمس فى الزاوية الكلية التى ترسمها فى دورة كاملة (شكل ١١) . ومنذ ألفى سنة قبل المسيح عرف كهنة منطقة البحر المتوسط



شكل (١٢)

المزواة البسيطة أو الاسترولاب المستخدم لقياس الزاوية التى يعملها نجم (أو أى شىء آخر) مع الافق (زاوية الارتفاع) ، أو مع الرأسى (البعد السمتى) يمكن عملها بتثبيت أنبوبة معدنية موازية تماما القاعدة منقلة سبورة الممكن شراؤها من أى متعهد تعليمى واربط فى مركز المنقلة خيطا فى طرفه الآخر ثقل (مثلا قطعة من المعدن يمكنك الحصول عليها مجانا من أى عامل فى مطبعة اذا طلبتها منه بلطف) ليصير كخيط المطمار . فتكون القراءة أمام الخيط عند رؤية الشىء هى بعد سمته (ى) ، وزاوية ارتفاعه (هـ) هى ٩٠° - ى / فاذا ثبت المنقلة على حامل خشبى رأسى بحيث تتحرك بحرية عليه وكان الحامل يدور بحرية فى مركز قاعدة عليها تدريج دائرى (يمكن عمله بتثبيت منقلتين عليه) ثم ثبت مؤشرا فى نفس مستوى الانبوبة أمكنك قياس السمت (س) أو اتجاه نجم أو شىء آخر (مثل غروب الشمس) عن خط زوال الشمال الجنوب / ولعمل ذلك ثبت المقياس بحيث تكون القراءة ٠° عند توجيه الانبوبة نحو شمس الظهيرة أو النجم القطبى / وهذا النوع من الآلة كان مستخدما لايجاد خط العرض وخط الطول فى عصر الرحلات البحرية العظيمة . ويمكنك استعماله فى ايجاد خط عرض وخط طول منزلك (الباب الرابع) أو فى عمل دراسة حربية لمنطقتك (الباب الرابع والسادس)

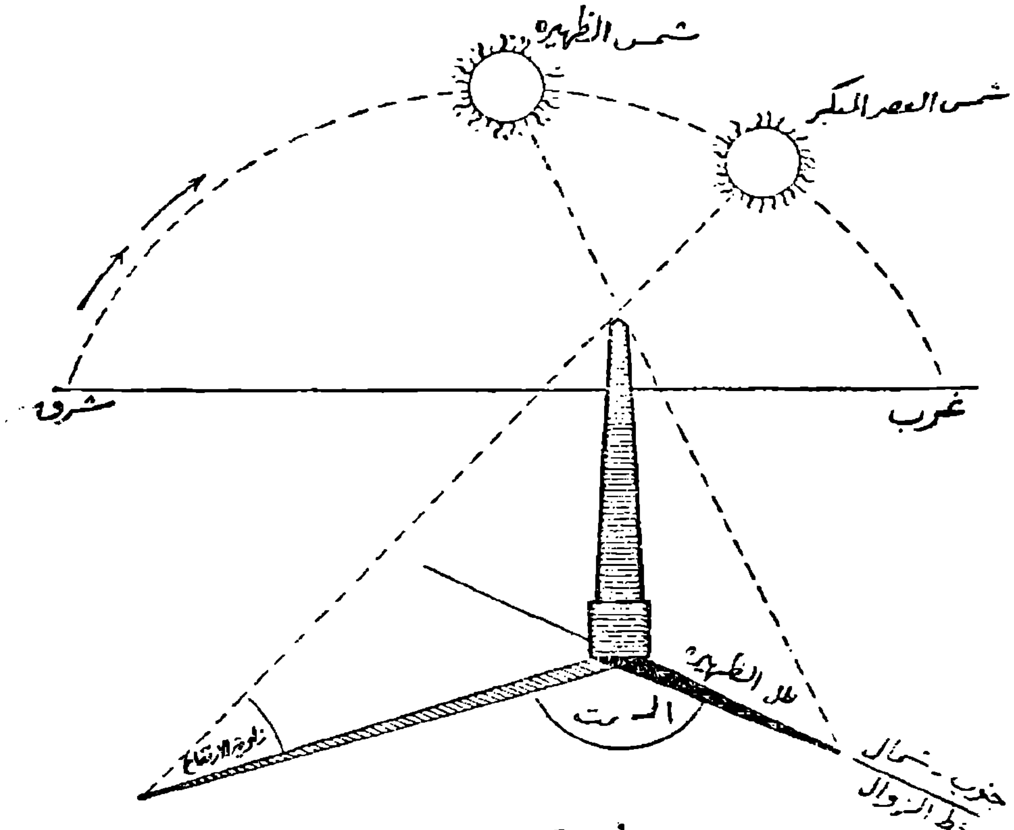
الزاوية التي يصنعها مدار الشمس المائل (شكل ٥ ، ١٠) مع دائرة الاعتدالين (وميل الدائرة الكسوفية) بدقة تتناول كسر الدرجة . وتدل مخلفات البابليين أنهم كانوا يستخدمون آلات تشبه جوهريا الاسترولاب (شكل ١٢) أو مزواة بدائية وقد ظل مستعملا حتى اخترع المرقب . وبواسطة هذه الآلات قاموا برسم خرائط لأجزاء محلية من السماء ، ودوائر الارتفاع والسمت .

— والآن يتضح السبب فى أن قياس الاتجاه قد استخدم الأعداد استخداما جديداً . فقد ابتدعت الأعداد لوصف أشياء منفصلة ، وقد لاءمت هذه الأشياء تماما ، ولكن هذا غير صحيح مطلقا بالنسبة للقياس . فمهما اجتهدت فى محاولة تقسيم محيط الدائرة إلى ٣٦٠ قسما متساوياً فلن تكون الأقسام متساوية فعلا . بل ستكون الأقسام قريبة من التساوى بقدر ماتسمح لك الآلات بجعلها متساوية . كذلك لن يطابق الاتجاه أحد الأقسام المبينة حتى إذا استعملت أقصى ما يمكنك من الدقة الاسترولاب أو آلة السدس بالصورة القديمة ، أو آلة السدس الحديثة المزودة بمرقب وورنية . فتضطر إلى قياس الاتجاه بأقرب الأقسام إليه . وهذه التعقيدات قائمة أيضا بالنسبة إلى جميع الأمور الأخرى على صورة ما .

٤ — إلى أى مدى تمتد ؟

لقد شيد الإنسان فنادق لزواره من السماء وممثليهم على سطح الأرض قبل أن تهديه فطنته إلى التفكير فى بناء منزل مناسب لسكناه بزمن طويل . وبناء نصب التقاويم لرصد اتجاهات الإجرام السماوية وتشييد المدافن للرفات المحنطة لفرعون ابن السماء استدعت عمل أقيسة دقيقة للمسافات ، وقد بنى هرما خوفو وسنفرو بالجيزة على أساس هندسى واحد وهو المشروح فى الأسطورة فى شكل ٥ ا مع تعليق من بترى . ويتميز معمار المعابد بدقة فى التشييد ترتبط مع وظيفتها الاجتماعية الجوهرية . فلكونها بنيت لاستقبال ضيوفهم من السماء وجب أن تحدد اتجاهات هذه النصب القديمة تحديداً دقيقاً ، كالمشاهد فى ترتيب آبار التهوية فى هرم الجيزة الأكبر . وقد قنع الإنسان عدة آلاف من السنين باستعمال وحدات أطوال عضوية بحتة غير دقيقة لمعظم الأغراض العملية . فقد استخدمت الشعوب السامية « الذراع » أو المسافة بين المرفق وطرف الأصبع الوسطى ، كما يستعمل المزارعون حتى الآن أرجلهم لقياس حقل بالخطوات « بالأقدام » أو الياردات . وقد قنعوا فى الأغراض العادية بوحدة

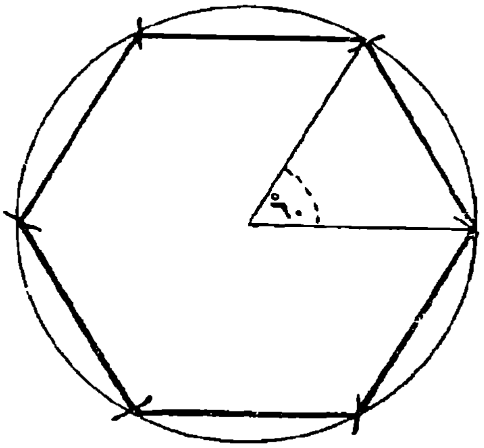
طول تختلف عن فرد لآخر . أما معمار المعابد فقد استدعى درجة من الدقة أعلى من ذلك بكثير ، وكان أساسها فن حساب الظلال الذى نشأ فى البلاد ذات الشمس المشرقة التى نشأت فيها الحضارة وقد ضاع هذا الفن من زمن بعيد . فكانت الارتفاعات تحسب بمعرفة طول الظل وزاوية إرتفاع الشمس فوق الأفق ، ويتوقف حساب الارتفاعات بهذه الطريقة على حقائق بسيطة خاصة عن العلاقات بين أطوال أضلاع المثلث .



شكل (١٣)

يمكن تحديد اتجاه جرم سماوى بواسطة زاويتين / الزاوية التى يصنعها مع الافقى أو الرأسى (زاوية الارتفاع أو بعد السمت) والزاوية التى يصنعها مع خط الزوال (السمت) .

وكانت الاكتشافات الرياضية المبكرة تابعة لهذا النوع من المسائل . فقد عرف البابليون من قديم الزمان كيفية رسم زاوية قدرها ٦٠° برسم شكل ذى ستة أضلاع متساوية (مسدس) داخل دائرة (شكل ١٤) . وإننا لنجد فى جميع أنحاء العالم القديم وصفة بسيطة جداً لرسم زاوية قدرها ٩٠° تتوقف على الحقيقة المعلومة أن المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ ، ٤ ، ٥ من وحدات الطول يكون قائم الزاوية . وتخبرنا



شكل (١٤)

مسدس منتظم (شكل ذو ستة أضلاع متساوية الطول) مرسوم داخل دائرة بتقسيم محيطها بأقواس بنفس نصف قطرها .

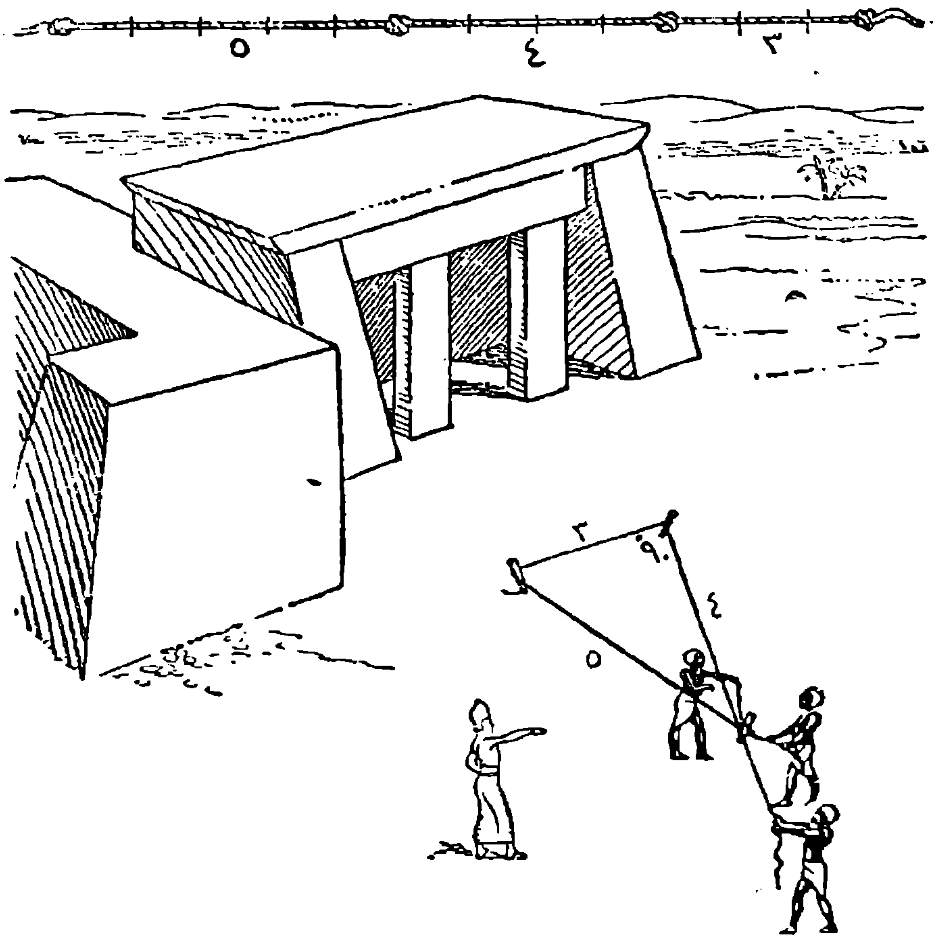
إحدى الأساطير أن المهاريين من الكهنة المصريين كانوا يرسمون الزاوية القائمة بربط ثلاث قطع من الحبال أطوالها تتناسب مع ٣ : ٤ : ٥ كما فى شكل ١٥ . وعند تثبيت العقد بأوتاد فى الأرض نحصل على مثلث قائم الزاوية . فقد اكتشف المصريون والبابليون منذ خمسة أو ستة آلاف سنة حالة واحدة على الأقل من قاعدة عامة عن أضلاع المثلث القائم الزاوية (أنظر شكل ١٦) . وتضع كتب الهندسة القاعدة فى الصورة الآتية : [المربع المنشأ على أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية (الوتر) يساوى مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين] . وعلى ذلك فإننا نحصل أيضاً على مثلث قائم الزاوية إذا ربطنا ثلاث قطع من الحبال مع بعضها أطوالها ٥ ، ١٢ ، ١٣ من الياردات ثم شددناها وثبتناها بأوتاد عند العقد كما فى شكل ١٥ . لأنه يتبين فى الحال أن

$$٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩$$

أى أن

$$٥^٢ + ١٢^٢ = ١٣^٢$$

واستعمال الدرجة أو الجزء من ثلاثمائة وستين جزءاً من الدائرة كوحدة لقياس الزوايا قد يساعدنا فى تفسير اكتشاف مبكر لحقيقة أخرى هامة . فقد عرف المصريون والبابليون أن محيط الدائرة يحمل دائماً نفس النسبة إلى قطرها . هذه النسبة التى نمثلها بالرمز ط هى بالتقريب $٣\frac{١}{٧}$ أو ٣,١٤١٦ لأقرب أربعة أرقام عشرية بطريقة



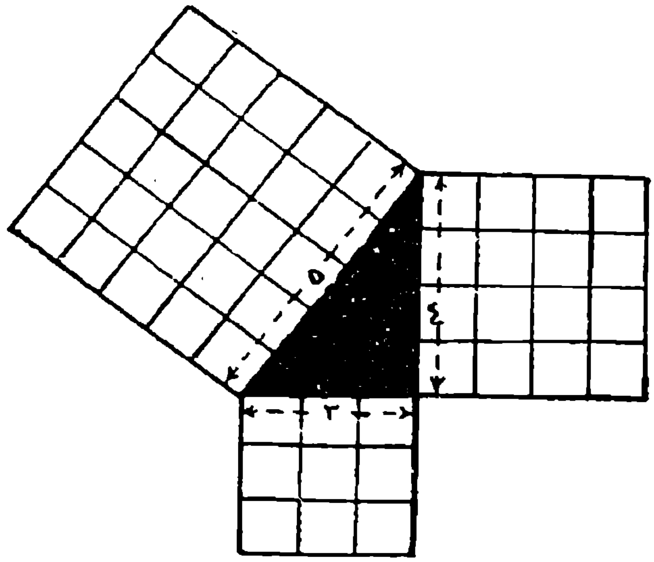
شـكل (١٥)

المثلث القائم الزاوية لمهندسى المعابد

كتابتنا الحالية . أما البابليون فقد استعملوا لها تقريباً غير دقيق واعتبروها ٣,٠ . فى حين أن المصريين استعملوا تقريباً أدق من ذلك . فقد وجد أن النسبة بين طول ضلع كل من أهرامات الجيزة إلى ارتفاعه تساوى ١١ : ٧ ، فتكون النسبة بين نصف محيط القاعدة إلى الارتفاع $٣\frac{١}{٧}$. وأوراق بردى أحمس (حوالى ١٦٠٠ قبل الميلاد) تعطى النسبة بين المحيط والقطر ٣,١٦ بطريقة كتابتنا الحالية . وهناك قانون فى ورق البردى المحفوظ فى موسكو لمساحة الكرة وفيه قيمة ط تساوى ٣,١٤ . فكأن الطريقة المصرية لحساب مساحة الدائرة كان الخطأ فيها لا يزيد على ١٪ .

وإن شدة قدم الوصفة البسيطة لعمل زاوية قدرها ٩٠° لتعطى دليلا على السبب

فى اختيار الساعة وحدة / فتقسيم يوم العمل باتجاه ظل الشمس إلى فترات لا تفصل بينها أشياء طبيعية يتوقف على اختيار زاوية مناسبة كوحدة لتدريج ساعة الظل (شكل ١٧) . فنى ظرف ساعة تدور الكرة السماوية (أو الأرض كما نقول الآن) حول محورها زاوية قدرها ٣٦٠ ÷ ٢٤ = ١٥° . وسنرى فى الباب الرابع أنه من بين جميع الزوايا الأقل من ٩٠° أسهلها فى الرسم الزوايا ٣٠° ، ٦٠° ، ٤٥° . ومتى أمكننا رسم إحدى هذه الزوايا استطعنا إيجاد كسورها بالتنصيف المتكرر . والزاوية الوحيدة من هذه الزوايا التى يمكن تقسيمها هكذا إلى درجات صحيحة هى الزاوية ٦٠° . إذ يمكن تنصيفها مرتين فنحصل على أربع زوايا متساوية كل منها ١٥° ، وهو القوس الذى تدوره الشمس حول محور الكرة السماوية فى ساعة .



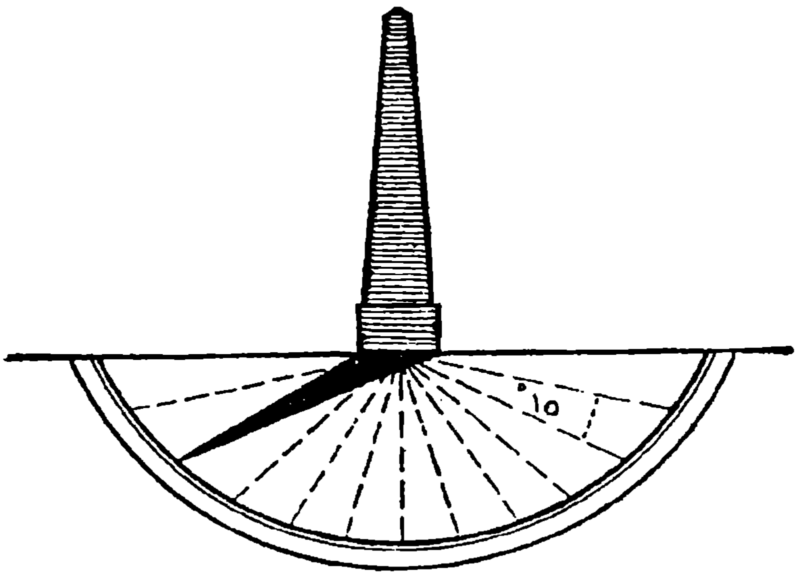
شكل (١٦)

المثلث القائم الزاوية لبناة المعابد

الضلع الطويل ٥ قدم	(٥^2 = ٢٥ قدما مربعة)
الضلعان القصيران ٤ قدم	(٤^2 = ١٦ قدما مربعة)
، ٣ قدم	(٣^2 = ٩ قدما مربعة)

٢٥ = ١٦ + ٩

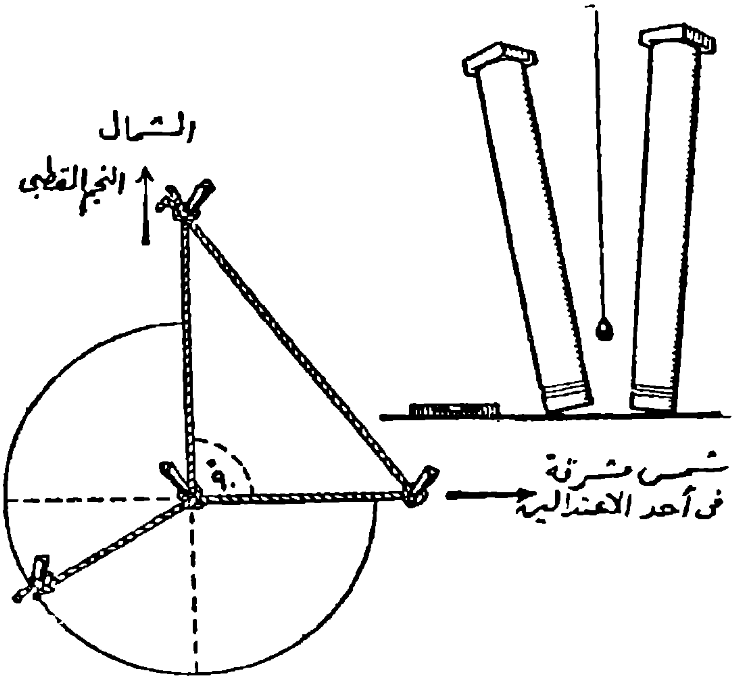
أو ٥^2 = ٤^2 + ٣^2



شكل (١٧)

ساعة الظل أو المسلة

وبتقدم فن البناء ازدادت أهمية الزاوية القائمة التى قيمتها ٩٠° وتتعين بواسطة خيط المطار وميزان الماء كقياس لمقدار الزاوية / وكان البناءون فى المدينة يقيسون الزاوية على اعتبارها كسرا من الزاوية القائمة بدلا من عدد معين من الدرجات (انظر شكل ١٨) . وعندما أصبح تشييد المعابد هوسا استنفد موارد تلك الجماعات القديمة التى كانت واقعة تحت سلطان الكهنة تنازل الكهنة عن أعظم أعمالهم الثقافية وهو قياس الزاوية لطبقة الصناع من عبيد ومعتوقين / ولم تترك هذه الطبقة من الرعية ما يسجل معلوماتهم عن القياس المعمارى سوى الوصول بما عملوه إلى الكمال الهندسى . والسبب الوحيد الذى يجعلنا نتكلم عادة عن الإغريق على أنهم الرياضيون الأول هو أن المصريين لم يتركوا كتابات تنبىء عن كيفية وصولهم إلى ما لا يزال يعتبر من أعجب أعمال القياس فى تاريخ الجنس البشرى . وتدل القطع الباقية مثل قراطيس « الرايند » التى تركها الكاتب أحمس على أن الحساب عندهم كان فى مستواه عند الإغريق الذين جاءوا على أعقابهم . والسبب فى تركهم كتابات قليلة هو أن الطبقة غير الأمية لم تكن تميل إلى إذاعة أسرارها الكهنوتية ، ولم تكن طبقة المحترفين من مساحين ومهندسين ومعماريين وفلاحين من الكتبة وإنما تداولوا معلوماتهم بالطريق الشفوى / وقد أدى تحديد التعلم على أساس الطبقات فى العصور القديمة إلى فقدان كثير من المعلومات القيمة وضياعها .



شكل (١٨)

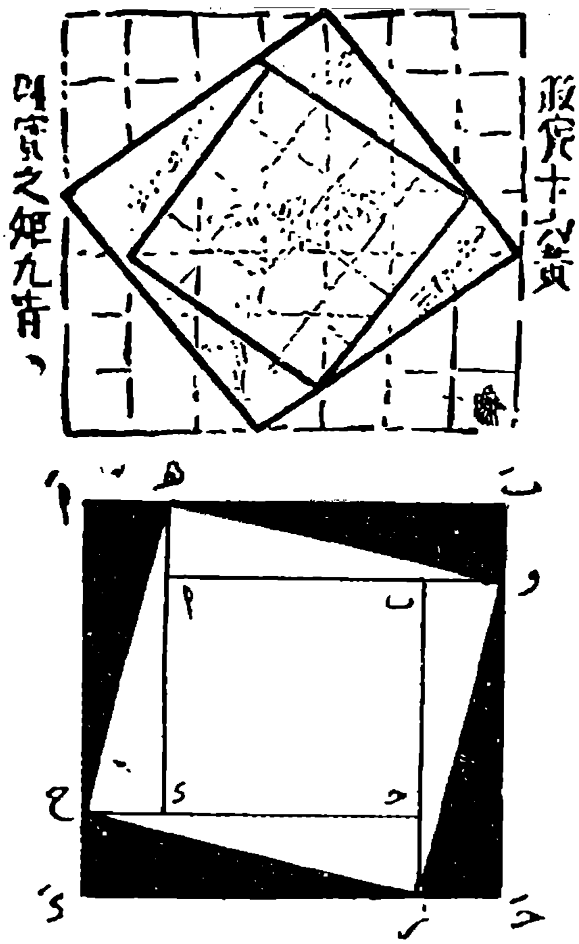
الزاوية فى المدينة

عند وضع المعبد بالنسبة الى النقط الاربعة الاصلية على دائرة الافق الكبرى وجد أن زاوية ربع السنة (¼ الـ ٣٦٠ = ٩٠) وزاوية المثلث القائم الزاوية متساويتان . كما أعطانا خيط المطمار وميزان الماء تعريف الزاوية القائمة كوحدة قياس مستقلة . فعامود المعبد يكون رأسيا عندما يتساوى ميلاه على خط الافق من الجانبين كخيط المطمار . والزاوية القائمة هى أيضا الزاوية التى يصنعها خيط المطمار مع الافق .

---

٥ — ما مقدار الحيز المسطح الذى تضمه ؟

نشأ فى مصر نظام للضريبة على الأرض نتيجة لاستغلال طائفة الحكام للمزارعين بأمرهم بتشييد المعابد والمدافن الشاسعة . ويخبرنا هيرودوت أن النيل كان يطغى دائما على الأرض مكتسحا معالمها فتقوم لذلك منازعات حول الضرائب المستحقة وحق الملكية . وقد نشأت عن ذلك مهنة المساحة . وبجانب مهنة المساحة اهتم المصريون اهتماما شديداً بمشروعات الرى وخصوصا فيما يتعلق بالتنبؤ عن حالة فيضان النهر المقدس . وهنا أيضا يتمكن الكهنوت من زيادة قوته بالإفصاح عن أسرار هذه القوة . وقد



شكل (١٩)

تعزو الروايات الشفوية كتاب شوبى سوان كنج المحتملة كتابته حوالى سنة ٤٠ ميلادية ، الى أصل سابق لتعليم علماء الهندسة الاغريق ما نسميه بنظرية فيثاغورس ، أى أن المربع على أطول أضلاع المثلث القائم الزاوية يساوى مجموع المربعين على ضلعيه الآخرين . وهذا المثال المبكر جدا للطباعة بالقوالب من طبعة قديمة للشوبى نقلا عن « تاريخ الرياضة » تأليف سميث يوضح صحة النظرية . فاذا أخذنا مثلثا قائم الزاوية مثل المثلث الاسود هـ و بَ بالشكل ثلاثة مثلثات أخرى قائمة الزاوية مثله تماما يمكن تكوين مربع . ثم رسمنا أربعة مستطيلات مثل هـ ا بَ كل منها مكون من مثلثين مثل هـ و بَ أمكننا . بعد قراءة الباب الرابع ، تركيب اللغز الصينى الذى يقل كثيرا فى غموضه عن اقليدس . وهاك الخطوات :

المثلث هـ و بَ = ½ المستطيل هـ ا و بَ = ½ (بَ و . هـ بَ)

المربع اَ بَ حَ ءَ = المربع هـ و ز ح + ٤ أمثال المثلث هـ و بَ

= هـ و^{٢} + ٢ (بَ و . هـ بَ)

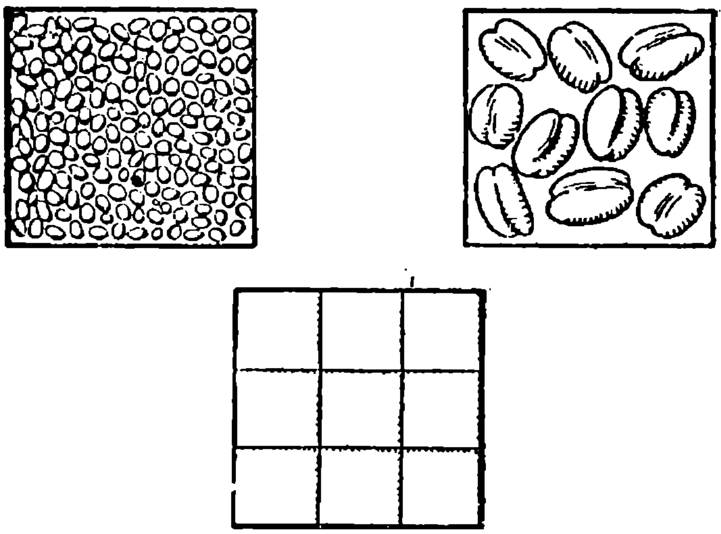
كذلك المربع اَ بَ حَ ءَ = بَ و^{٢} + هـ بَ^{٢} + ٢ بَ و . هـ بَ

∴ هـ و^{٢} + ٢ بَ و . هـ بَ = بَ و^{٢} + هـ بَ^{٢} + ٢ بَ و . هـ بَ

∴ هـ و^{٢} = بَ و^{٢} + هـ بَ^{٢}

أكمل فن المسح المصرى قياس الزاوية بقياس المساحة ، ولا نعرف بالضبط كيف اهتدى الناس إلى المربع كوحدة للمساحة ، ولو أنه توجد لذلك عدة تعليلات لا يكاد يفضل أحدها الآخرين / وأحد هذه التفسيرات أنها من وحى الطريقة المستخدمة لملء رقعة فى سلة عند إصلاحها ، وهى حرفة سبقت فن النسيج / وتعليل آخر أنها نشأت من استعمال قراميد الفسيفساء ، أو أنها من وحى الزخرفة الشطرنجية المستعملة فى فخار العصور البابلية المبكرة / وهناك ما يدعم افتراض أن أحد الاكتشافات الأولى عن المساحة نشأ عن الرسم على أرض مغطاة بقراميد مربعة . ويظهر أن شكل (١٩) وهو أحد الأمثلة الأولى للطباعة بالقوالب فى الصين ، مبنى على صورة الشكل من هذا النوع يوضح النظرية المسماة باسم فيثاغورس ولعل الصينيين كانوا يعرفونها من قبله / وقد عرف المصريون والبابليون كيفية إيجاد مساحة المثلث إذا علمت أضلاعه ، ومساحة الدائرة إذا علم نصف قطرها / وكانت طريقتهم فى إيجاد مساحة الدائرة مبنية على تقسيمها إلى شرائط صغيرة مثلثية تقريبا .

– وإن سؤالنا عن الحيز المسطح لحائط ما ليعادل سؤالنا عن عدد القراميد المربعة ، من حجم معين ، التى يمكن وضعها عليها إذا حول شكلها إلى شكل مناسب (شكل ٢٠) وسمك القراميد لا دخل له طبعا فى هذا الأمر ، والعدد المستعمل لقياس طول ما يخبرنا عن عدد المرات التى يمكننا فيها وضع مقياس خاص نسميه الوحدة على طول المسافة التى نقيسها ، فعمليات القياس التى نقوم بها لمعرفة عدد قوالب الطوب اللازم وضعها متلاصقة الأطراف لوضع أساس حائط (طول) ، أو لمعرفة عدد قوالب الطوب اللازم وضعها لتغطية أرضية حجرة (مساحة) ، أو لمعرفة عدد قوالب الطوب اللازم وضعها لملء فراغ (حجم) ، كلها متشابكة العلاقات متى استعملنا نوعا واحدا من قوالب الطوب فى الجميع . ولذلك فمن المهم جداً توضيح نوع الوحدة المستخدمة عند استعمال الأعداد فى هذا الصدد . فوحدة الحيز المسطح (السطح أو المساحة) مربع ضلعه أحد الأطوال المتفق عليها . ولا تكون الأطوال من نوع واحد ويمكن مقارنتها إلا إذا كان كل منها يساوى نفس الوحدة «كذا من المرات» . فلمقارنة خط طوله ٣ بوصات بخط طوله ٥ أقدام لابد من التعبير عن كل منهما بالبوصات (٣ ، ٦٠) أو بالأقدام (¼ ، ٥) أو استعمال قياس آخر مستقل (٧,٥ ، ١٥٠ سنتيمترا مثلا) . وبالمثل إذا أردنا مقارنة مساحات علينا أن نستعمل نفس مقياس الأطوال . فالمربع الذى طول ضلعه ١٠ بوصات يحتوى على ١٠٠ بوصة مربعة ومساحته أربعة أمثال مساحة مربع طول ضلعه ٥ بوصات ويحتوى على ٢٥ بوصة مربعة والمربع الذى طول ضلعه ١٠ بوصات جزء من ستة وثلاثين جزءاً من المربع الذى طول ضلعه ٥ أقدام .



شكل (٢٠)
الإنسان يتعلم قياس المساحات

كانت قيمة الارض فى البداية تحسب بكمية الشعير أو الارز الممكن زراعته فيها . والطبيعة لاتصنع جميع سيقان القمح أو جميع حبات الشعير متساوية، ولكن الانسان يمكنه عمل قراميد مربعة يمكن تركيبها مع بعضها لعمل رقع متقاربة الشكل لدرجة انه لايمكن تمييزها بالعين المجردة . فاذا عمل المربع من ن من القراميد (ن فى الشكل تساوى ٣) فى الصف الخارجى ، كان طول كل ضلع من أضلاعه يساوى ن من المرات طول ضلع احدى القراميد المربعة . فيكون عدد القراميد اللازمة لعمل المربع هى ن من الصفوف فى كل منها ن من القراميد . أى ن مرة ن من القراميد . ولهذا السبب فان ن مضروبة فى نفسها نسميها ن مربعة ، ونكتبها ن^{٢} . والقاعدة الاساسية للمساحة مبنية على الارضية المبلطة . والقاعدة هى أن ن^{٢} من وحدات المساحة تعطى مساحة مربع طول ضلعه ن من وحدات الطول .

---

٦ ـــ ما مقدار الحيز من الفراغ الذى تملؤه ؟

عندما كان التعامل قاصراً على المبادلة كانت الحبوب والنبيذ والزيت تقاس بالأوعية . وكان العرف الإجتماعى هو الذى يحدد شكلا وحجما ثابتين للأوعية المستعملة . ومازالت بقايا هذه الأوعية التقريبية تستخدم فى إنجلترا إلى الآن . فهناك مثلا وعاء

يسمى « رأس الخنزير » عبارة عن برميل كبير يختلف حجمه باختلاف نوع البيرة أو النبيذ المباع . ولم يتقدم النظام الإنجليزى إلا قليلا منذ العصر البرونزى . فالجالون والبينت (مكاييل) مازالت أكثر استعمالا من القدم المكعبة . ولما تقدمت التجارة فى طرق السومريين التجارية أصبح الاتفاق على مقياس مشترك لمقارنة الأوعية المختلفة الأحجام ضرورة اجتماعية . وقد يكون السومريون أول من استخدم الأحجام بعدد المكعبات التى أضلاعها مقاييس ثابتة والتى تلزم لملء حيز من الفراغ وذلك لأنهم كانوا يستعملون قوالب الطوب فى بنائهم .

٧ — ما مقدار ما تحتويه من المادة ؟

مازلنا للآن نقيس المواد الصلبة الممكن كبسها بشدة بالأحجام . فمثلا نقيس الدقيق والشعير بالكيلة . ومن البديهى أن مقياسا كهذا كان عديم القيمة للتجار الفينيقيين الأول الذين ترددوا على الشواطىء الإنجليزية للحصول على القصدير . وقد اهتم السومريون وخلفائهم الساميون فى آسيا الصغرى بالتجارة فى عصور مبكرة . ونشأت عن ذلك موانى تجارية كبيرة كمدينة « تيرا » ، وتبعها تكوين مستعمرات قرطاجنية عن الشاطىء الغربى للبحر الأبيض المتوسط . وقد أخذت السفن الفينيقية تجد فى طريقها نحو الشمال حوالى سنة ١٥٠٠ قبل الميلاد للمبادلة مع الجماعات « الميجاليثية » فى بريتانى ، وكورنول ، وديفون . وقبل سنة ٥٠٠ قبل الميلاد كان « هانو » القرطاجنى قد اتجه بسفينة بمحاذاة شواطىء أفريقيا إلى ما بعد خط الاستواء . وبمجرد أن بدأت السفن تخرج بعيداً من مرأى اليابسة قضى على الاقتصاد الكهنوتى للحضارات القديمة . وأصبح قياس النجوم جزءاً من فنون الملاحة .

ولما كان الميزان الخاطىء رجساً فى نظر الشعوب التجارية ، كما هو مذكور فى الإنجيل فليس من العجيب أن نرى حضارات العراق وآسيا الصغرى قد بزت الحضارة المصرية فى ابتداع نظام للموازين والمقاييس . وترتبط الحاجة إلى الحساب المستمر فى العمليات التجارية بتقدم كبير فى علم الحساب . فقد وجد فى « نيبور » خمسون ألف لوحة من مكتبة كبيرة خربها « الإلاميتيون » حوالى سنة ٢٠٠٠ قبل الميلاد . وقد كانت هناك فى ذلك الوقت فعلا مدرسة للحساب التجارى للتجار .

وقد كان الحساب البابلى يقل عن حسابنا الحالى فى الجودة قليلا كأداة للحسابات .

كانت قاعدة الخانات التي سيأتي شرحها في الباب السابع مستعملة بدقة في ميزان ستيني ، فكانوا يستعملون توافيق تكرارية لرمز واحد ورمز عشرة لتكوين الأعدادالأصليةمن ١ إلى٥٩ مقابل استعمالنا للرموزمن ١ إلى ٩ كأعدادأصلية وفوق ذلك فإن الخانة تدل على عدد مرات ٦٠ أو ٣٦٠٠ أو قوى أخرى للعدد ٦٠ ، كما تدل الخانة عندنا على عدد مرات عشرة أو مائة أو قوى أعلى للعشرة ، وقد استخدم الصفر في نظام العدية البابلية ، كما استخدمه الهندوس والمايا ، وكان يستخدم للتعبير عن الحد الخالي في السلسلة الستينية كما نستخدمه الآن في التمييز بين ٣٣ ، ٣٣٠ . وكانت هذه الخطوة كل ما ينقص نظام العدية عندهم لكي يصبح مكافئاً للطريقة العربية التي نستخدمها الآن . ولم يتقدم علم الحساب البابلي لدرجة اختراع النظام الخوارزمي أو الحساب باستخدام الأرقام ولو أنه كان في إمكانه الوصول إلى ذلك . إذ أنهم لسرعة إجراء العمليات الحسابية قاموا بعمل جداول للضرب والجمع والطرح والقسمة والمربعات والمتواليات بدقة تعادل ما نحصل عليه الآن باستخدام آلاتنا الحاسبة الحديثه . وهذا الحساب أكثر شبهاً بحسابنا الحالي من تقاليد الحساب الإغريقي الذي يستمد أساسه من السحر العددي الفيثاغوري . والأعداد الأتيكية ولو أنها أسهل في الكتابة من هذا النظام الأقدم كثيراً إلا أنها لم تستطع أن تؤدي إلى ابتداع النظام الخوارزمي أو القواعد الحسابية التي يسعد بمعرفتها الآن كل حدث في الثانية عشرة من عمره ، وهناك صفة أخرى للحساب البابلي من صفات الحساب الحديث وهي أن تعبيرهم للكسور لم يكن بعين مقامات بل استعملوا كسورا ستينية بنفس الطريقة التي نستعمل بها الآن الكسور العشرية ، إلا أنهم لم يستعملوا ما يناظر الشرطة العشرية للدلالة على القيمة المضبوطة لمجموعة من الأرقام . وكانت الجداول الحسابية البابلية ، مثل جداول اللوغاريتمات الحديثة ، تترك تحديد القيمة المضبوطة المتضمنة في الرموز للاستنتاج من سياق الموضوع .

وينطبق ما سبق أن قلناه عن قياس الاتجاه على قياس الطول ، والمساحة ، والحجم والوزن . فاستخدام الأعداد في قياس الوزن يكون لإخبارنا عن عدد وحدات الوزن المطلوبة لكي تتوازن مع الشيء الموزون إذا وضعا في كفتي ميزان . ويختلف هذا عن عد النغم في التقطيع أو الأيام في السنة . فقد يتوازن شيئان على ميزان معين في حين يتبين أن أحدهما أثقل من الآخر على ميزان أكبر حساسية . فأي الوحدات اخترنا

أو أى الآلات استعملنا ، فإن الأعداد الذكرية والأنثوية ، أو الأعداد الفردية والزوجية التى نستخدمها فى عد النقود أو الماشية لا يمكنها أن تودى وصفاً دقيقاً لوزن شىء أوحجمه أو مساحة سطحه أو أطوال أضلاعه أو زاوية ارتكازه . فإذا فطنا من البداية إلى أن الأعداد استعملت أول استعمالها للدلالة على الرتبة بالضبط التى يشغلها شىء أو حادثة فى سلسلة ، وأن الحاجة إلى قواعد فى استعمال الأعداد نشأت أولا عند تطبيقها فى مقاييس لا يمكن أن تكون مضبوطة فإنه يسهل علينا حل بعض الصعوبات التى حيرت أمهر الناس فى العصور القديمة .

تمارين على الباب الثانى

اكتشافات مطلوبة

١ — ابحث عن عدة أشياء دائرية كغطاء صفيحة القمامة ووجه ساعة الحائط وقس محيط كل منها وقطرها ثم أوجد خارج قسمة المحيط على القطر فى كل حالة بأقصى دقة ممكنة .

فيما يلى تعليمات عن مثلثات والمطلوب ملاحظة النتائج الممكن استخلاصها فى كل حالة

٢ — (ا) إرسم مثلث أطوال أضلاعه ١٠ سم ، ٨ سم ، ٦ سم . وطريقة عمل ذلك أن ترسم مستقيما على الورقة حيثما اتفق وتأخذ عليه مسافة ا ب طولها ١٠ سم ثم تفتح الفرجار فتحة طولها ٨ سم وتركز بسنه فى ا وترسم بالقلم قوساً يكون نصف قطره ٨ سم وبنفس الطريقة ترسم قوساً آخر نصف قطره ٦ سم مركزه فى ب . ثم تصل حـ نقطة تقاطع القوسين بالنقطتين ا ، ب تحصل على المثلث المطلوب .

إرسم المثلثين اللذين أطوال أضلاعهما :

(ب) ٩ سم ، ١٥ سم ، ١٢ سم .

(حـ) ١٧ سم ، ٨ سم ، ١٥ سم .

٣ — فى المثلثات الثلاثة السابقة قس الزاوية بين أقصر ضلعين فى المثلث .

٤ — الطريقة المصرية لعمل زاوية قائمة مازالت مستعملة . فيما يلى اقتباس من

تقرير رقم ٢ لوزارة الزراعة ومصائد الأسماك (١٩٣٥) . وهى جزء من تعليمات موضوعة لغرس مزرعة فواكه .

« أسهل طريقة لعمل زاوية قائمة بالزنجير هى كما يلى : تثبت الحلقة الرابعة والعشرون بوتد عند النقطة المراد جعلها رأس القائمة . ثم يثبت الطرف صفر مع الحلقة السادسة والتسعين بوتد على القاعدة بحيث يكون الجزء صفر — ٢٤ من الزنجير مشدودا . فإذا أخذت الحلقة السادسة والخمسون فى اتجاه يجعل الجزأين ٢٤ — ٥٦ ، ٥٦ — ٩٦ مشدودين فإنها تصل إلى نقطة على المستقيم العمودى على القاعدة » .

إذا وجدت فراغا كافيا ارسم باستعمال الأوتاد مثلثا مصريا بالحبل ومثلث المساح. مع العلم بأن الحلقة المذكورة طولها ٧,٩ بوصة . وبذلك تأكد أن هاتين الطريقتين تؤديان إلى رسم زاوية قائمة .

٥ — (ا) ارسم زاوية قائمة . خذ على ضلعيها طولين ٥ سم ، ١٢ سم وصل طرفيهما لتكون مثلثا ثم قس الضلع الثالث .

(ب) بنفس الطريقة ارسم مثلثا قائم الزاوية ضلعاه ١٢ سم ، ١٦ سم وقس الضلع الثالث .

(حـ) ارسم مثلثا قائم الزاوية ضلعاه ٧ سم ، ٢٤ سم وقس ضلعه الثالث .

٦ — ارسم مثلثا طول أحد أضلاعه ٢ بوصة والزاوية عند كل من طرفيه ٣٠° . إرسم مثلثين طول أحد أضلاعهما ٣ بوصة ، ٤ بوصة بالترتيب والزاويتين المجاورتين ٣٠° . ثم قس الضلعين الآخرين فى كل من المثلثات الثلاثة .

٧ — ارسم ثلاثة مثلثات طول أحد الأضلاع فيها ٢ بوصة ، ٣ بوصة ، ٤ بوصة على الترتيب والزاويتين المجاورتين ٤٥° .

٨ — ارسم ثلاثة مثلثات مختلفة الأبعاد بحيث يحتوى كل منها على ضلعين متساويين وقس جميع الزوايا .

٩ — أوجد مجموع الزوايا الثلاث فى كل مثلث من المثلثات التى رسمتها .

١٠ — ارسم مثلثين وحاول أن تجعل شكلهما يختلفان عن كل المثلثات السابق رسمها ثم قس الزوايا وأوجد مجموعها فى كل منهما .

اختبارات على المثلثات

١ ـــ ارجع إلى المثلثات القائمة الزاوية التي رسمتها في القسم السابق في ٢ (أ) ، (ب) ، (ح) وفي ٥ (أ) ، (ب) ، (ح) إذا سمينا أطول الأضلاع في كل مثلث حـَ والضلع الأقصر منه أَ وأقصر الأضلاع بَ . فأوجد أَ^٢ ، بَ^٢ ، حَ^٢ في كل مثلث وحقق في كل حالة العلاقات التالية :

$$\text{حَ}^{2} = \text{أَ}^{2} + \text{بَ}^{2}$$
$$\text{أَ}^{2} = \text{حَ}^{2} - \text{بَ}^{2}$$
$$\text{بَ}^{2} = \text{حَ}^{2} - \text{أَ}^{2}$$

٢ ـــ إذا كان في مثلث قائم الزاوية حَ = ٢٦ ، أَ = ٢٤ فما قيمة بَ ؟

وإذا كان أَ = ٢٤ ، بَ = ١٨ فما قيمة حَ ؟

وإذا كان حَ = ٣٤ ، بَ = ١٦ فما قيمة أَ ؟

٣ ـــ إذا كان في مثلث ما زاويتان كل منهما ٤٥° فما الزاوية الثالثة ؟

إذا كان زاويتان كل منهما ٣٠° فما الزاوية الثالثة ؟

إذا كانت زاوية ٣٠° وزاوية أخرى ٦٠° فما الزاوية الثالثة ؟

إذا كانت زاوية ٧٥° وزاوية أخرى ١٥° فما الزاوية الثالثة ؟

أشياء للحفظ

١ ـــ في المثلث القائم الزاوية إذا كان حَ أطول الأضلاع وكان أَ ، بَ الضلعين الآخرين فإن :

$$\text{حَ}^{2} = \text{أَ}^{2} + \text{بَ}^{2}$$
$$\text{أَ}^{2} = \text{حَ}^{2} - \text{بَ}^{2}$$
$$\text{بَ}^{2} = \text{حَ}^{2} - \text{أَ}^{2}$$

٢ ـــ في أي مثلث إذا كانت أ ، ب ، حـ زواياه فإن :

$$\text{أ} + \text{ب} + \text{حـ} = 180^{\circ}$$

الباب الثالث

لغـــة الأعداد

وقواعد النحو فى هـــذه اللغة

- الرياضة هى لغة الكم . وقواعد الرياضة هى قواعد النحو لهذه اللغة . أن هذا القول لهو أكثر من مجرد صيغة فى الكلام . ومتى عرفنا الشبه الكبير بين اللغة التى يستخدمها الإنسان فى وصف نوع الأشياء التى يقابلها فى الحياة واللغة التى يقيس بها هذه الأشياء ، لساعدنا ذلك على فهم الرياضة / وهذا الشبه موجود فى جميع فروع الرياضة ، فإذا كنت ممن يهتمون بتركيب اللغة فإنك واجد أن دراسة الشبه الكبير بين الرياضة وبين لغة الكلام العادى تبرر الحيز الذى خصصناه لها فى هذا الباب ، وأما إذا كنت ممن يستثقلون قواعد النحو فالأفضل أن تترك هذه الصفحات جانبا على أن تعود إليها كلما دعت الضرورة إلى ذلك .

- تعلم الإنسان البدائى أن يخبر عن أنواع الأشياء المختلفة التى تحيط به بواسطة الرسوم والأشكال بدل الكلام حتى يسهل الرجوع إليها ، وأصبحت هذه الرسوم تدريجيا تقوم مقام الكلمة التى يسمى بها الشيء المقصود التعبير عنه . ويبدو أن اللغة الصينية قد قامت على هذه الفكرة / وبتعاقب الأجيال قل استخدام هذه الطريقة التصويرية فى الكتابة . وعندما بدأ الأميون من الغربيين تعلم الكتابة كانوا يستخدمون صور مدرسيهم وغزاتهم للتعبير عن الكلمات / وفقدت الكتابة معناها التصويرى . ولم يكن فى الإمكان معرفة العلاقة بين الرسالة وبين الموضوع الذى تحمله إلا عندما تترجم هذه الرسالة إلى لغة الكلام / وهذا الفاصل الكبير بين نوعين من الكتابة ، الكتابة التصويرية أو الكتابة الهيروغليفية ، والكتابة الأبجدية له نظيره فى الرياضة . فقد بدأت الكتابة فى الرياضة بالطريقة الهيروغيفية أى طريقة الرســـوم والأشكال التى نسميها بالهندسة / وبتوالى الزمن تطورت الهندسة بطريقة شبيهة بتطور اللغة الصينية / وقد استخدمت الرسوم والأشكال فى التعبير عن المساحات والحجوم ،

وشاع استعمالها كخرائط استخدمت فى حل المسائل الحسابية . وبعد هذا بوقت طويل لم يكن يستخدم القوم شيئاً غير الصور لتدوين خواص الأعداد ، وبدأوا يستخدمون الحروف ووضعوا القواميس التى يمكن منها معرفة معانى الكلمات المستخدمة ، وهذه القواميس هى الجداول الرياضية .

– ونقول أن الجداول الرياضية هى قواميس اللغة لأنه لا فرق بين عمليتى الكشف عن جيب زاوية من جدول الجيوب والكشف عن الكلمة العربية المرادفة لكلمة نجليزية . فنحن نطالع فى جدول الجيوب العدد المقابل للزاوية ١٥° فنجده ٢٥٨٨, كما نطالع فى القاموس الانجليزى العربى المعنى المقابل لكلمة انجليزية فنجده مثلا « دفة السفينة » . وإذا كنا نستخدم جيب الزاوية ١٥° فى حساب مسألة خاصة بحركة السفينة بينما العدد ٢٥٨٨, الذى نقرأه من جدول الجيوب لا يشير إلى كيفية استعماله فى هذه المسألة ، فهكذا نحن نستخدم دفة السفينة فى حركتها بينما الكلمة « دفة » التى نقرأها من القاموس لا تشير إلى كيفية استعمالها .

– وقد جاءت لغة القاموس أو كما يسميها الرياضيون التحليل بعد الطريقة الهيروغليفية ، وأخذت تزداد وتتسع حتى فاقت عنها بكثير ، إلا أنها لم تغن عنها غناء تاماً . وهى فى ذلك تشبه اللغات الأبجدية إذ أن اللغات الأبجدية لم تغن عن اللغة الهيروغليفية ، فربما صورة كاريكاتورية بسيطة تفيد المعنى أكثر من خطبة رائعة .

وتوجد الآن لغات أبجدية عديدة كل منها لها ميزاتها الخاصة . فاللغة الفرنسية مثلا تصلح على وجه الأخص فى كتابة النكت التهكمية ، واللغة الإنجليزية تصلح بوجه خاص فى كتابة عبارات دقيقة تعبر عن حقائق علمية ، أما الإسهاب المعوج فى العبارات الألمانية فيقود أعقل الناس وأذكاهم إلى تصديق فلسفة هجل . هكذا توجد الأساليب المتنوعة للكتابة فى التحليل ، فما حساب التفاضل وحساب الكميات المتجهة وحساب المصفوفات إلا طرقا مختلفة لقياس وعد الأشياء .

– ووجهة الشبه الرئيسية بين قواعد النحو فى اللغات المختلفة سواء كانت قواعد النحو للنوع أو الكم ، يوضحها تماماً العنصران الأساسيان فى الكلام الموجودان فى جميع اللغات . وأحد هذين العنصرين هو الاسم الذى هو الأشياء التى تشير إليها فى الجملة ، أما العنصر الثانى فهو الفعل الذى يخبرنا ماذا نعمل بهذه الأشياء أو ماذا تعمل هذه الأشياء .

الإسم : الأسماء فى اللغة الرياضية هى الأعـداد ، وكما تتعدد أنواع الأسماء من أسماء الأعـــلام وأسماء الأشياء والمصادر وأسماء الجماعة والضمائر ، هكذا تتعدد أنواع الأعداد / وقد مرت مرحلة طويلة من الزمن قبل أن أدرك الإنسان الضروب المختلفة التى تستخدم فيها هذه الأنواع المتباينة من الأعداد ، بل إن أكثر الصعوبات التى تواجهنا فى تعلم طرق تطبيق قوانين الرياضيات ترجع إلى عدم فهمنا غرضين أساسيين تستخدم من أجلهما الأعداد .

– فبينما كان الإنسان يقيس الزمن بالأيام ويقيس كمية الخمر بالدوارق لم يكن يدرك أنه يستخدم الأرقام فى القياس بطريقتين مختلفتين كل الاختلاف / هاتان الطريقتان هما « التعداد » وتتضمن الأعداد المضبوطة الصحيحة « والتقدير » وتتضمن الأعداد المقربة . فنحن مثـــلا نعد القروش أو أصوات الناخبين أو التفاح أو الساعات أو السكان بينما نقدر الارتفاعات أو المساحات أو الأحجام . فالعدد فى الحالة الأولى هو مضبوط بمعنى أنه لا يوجد عدد سواه يعبر بالضبط عن مقياس المجموعة بينما العدد فى الحالة الثانية هو عدد مقرب . فإذا قلنا أن هناك ١٥ شاة فى الحقل فإننا نعنى بذلك أن هناك ١٥ شاة وليس ١٥,٠٠١ أو ١٤,٩٩٩ ، فالعدد الصحيح ١٥ عدد مضبوط يعطينا القياس المضبوط لشىء معين كما يطلق الاسم « عمر بن الخطاب » على علم معين .

– وإذا قلنا أن ارتفاع الحجرة ١٥ قدما ، ٣ بوصـات فإننا نعنى بذلك أنه إذا كانت آلة القياس مقسمة إلى بوصات فإن ارتفاع الحجرة أقرب إلى ١٥ قدما ، ٣ بوصات منه إلى ١٥ قدما ، ٢ بوصـة أو ١٥ قدما ، ٤ بوصات . وإذا كانت آلة القياس مقسمة إلى أجزاء من عشرة من البوصة فإننا نحصل على قيمة أدق من القيمة ١٥ قدما ، ٣ بوصات . وبواسطة الورنية يمكننا إيجاد قيمة مقربة إلى أقرب جزء من مائة من البوصة . وبواسطة الميكروسكوب يمكننا أن نقرب إلى جزء من مائة ألف جزء من البوصة ، وبواسطة السبكتروسكوب نقرب إلى جزء من مائة بليون جزء من السنتيمتر أى إلى ١ ... ... ٠, من السنتيمتر . وليس هناك ما يدعونا إلى الاعتقاد بأن السبكتروسكوب هو أدق ما يصل اليه الإنسـان لقياس الأبعاد . فالاختلاف بين مقاييس الالـكترون فى خلال الثلاثين عاما الأخيرة أكثر بكثير من الاختلاف بين المقاييس الحالية لأبعاد الكرة الأرضية ومقاييسها منذ ألفى عام . والقول أن الطبيعة والفلك هما العلمان المضبوطان هو قول غير صحيح ، وربما

شاع هذا القول لأنه يساعد الفلاسفة المثاليين على إغفال علم الأحياء الذى يدرس نقائص عقولهم .

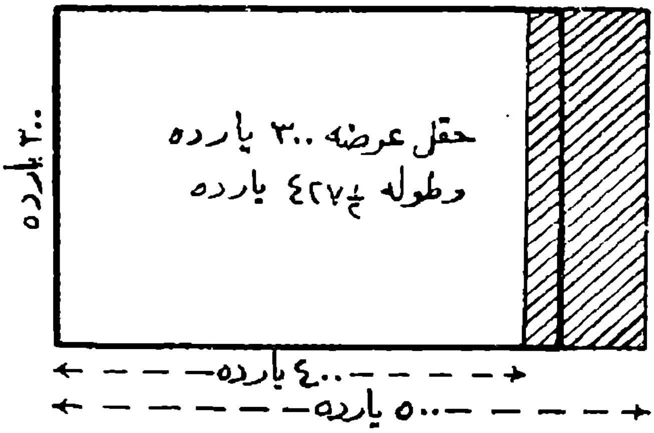
– وعندما نقول أن ارتفاع الحجرة ١٥ قدما و ٣ بوصات ، هذا العدد هو أحد مجموعة ضخمة من الأعداد المتقاربة كما نقول فى القصص قال «زيد لعمرو» ونكنى بكل من زيد وعمرو عن عدد ضخم من الكائنات المتشابهة . والعدد ١٥ قدما و ٣ بوصات يمكنه أن يمثل عدداً مقرباً أو عدداً مضبوطا مثله مثل الاسم «عمرو» الذى يكنى به عن الإنسان فى القصص ، ويعنى أحيانا علماً من الأعلام كعمرو بن العاص مثلا . ففى كلتا الحالتين نفهم المقصود من الإسم أو العدد من سياق الحديث .

– ولدينا الآن وسائل نميز بها العدد المقرب من العدد المضبوط . فإذا كانت آلة القياس مقسمة إلى بوصات وقلنا أن ارتفاع الحجرة ١٥ قدما و ٣ بوصات أى ١٨٣ بوصة فإن ارتفاع الحجرة أقرب إلى ١٨٣ بوصة منه إلى ١٨٢ بوصة أو ١٨٤ بوصة ، أى أن ارتفاع الحجرة يقع بين ١٨٢½ = (١٨٣ – ½) بوصة و ١٨٣½ = (١٨٣ + ½) بوصة ، ويمكننا التعبير عن ارتفاع الحجرة بعبارة أدق بواسطة العدد المقرب ١٨٣ ± ½ .

وعندما نستخدم الأعداد فى التعبير عن المجموعات المختلفة لا نستخدم الأعداد المضبوطة التى هى الأعداد الصحيحة سوى فى التعبير عن المجموعات التى تتألف من عناصر منفصلة ، كالمجموعة التى تتألف من تلاميذ مدرسة ما أو المجموعة التى تتألف من سكان مدينة ما . أما فى قياس غير هذه المجموعات فلا بد أن نستخدم الأعداد المقربة مثل ١٨٣ ± ½ ، وإلا نفهم المقصود بالعدد من سياق الحديث . فإذا قيل أن ارتفاع الحجرة ١٨٣ بوصة وكان المقياس مقسما إلى أجزاء من عشرة من البوصة فهمنا أن ارتفاع الحجرة ١٨٣ ± ٠,٥ من البوصة .

– هذه الصعوبات التى مر بها تاريخ لغة الكم تشبه تماما الصعوبات التى مر بها تاريخ المحادثة . فيقول بعض كبار اللغويين أن الإنسان البدائى كان يشير إلى الثيران البيضاء والثيران السوداء والثيران البنية بأصوات متباينة إلى أن تغلب الإنسان المتحضر على هذه الصعوبة وفرق بين هذه العناصر المختلفة التى تتألف منها مجموعة الثيران بكلمات جديدة متباينة هى الصفات مثل أبيض وأسود وبنى . وأمكنه أيضاً بهذه الصفات أن يميز بين المجموعات المختلفة فما ألقاب العائلات الآن إلا صفات تتميز بها هذه المجموعات العائلية . وبهذه الوسيلة أمكنه أيضاً أن يدرك الأكثر فالأكثر من الأشياء المحيطة به دون أن يتجاوز قائمة الكلمات المدونة فى قاموس اللغة المحدود .

وهذا الاستعمال المزدوج للاعداد بين التعداد والتقدير أوجد سوء التفاهم الدائم بين الرجل العملي والشخصي الرياضي ، وسنرى فى البابين القادمين كيف أثار هذا الاستعمال المزدوج الأزمة الأولى فى تاريخ الرياضة ، وعندما اصطدم الرجل العملي بصعوبة استخدام الأعداد الصحيحة المضبوطة فى قياس المقادير المختلفة بواسطة مقاييس تشترك فى صنعها والقياس بها حواسه غير المعصومة من الخطأ ، قنع بأن يدخل إلى مقاييسه وحدات أصغر فأصغر ، ونرى ذلك بوضوح فى المثال الآتى:



شكل (٢١)

أربعة أشخاص يقيسون مساحة حقل مستطيل الشكل عرضه ٣٠٠ ياردة وطوله ٤٢٧½ ياردة ، ولنفترض مع الرجل العملي ، وجود قطعة أرض عرضها ٣٠٠ ياردة بالضبط وطولها ٤٢٧½ ياردة بالضبط . ولنفرض أن مع الشخص الأول حبل طوله ١٠٠ ياردة ومع الثانى حبل طوله ١٠ ياردات ومع الثالث شريط من القماش طوله ٣ ياردات ومع الأخير مسطرة طولها ياردة واحدة . كل من هؤلاء الأشخاص لا يجد صعوبة فى قياس عرض المستطيل . فالأول يضع مقياسه على ضلع المستطيل ثلاث مرات . والثانى يضع مقياسه عشر مرات ، والثالث ثلاثين مرة والأخير مائة مرة . لكن عند قياس طول المستطيل يجد الأول أن هذا الطول أكبر من أربعة أضعاف وأصغر من خمسة أضعاف طول مقياسه ويعطينا تقديراً لمساحة الحقل ينحصر بين ٣٠٠×٥٠٠=١٥٠٠٠٠ ياردة مربعة و ٣٠٠ × ٤٠٠ = ١٢٠٠٠٠ ياردة مربعة (أنظر شكل ٢١) . ويجد الثانى أن طول الحقل أكبر من ٤٢ ضعفاً وأصغر من ٤٣ ضعفا لطول مقياسه وينحصر تقديره لمساحة الحقل بين ٣٠٠ × ٤٣٠ = ١٢٩٠٠٠ ياردة مربعة ، ٣٠٠×٤٢٠ = ١٢٦٠٠٠ ياردة مربعة . ويبين الجدول الآتى التقديرات المختلفة التي يعطينا إياها هؤلاء الأشخاص الأربعة .

المقياس	الحد الأدنى للمساحة بالياردة المربعة	الحد الأعلى للمساحة بالياردة المربعة
١٠٠ ياردة	٣٠٠ × ٤٠٠ = ١٢٠٠٠٠	٣٠٠ × ٥٠٠ = ١٥٠٠٠٠
١٠ ياردة	٣٠٠ × ٤٢٠ = ١٢٦٠٠٠	٣٠٠ × ٤٣٠ = ١٢٩٠٠٠
٣ ياردة	٣٠٠ × ٤٢٦ = ١٢٧٨٠٠	٣٠٠ × ٤٢٩ = ١٢٨٧٠٠
١ ياردة	٣٠٠ × ٤٢٧ = ١٢٨١٠٠	٣٠٠ × ٤٢٨ = ١٢٨٤٠٠

ونرى من هذا الجدول أن الحد الأعلى للمساحة في الحالة الأولى يزيد عن الحد الأدنى لها بمقدار ٣٠٠٠٠ ياردة مربعة أي مايعادل ٢٥٪ . وفى الحالة الأخيرة التى هى أكثر دقة من جميع الحالات التى قبلها يزيد الحد الأعلى للمساحة عن الحد الأدنى بمقدار ٣٠٠ ياردة مربعة أي مايعادل ¼٪ . وبعبارة أخرى التقدير الأول للمساحة هو ١٣٥٠٠٠ ± ١٥٠٠٠ ياردة مربعة والتقدير الأخير لهاهو ١٢٨٢٥٠ ± ١٥٠ ياردة مربعة .

– يوضح لنا هذا المثال كيف استطاع الرجل العملى أن يستخدم الأعداد فى عمليات القياس ، بأخذ وحدات أصغر فأصغر . فهو إذ لم يستطع أن يزن مقداراً من الدقيق بواسطة الرطل قسم الرطل إلى أوقيات ، وإذ لم يستطع أن يقيس الزوايا بالدرجات قسم الدرجات إلى دقائق ثم قسم الدقائق إلى ثوان . وهكذا ظل الإنسان آلاف السنين يأخذ وحدات أصغر فأصغر ليعبر بها عن الكسور إذ كان من الصعب عليه أن يدرك أن الكسر الذى لايعبر عنه سوى بتدريج معين على آلة القياس هو عدد حقيقى كالعدد الصحيح ثلاثة جمال أو خمس بقرات .

– وقد كان الإغريق الذين كتبوا مؤلفاتهم عن الرسوم والأشكال التى خططها مهندسو ومساحو مصر على الأراضى أول من تنبهوا إلى أن الرجل العملى يستخدم الأعداد بطريقتين مختلفتين . وبمقارنة الأشكال التى كانوا يرسمونها بآلاتهم غير الدقيقة من مسطرة وفرجار اقتنعوا بأنه لايمكنهم قياس هذه الأشكال بأعداد مماثلة لأعداد الثيران التى يجب أن تكون فردية أو زوجية ذكراً أو أنثى . كان هذا النوع من التفكير يمكن أن يكون خطوة أولية لوضع لغة للأعداد إلا أن ظروف المجتمع وقتئذ لم تسمح بذلك التقدم بل بالعكس لم يؤد هذا التفكير إلا إلى الركود والخمول فبدلا من أن يظهروا

لغة الأعداد فى كمالها وعظمتها رأوا الكمال فى الآلهة فقط ، فابعدوا الأعداد ووحدات القياس عن الهندسة وكابروا فى الرياضيات حتى اعتبروها نوعا من الكمال الروحى . ولم تتقدم الرياضيات خطوة أخرى إلى أن بدأ رجال الاسكندرية يبحثون عن الكمال فى الطرق الدقيقة للقياس .

ـ ونرجىء قصة هذه الأزمة الرياضية إلى فما بعد إلا أننا نذكر محاولة جديدة زادت الارتباك سوءاً . فرغبة فى أنكار عدم كمال اللغة الرياضية الإغريقية ادخل إيدوكسس ثلاث عبارات جديدة فى قياس الأشكال . فبدلا من أن يستخدم الوحدات كالذراع والسنتيمتر كان يقول أن طول هذا الخط المستقيم أو مقدار هذه الزاوية لا بد أن يكون واحداً من ثلاثة أمور ، فإما أكبر من (>) وإما أصغر من (<) وإما يساوى (=) طول خط مستقيم آخر أومقدارزاوية أخرى . ولا بد أن هذا المبتدع الرياضى لم يختبر أنواع الأشياء التى يمكن استعمال هذه العبارات فى التعبير عنها . فلو أنه إختبرها لكان أدرك أن كمال براهينه الهندسية لم يكن إلا إفتراضياً .

ـ يمكننا أن نعبر عن مقياس ما بطرق ثلاث . أولها وأقلها دقة أن نعطى حداً واحداً أعلى أو أدنى ، فنقول مثلاأن وزن النملة أصغر من $\frac{١}{١٠٠٠}$ من وزن الإنسان ونكتب بلغه الرياضة $ن < \frac{١}{١٠٠٠} ا$ حيث $ن$ ترمز إلى وزن النملة و $ا$ ترمز إلى وزن الإنسان . ويصعب علينا (إذا تناسينا الأوزان الصغيرة مثل وزن ذرة الأيدروجين) أن نجد شيئاً ما بحيث نستطيع أن نكتب $ن > س$ حيث $س$ ترمز إلى وزن هذا الشىء . ونقول أيضاً أن البعد بين مرصـــد حلوان والشعرى اليمانية أكبر من ١٠٠٠ ضعف من البعد بينه و بين سيرا كوز و نكتب بلغة الرياضة $ف_{١} > ١٠٠٠ ف_{٢}$ حيث $ف_{١}$ ترمز إلى البعد عن النجم الاول ، $ف_{٢}$ ترمز إلى البعد عن النجم الثانى . وإذا لم يكن لدينا مؤلف فى الفلكيات يوضح لنا أبعاد النجوم المختلفة عن مرصـــد حلوان فإنه من الصعب أن نعطى إسم نجم ثالث يبعد عن المرصد بأكثر مما يبعد عنه الشعرى اليمانية لنكتب بلغة الرياضة $ف_{١} < ف_{٣}$.

ـ وتستخدم هذه الطريقة ، على وجه العموم ، فى التعبير عن مقاييس بعض أشياء معينة . إلا أنه يمكننا أحيانا أن نستخدمها فى التعبير عن مقاييس بعض المجموعات الخاصة . فنقول مثلا إن عدد كرات الدم فى جسم الإنسان أكبر بكثير من عدد سكان مدينة القاهرة أو نقول أن عدد النجوم فى السماء أكبر بكثير من عدد الناس على الارض . وفى كلتا الحالتين لا نستطيع أن نعطى حداً أعلى لعدد أفراد المجموعة .

أما القياس الدقيق فيتطلب منا الحدين الأعلى والأدنى ، وقد أوضحنا ذلك فى المثال الخاص بقياس ارتفاع حجرة . فالحد الأعلى هو عدد من الوحدات أكبر من ، والحد الأدنى هو عدد من الوحدات أصغر من عدد الوحدات التى نأخذها تقديراً للإرتفاع . ويمكننا أيضاً أن نعبر بنفس الكيفية عن مقياس بجموعة معينة . فإذا قيل لنا مثلا أن عدد سكان لندن ١١ مليونا وعدد سكان ليفربول مليونا واحداً . وعدد سكان موسكو ينحصر بين الإثنين لأمكننا أن نستنتج أن عدد سكان موسكو ٦ ± ٥ ، وطالما نحن نستخدم الأعداد كوحدات للقياس لا نأمل أن نجد عبارات أفصح من هذه ؛ إلا أننا نأمل فى تصغير العدد الذى تسبقه الإشارتان ± إلى أقصى ما يمكننا .

وعند مقارنة المجموعات ببعضها نجد نوعا ثالثاً للتعبير عن القياس . فمثلا إذا كانت كل دجاجة تضع فى الأسبوع ٤ بيضات فان عدد البيض فى الأسبوع يساوى عدد الدجاجات مضروبا فى أربعة ونكتب رياضياً :

$$ب = ٤ د$$

حيث ب هى عدد البيض ، د هى عدد الدجاج . وواضح أن عبارة كهذه لا يمكن أن تكون صحيحة إلا إذا كانت تعبر عن مقياس بجموعة عناصرها منفصلة كالبيض أو الدجاج . وإن كانت الأشكال الهندسية يمكن تخطيطها على الرمال أو على نماذج منها على الشمع إلا أنه لا يمكن التعبير عن مقاييسها بعبارات التساوى من هذا النوع . فإذا كان الخط المستقيم يمثل ارتفاع الحائط لفضلنا أن نقول أن هذا الخط المستقيم أصغر من كذا من المرات أو أكبر من كذا من المرات من خط مستقيم آخر . وإذا كان الخطان المستقيمان متقاربين جداً فى الطول لأمكننا أن نقول أن الخط المستقيم الأول أصغر من ١٫٠٠١ وأكبر من ٫٩٩٩ من الثانى .

- ومن أوجه التقدم فى الرياضيات أن أصبحنا الآن نميز بين الكسور المقربة والكسور المضبوطة ، فالكسر المضبوط مثل ⅔ يمكننا أن نعبر به عن نسبة مجموعة من الأشياء إلى مجموعة أخرى . فمثلا إذا كان بإحدى المكتبات ٣٠٠ كتاباً منها ٢٠٠ كتابا فى الرياضيات فإن عدد كتب الرياضيات يساوى ⅔ عدد الكتب التى بالمكتبة . أما إذا كان ارتفاع حائط ١٥ قدما وغطيت الحائط بالورق إلى ارتفاع ١٠ أقدام فاننا لا نستطيع القول أن الجزء المورق هو ⅔ الحائط بنفس الكيفية السابقة لأن المقاييس ١٥ قدما ، ١٠ قدما هى مقاييس مقربة .

ولكن يمكننا التعبير عن ذلك بواسطة الكسر العشرى الدائرى ٦, الذى نعنى به مقداراً

< ٦/١٠ و > ٧/١٠

< ٦٦/١٠٠ و > ٦٧/١٠٠

< ٦٦٦/١٠٠٠ و > ٦٦٧/١٠٠٠

< ٦٦٦٦/١٠٠٠٠ و > ٦٦٦٧/١٠٠٠٠ وهكذا .

وعند استخدام الكسر العشرى الدائرى ٦, نكتفى بعدد من الأرقام العشرية يتفق مع الدقة التى تسمح بها آلة القياس . فإذا كانت آلة القياس عرضة لخطأ ١ ٪ فاننا نكتفى بالقيمة ٦٧, حيث أن ٦٧, تزيد عن ٢/٣ بمقدار ١/٣٠٠ أى ما يعادل ١/٢٠٠ من المقدار ٢/٣، والمقدار ٦٦, ينقص عن ٢/٣ بمقدار ١/١٥٠ أى ما يعادل ١/١٠٠ من المقدار ٢/٣، فالكسر العشرى ٦٧, يمثل العدد ٢/٣ بنفس الكيفية التى نقيس بها خطاً مستقيما بواسطة آلة عرضة لخطأ ١ ٪ . هذه الكسور العشرية حديثة العهد فى الاستعمال فهى ترجع إلى الفرنسيين منذ قرن ونصف تقريباً وقد شاع استعمالها منذ قرن ، بينما كان منذ خمسمائة عام لا يملك الرجل العملى وسيلة سهلة كهذه يشرح بها الاختلاف بين تقديره لطول ما ، وتقدير رجل آخر .

– والكسر العشرى الدائرى ٦, يمكن كتابته على هذه الصورة الرمزية لأنه يتركب من متسلسلة من الأرقام العشرية ٦ . أما إذا كان الكسر يتكون من أرقام مرصوصة بغير ترتيب خاص واضح فإنه يتحتم علينا عندئذ ادخال نوع جديد من الأعداد . هذه الأعداد التى لا يمكن تمثيلها بكسر عشرى دائرى . مثل ط ، هـ ، تسمى فى اللغة الرياضية بالصماء . ط هى النسبة بين محيط الدائرة وقطرها ، فاذا أردنا أن نحسب طول سلك على هيئة دائرة معلوم نصف قطرها ، وأردنا أن الخطأ لا يتجاوز ١ ٪ يكفى ان نأخذ ط = ٣,١٤ ، ولكى لا يتجاوز الخطأ ١ من ١٠٠٠٠ يكفى أن نأخذ ط = ٣,١٤١٦٠ ويتوقف عدد الأرقام العشرية التى نأخذها على مقدار الدقة التى نريدها فى المسألة الخاصة التى أمامنا ، فعدد الأرقام العشرية التى نأخذها عند حساب محيط عجلة عربة عادية يختلف عن عدد الأرقام العشرية التى نأخذها عند حساب محيط جزء مستدير من طائرة . والعدد ط كالعدد ٦, يمثل مجموعة ضخمة من الأعداد

المتقاربة جداً إلا أننا نطلق عليه كلمة ضمير لأنه لا يمكننا أن نعبر عن أوجه التقارب بين أفراد هذه المجموعة بواسطة عدد مقرب .

— وتستخدم الحروف أو الرموز فى الرياضة بدلا من الأسماء بطريقة تختلف قليلا عن استخدامها فى كتب النحو . ففضلا عن أسماء الأعلام وأسماء الأشياء ، تميز كتب النحو بين المصدر مثل «العدل» وبين اسم الجماعة مثل « الناس » وقد أعاق هذا التمييز سير الفكر البشرى بدلا من أن يساعده وكانت خطوة كبيرة فى الرقى الفكرى حينما تبين الإنسان أن المصدر فى العلوم النحوية قد يكون طريقة مختصرة للتعبير عن مجموعة من الصفات وقد يتعذر فى بعض الأحيان التمييز بينه وبين اسم الجماعة .

وقد اضفى الفيلسوف المثالى أفلاطون على المصادر مثل «العدل» وجوداً مستقلا عن الظروف الاجتماعية للناس الذين يصفون شيئاً ما بأنه عادل أو غير عادل ، ونظرة أفلاطون الغريبة عن أمثال هذه الأسماء هى نفس نظرته الغريبة إلى الأعداد فكل منهما تمتزج بفكرته عن العلوم السماوية التى كان تلاميذه يعتقدون فى وجودها اعتقادهم فى وجود الجنة والنار .

وقد بدأ العلم الحديث عندما طرح أمثال روجر بيكون وفرانسس بيكون هذه الأراء وأرادوا أن تصف الكلمات الأشياء المحسوسة التى نصادفها فى حياتنا . ولا حاجة بنا فى الرياضة للتمييز بين اسم المصدر واسم الجماعة لأن الرياضة هى «لغة الفعل» فالحروف الأبجدية التى تدل على جماعة من الأعداد لها صفات مشتركة تقابل ما اسميناه اسم الجماعة أو اسم المصدر على السواء . ففائدة هذه الأسماء فى الكلام العادى هى الاقتصاد فى الوقت والحيز وهذا صحيح أيضا فى لغة الكم . خذ على سبيل المثال الطرق الثلاثة الآتية فى التعبير عن قاعدة واحدة .

(١) مساحة المستطيل تساوى حاصل ضرب الطول فى العرض .
يمكن كتابة هذه العبارة بالصورة الموجزة

(٢) المساحة = الطول × العرض .
ويمكن أيضا الإيجاز أكثر فى هذه العبارة هكذا .

(٣) ح = ل ع
حيث ح ، ل ، ع ترمز إلى المساحة والطول والعرض على الترتيب .

فالصيغة (٣) ترينا كيف نوجد مساحات الحجرات المختلفة دون أن نكتب العبارة المطولة (١) فى كل مرة . أيضا وضع ل بجوار ع هو إيجاز للقول ل مضروبة فى ع . واستخدام الحرف ع مثلا ليرمز إلى المساحات المختلفة يناظر تماما استخدام الاسم « لون » ليمثل الأبيض والأسود والبنى . . . إلخ .

والحرف لا يستخدم فقط عند كتابة قانون معين بصورة موجزة بل يستخدم أيضا عند كتابة قانون يسهل لنا أجراء بعض العمليات الحسابية ، فاعتبر مثلا المثال الآتى (انظر شكل ٢٢) .

لدينا عدد من الصفوف يحوى كل منها عددا من الكراسى يزيد واحدا عن عدد الكراسى بالصف الذى يسبقه وينقص واحدا عن عدد الكراسى بالصف الذى يليه والمطلوب إيجاد عدد الكراسى الموجودة فى عدد معين من هذه الصفوف . لا داعى أن نتعب أنفسنا بتعداد هذه الكراسى لأنه يمكننا كتابة قاعدة مبسطة يسهل بواسطتها إيجاد عدد هذه الكراسى .

إذا كان الصف الأول يحوى كرسيا واحدا فالصف الثانى عشر يحوى اثنى عشر كرسيا واذن الصفوف الاثنى عشر الأولى تحوى عدداً من الكراسى يساوى

١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ + ١١ + ١٢

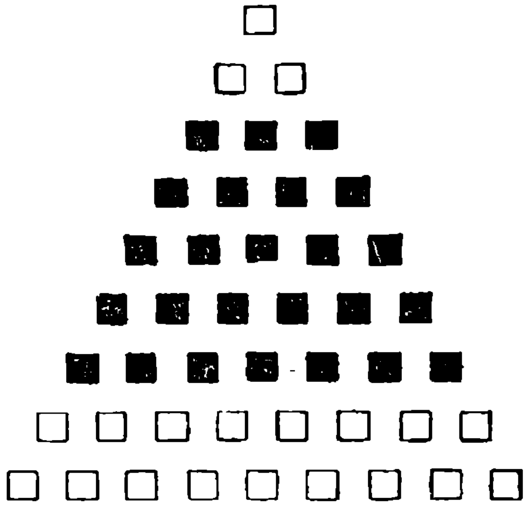
ويمكننا كتابة هذه الأعداد بالترتيب الآتى :

(١ + ١٢) + (١١ + ٢) + (٣ + ١٠) + (٩ + ٤) + (٥ + ٨) + (٦ + ٧)

فلدينا اذن ٦ أزواج من الأعداد كل زوج منها يساوى (١ + ١٢) أى ١٣ واذن عدد الكراسى هو ستة أمثال العدد ١٣ أى يساوى ٧٨ .

تكتب هذه العبارة بواسطة الرموز هكذا :

إذا كان لدينا ن من الأعداد السابقة ورتبنا هذه الأعداد مثنى مثنى، يصبح لدينا $\frac{1}{2}$ ن زوجا من الأعداد كل زوج منها يساوى مجموع العددين الأول ا والأخير ل أى يساوى (ا + ل) وإذن مجموع هذه الاعداد هو $\frac{1}{2}$ ن (ا + ل) .



١ فى الصف الأول
٢ » » الثانى
٣ » » الثالث
٤ » » الرابع
٥ » » الخامس
٦ » » السادس
٧ » » السابع
٨ » » الثامن
٩ » » التاسع

مجموع الأعداد فى التسعة صفوف الأولى ٤٥

عدد الصفوف ن = ٩
العدد فى الصف الأول ا = ١
العدد فى الصف الأخير ل = ٩
المجموع ½ ن (ا + ل) = ½ . ٩ (١ + ٩) = ٤٥

(شكل ٢٢) : مجموع الأعداد من ١ إلى ٩

ويمكن استخدام القاعدة لإيجاد عدد الكراسى فى الصفوف من الثالث إلى السابع ، فنى هذه الحالة ن = ٥ ، العدد الأول ا = ٣ ، العدد الأخير ل = ٧
وإذن المجموع = ½ . ٥ (٣ + ٧) = ٢٥

– وندرك فائدة هذه القاعدة المبسطة إذا حاولنا معرفة عدد الكراسى الموجودة فى الثلاثين صفاً الأولى . أنه يستغرق منا بعض الوقت كى نعد هذه الكراسى ونجدها ٤٦٥ كرسياً . ولكن إذا طبقنا هذه القاعدة حيث لدينا ١٥ زوجاً من الأعداد كل زوج منها يساوى ١ + ٣٠ أى ٣١ لحصلنا بسرعة على العدد ١٥ × ٣١ = ٤٦٥

ونلاحظ أن القاعدة السابقة صحيحة إذا كنا نبدأ من أى صف . فمثلا إذا أردنا إيجاد عدد الكراسى الموجودة فى الصفوف العشرة ابتداء من الصف الثالث إلى الصف الثانى عشر نقول أيضاً أنه لدينا ٥ أزواج من الأعداد كل زوج منها يساوى

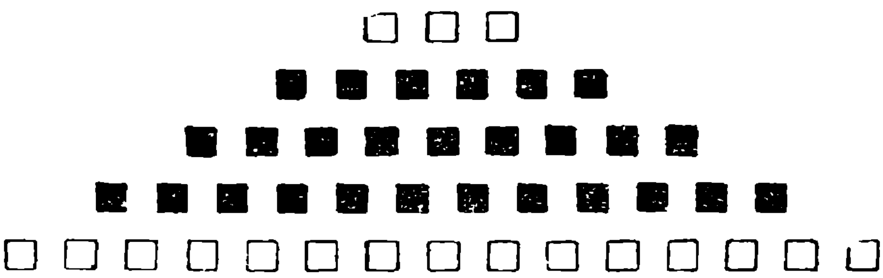
٣ + ١٢ = ١٥ ، وإذن عدد الكراسى يساوى ٥ × ١٥ أى ٧٥ ، وواضح أن هذا الجواب صحيح إذ أنه يقل عن ٧٨ بثلاثة وهى الكراسى الثلاثة الموجودة فى الصفين الأول والثانى . أيضا إذا أردنا معرفة عدد الكراسى فى الصفوف إبتداء من الصف الثالث عشر إلى الصف الثلاثين نقول أن لدينا ١٨ صفاً وإذن ½ × ١٨ من الأزواج ، كل زوج به (١٣ + ٣٠) من الكراسى ، وإذن عدد الكراسى = ½ × ١٨ (١٣ + ٣٠) = ٩ × ٤٣ = ٣٨٧ كرسيا . وإذا أضفنا إلى هذا العدد ٧٨ أى عدد الكراسى فى الاثنى عشر صفاً الأولى لحصلنا على ٤٦٥ وهو نفس العدد الذى حصلنا عليه عندما أوجدنا عدد الكراسى فى الثلاثين صفاً الأولى مما يثبت لنا مرة أخرى إمكانية تطبيق القاعدة السابقة ابتداء من أى صف .

ونلاحظ أيضاً أن هذه القاعدة المبسطة يمكن تطبيقها على الأعداد التى تتزايد بنفس المقدار ، فمجموعة الأعداد :

٧ ١٢ ١٧ ٢٢ ٢٧ ٣٢

يمكن ترتيبها مثنى مثنى هكذا :

(٧ + ٣٢) + (١٢ + ٢٧) + (١٧ + ٢٢)



٣
٦
٩
١٢
١٥

٤٥ المجموع

عدد الصفوف ن = ٥
العدد الأول ا = ٣
العدد الأخير ل = ١٥
المجموع ½ ن (ا + ل) = ½ ٥ (٣ + ١٥) = ٤٥

شكل (٢٣) : مجموع الأعداد ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥

ونلاحظ أنه (١) يمكن تطبيق القاعدة على هذه المجموعة لأن كل عدد فيها يزيد عن العدد الذى قبله بنفس المقدار

(٢) عند تطبيق القاعدة على هذه المجموعات يلزمنا أن نعرف العددين فى الصف الأول والأخير فقط .

فكل زوج من هذه الأعداد يساوى مجموع العددين الأول والأخير أى ٣٩ ، وإذن مجموع هذه الأعداد الستة يساوى ½ × ٦ (٧ + ٣٢) = ١١٧ . والسبب فى ترتيب هذه الأعداد مثنى مثنى واضح وهو أن الفرق بين كل عدد والعدد الذى يسبقه مقدار ثابت ، فالقاعدة يمكن تطبيقها على مجموعات الأعداد التى من هذا النوع .

ـــ وربما ندهش أن القاعدة صحيحة أيضاً إذا كان عدد الأعداد فرديا ولكن تزول دهشتنا إذا علمنا أن العدد الأوسط فى مثل هذه المجموعات يساوى دائماً نصف حاصل جمع العددين الأول والأخير . فالأعداد من ١ إلى ١٣ يمكن كتابتها مثنى مثنى هكذا :

(١+١٣) + (٢+١٢) + (٣+١١) + (٤+١٠) + (٥+٩)
+ (٦ + ٨) + ٧

وواضح أن ٧ هى نصف حاصل الجمع (١ + ١٣) ، وإذن لدينا ½٦ زوجا من الأعداد كل زوج منها يساوى (١ + ١٣) . وإذن مجموع الأعداد من ١ إلى ١٣ يساوى ½ × ١٣ (١ + ١٣) = ٩٢ ، وهو يزيد عن ٧٨ بمقدار ١٣ أى عدد الكراسى التى فى الصف الثالث عشر .

الأقواس : عندما نستخدم الرموز فى كتابة منطوق قانون رياضى نعبر عن حاصل ضرب عددين بوضع العددين الواحد بجوار الآخر . ونعبر عن حاصل ضرب مجموعة من الأعداد فى عدد آخر بأن نضع هذه المجموعة بين قوسين ، فالعبارة ا (ب+حـ) تعنى أن ا مضروبة فى حاصل جمع العددين ب ، حـ أى أن ٣ (٥+٢) تعنى ٣ × ٧ = ٢١ . وهذا يختلف كل الاختلاف عن ا ب+حـ التى تعنى إذا استخدمنا نفس الأرقام (٣ × ٥) + ٢ = ١٧ . وعند كتابة حاصل ضرب عددين ليسا فى الصورة الرمزية نفضل أن نستخدم الصورة ٣ × ٥ بدلا من الصورة الموجزة ٥٣

التى تعنى ثلاثة وخمسين ، وأن نكتب ½ × ٢ بدلا من الصورة الموجزة ٢½ التى لا تعنى نصف الاثنين . ونشرح فيما يلى بالتفصيل معانى العلامتين « × » ، « + » ، ووضع الحروف جوار بعضها مثل ل ع فى قانون المساحة .

نعتبر العبارة التى تعطينا قانون المساحة ونكتبها على الصورة الأكثر شيوعا

ل × ع = ح

— هذه العبارة تمثل الجملة فى اللغة الرياضية ، أى أن الجملة فى هذه اللغة هى المعادلة ، وكما أن الجملة فى اللغة النحوية تشمل الفعل الذى يخبرنا بما يعمله الإسم هكذا المعادلة فى اللغة الرياضية . فكما أن الحروف ل ، ع ، ح هى أسماء فى لغة الكم، هكذا العلامات « × » و « + » هى أفعال فى هذه اللغة . وحيث أن اللغة الرياضية هى لغة عملية وليست لغة الخيال أو العاطفة ، تحوى جميع جملها الفعل « نحصل على » الذى يكتب رياضياً « = » .

وتسمى العلامات « × » ، « + » فى اللغة الرياضية بالمؤثرات ويقصد بها أن هذه العلامات لا تكتب كأداة للزينة وإنما لتؤثر تأثيراً معيناً . فالجملة الرياضية،

ل × ع = ح

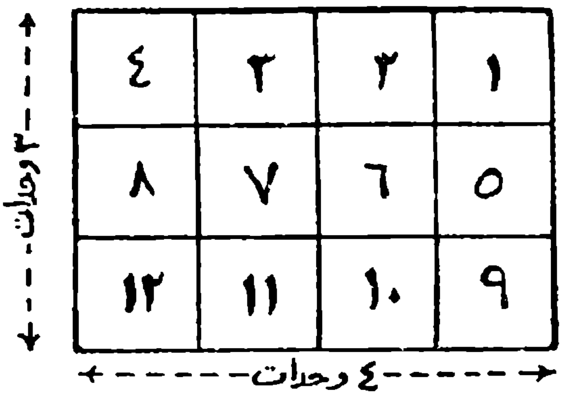
يمكن ترجمتها إلى اللغة الأبجدية هكذا :

نضرب الطول فى العرض فنحصل على المساحة

ولكى ندرك بوضوح أوجه الشبه بين الجملة فى اللغة النحوية والمعادلة فى اللغة الرياضية نعمل المقارنة الآتية :

الجملة النحوية	المعادلة الرياضية
الطول	ل
يضرب فى	×
العرض	ع
فنحصل على	=
المساحة	ح

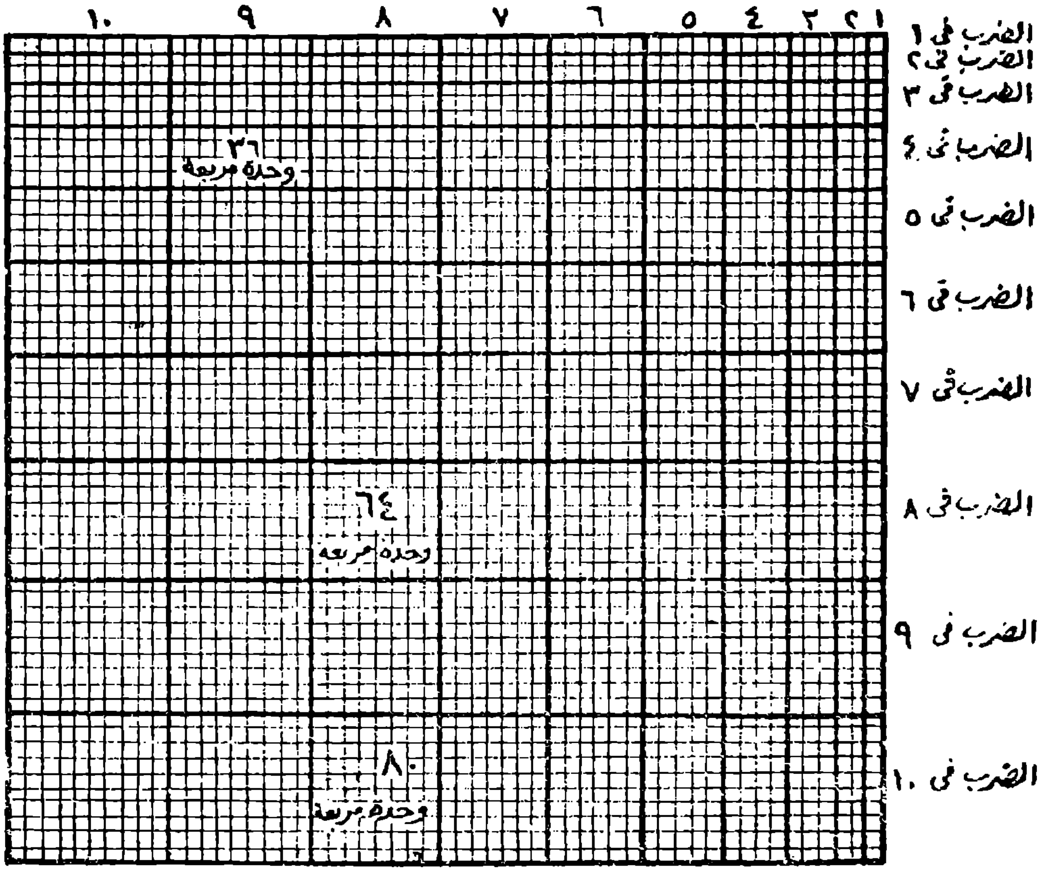
ولكى نلمس أكثر ، معنى المؤثر « × » ندرس الجملة الرياضية التى تخبرنا أن طول حجرة ماهو أربعة أمتار وعرضها ثلاثة أمتار ومساحتها إثنى عشر متراً مربعا . توجد طريقتان مختلفتان يمكن بهما ترجمة هذه العبارة . الأولى هى الطريقة الهيروغليفية أى الهندسة وهى أن نرسم مستطيلا طوله ٤ سنتيمترات وعرضه ٣ سنتيمترات ونقسم الطول والعرض إلى أربعة وثلاثة أقسام متساوية على الترتيب ، ثم نصل نقط التقسيم بمستقيمات رأسية وأفقية ، (أنظر شكل ٢٤) ونعد المربعات الموجودة داخل المستطيل فنجدها ١٢ .



(شكل ٢٤) الضرب الهيروغليفى

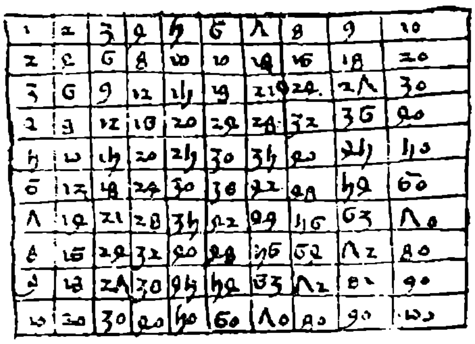
المعنى الهندسى للمؤثر « × » فى العبارة ٣ × ٤ = ١٢ هو أن نرسم مستطيلا طوله ٤ وحدات وعرضه ٣ وحدات ونقسم الطول والعرض الى أربعة وثلاثة أجزاء متساوية على الترتيب ثم نصل بخطوط رأسية وخطوط أفقية ونعد المربعات الموجودة داخل المستطيل .

والطريقة الثانية هى الطريقة التحليلية التى نستخدم فيها أحد قواميس اللغة أى جدول الضرب ، فنطالع فى جدول الضرب أن ثلاث أمثال العدد ٤ أو أربعة أمثال العدد ٣ هو ١٢ . ولم يكن منذ ٤٠٠ عام يدرس من جدول الضرب أكثر من الجزء الخاص بالضرب فى إثنين ، وظل جدول الضرب يستعمل مرجعاً كالقاموس (أنظر شكل ٢٥) إلى أن ألحت الحاجة إليه عندما اضطر رجال التجارة إلى إجراء العمليات الحسابية ، فأصبح جزءاً من منهاج . الدراسة . وقد تبدو الطريقة الهيروغليفية



جدول الضرب بطريقة خاصة

كل مرة نستعمل فيها هذا الجدول علي أن نعد المربعات داخل مستطيل معين



(شكل ٢٥)

جدول الضرب بطريقة عامة

جدول ضرب يرجع الى القرن الخامس عشر

قد دونت في الجدول الثاني أعداد المربعات الموجودة داخل المستطيلات

فى الشكل الاول ، وعند ايجـاد حاصل ضرب عددين نقرأ العـدد الذى يقع فى نفس الصف مع أحد العـددين المضروبين وفى نفس العمود مـع العدد الآخر ، وقد كان هذا الجدول يستعمل فى القرن الخامس عشر كمرجع كما نستخدم نحن الآن جـداول اللوغاريتمات .

إنها طريقة غريبة ولكن يرجع ذلك إلى أن جدول الضرب أصبح جزءاً من إرثنا . فكما أن اللغة الهيروغليفية سبقت اللغة الأبجدية هكذا الكلمة الهيروغليفية «×» التى تعنى أرسم مستطيلا بمقياس رسم مناسب وأحسب عدد المربعات التى داخله هى أول طريقة عبرت عن معنى الفعل «نضرب» .

وهذا المثال البسيط يكشف لنا أمراً هاما فى تاريخ الرياضيات وهو أن تقدم الرياضيات كان أساسه اكتشاف الطرق العامة لحل المسائل بدلا من الطرق الخاصة ، فالطريقة الهيروغليفية طريقة خاصة بمعنى أنه كلما أردنا إيجاد مساحة المشمع الذى نفرش به أرضاً معينة علينا أن نرسم رسماً جديداً ، بينما الطريقة التحليلية هى طريقة عامة بمعنى أن حواصل ضرب الأعداد فى بعضها مدونة ويرجع إليها فى أى مسألة . وإذا قارنا بين الطريقة الهيروغليفية والطريقة التحليلية من حيث التعبير بها عن أفعال اللغة الرياضية لأمكننا القول أن التعبير بالطريقة الأولى يشبه إعطاء السائح جواز سفر إلى فرنسا مثلا وتركه يتعلم اللغة الفرنسية هناك بالاندماج مع الأفراد بينما يشبه التعبير بالطريقة الثانية إعطاء السائح جواز سفر إلى فرنسا وأيضاً كتاباً فى اللغة الفرنسية يمكنه أن يدرس منه هذه اللغة . فالطريقة الأولى هى طريقة فردية بينما الطريقة الثانية هى طريقة إجتماعية . يشبه أيضاً التعبير عن الأفعال بالطريقة الأولى إعطاء السائح خريطة حربية لمدن فرنسا وتركه يتنقل بين مدنها وطرقها بواسطة هذه الخريطة بينما تشبه الطريقة الثانية إعطاء السائح كتابا يتضمن أسماء المدن المختلفة وأسماء الطرق العديدة بكل مدينة وأيضاً وسائل الإنتقال المختلفة بهذه الطرق ، فالطريقة الأولى هى طريقة الفرد أما الثانية فهى طريقة المجتمع .

– وفى بعض اللغات النحوية ، كاللغة الإنجليزية مثلا ، تستعمل نفس الكلمة مرة إسما ومرة فعلا . هكذا من سوء الحظ يوجد نفس الشىء فى اللغة الرياضية ، فنكتب $١٠^٢$ ونقصد بها ١٠ × ١٠ فالرقم ١٠ هو عدد بينما الرقم ٢ مكتوبا إلى أعلى اليسار هو مؤثر . وعندما نكتب $٢^{١٠}$ نقصد ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢

فالرقم ٢ هو عدد بينما الرقم ١٠ إلى أعلى اليسار هو مؤثر . إلا أن العيب فى اللغة الرياضية أقل سوءا منه فى اللغة الإنجليزية لأننا نكتب المؤثر ٢ أو ١٠ فى موضع غير عادى كما نكتبه عادة بالخط الرفيع .

والرموز أيضا ، تستخدم مرة كأعداد وأخرى كمؤثرات فالعبارة

$$ا^{ن} = ا × ا × ا × ... ، ن \text{ من المرات}$$

هى جملة رياضية فيها ا عدد ، ن مؤثر . والعبارة

$$ن_{ا} = ن × ن × ن × ... \quad ا \text{ من المرات}$$

هى جملة أخرى فيها ن عدد ، ا مؤثر .

ـ والطريقة التحليلية يمكن أن نعبر بها عن مؤثرات عديدة لا يمكن التعبير عنها بالطريقة الهيروغليفية ، ونرى ذلك بوضوح إذا اعتبرنا الأعداد ١٠^٢ ، ١٠^٣ ، ١٠^٤ ، ويوضح الجدول الآتى كيفية التعبير عنها بالطريقتين .

المؤثر	اللغة التصويرية الأغريقية	اللغة التحليلية الهندية
٢	مساحة مربع طول ضلعه ١٠ وحدات هى ١٠٠ وحدة مربعة	حاصل الضرب ١٠ × ١٠ يساوى ١٠٠
٣	حجم مكعب طول ضلعه ١٠ وحدات هو ١٠٠٠ وحدة مكعبة	حاصل الضرب ١٠ × ١٠ × ١٠ يساوى ١٠٠٠
٤	لا يمكن التعبير عنه	حاصل الضرب ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ يساوى ١٠٠٠٠

والعدد ٧^٣ مثلا يعطينا مثالا يوضح لنا كيف يفيد المؤثر الواحد عدة معان . فالمؤثر ٣ مكتوبا إلى أعلى اليسار يعنى أحد ثلاثة أمور هى :

(ا) أوجد حجم المكعب الذى طول ضلعه ٧ وحدات

(ب) أجرى عملية الضرب ٧ × ٧ × ٧

(ح) أنظر مكعب العدد ٧ فى جداول مكعبات الأعداد

وكما سنرى فى الباب العاشر يفيد هذا المؤثر معنى أعم من (ح) تجمعه جملة ذات أربعة أفعال هى :

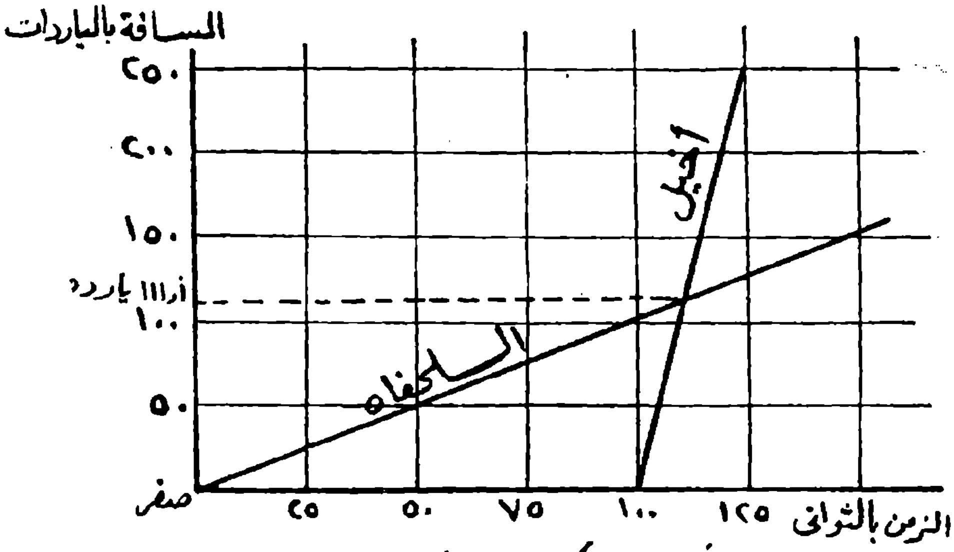
٧^٣ = العدد المقابل للعدد (٣ لو ٧) .

وتعنى أن نقرأ لوغاريتم العدد ٧ من جداول لوغاريتمات الأعداد ، ثم نضرب هذا اللوغاريتم فى ٣ ، ثم نقرأ العدد المقابل للعدد الناتج من جداول الأعداد المقابلة للوغاريتمات ، فنحصل على العدد ٧^٣ . ولكن نرى الفائدة العظيمة لهذين الجدولين الرياضيين فى توفير الوقت إذا حسبنا العدد ٧٧٧^٣ .

– وفى اللغة الرياضية يعبر الحرف س فى العبارة ١٠^س عن عدة مؤثرات مختلفة ، فهو يعبر عن المؤثرات ٢ ، ٥ ، ٨ فى العبارات ١٠^٢ ، ١٠^٥ ، ١٠^٨ . يشبه ذلك تماما فى اللغة الأبجدية ، الفعل الذى يتضمن معناه عدة أفعال أخرى ، فنقول أن فلان يقيم بأحد الفنادق ونعنى أنه ينام فيه ، ويتناول طعامه فيه ، وأيضاً يدفع أجرته فى نهاية كل شهر . بل وتوجد فى اللغة الأبجدية أفعال يتضمن معناها مجموعة كبيرة من الأفعال ، فنقول فلان سيزور موسكو ونعنى أنه سيحصل على جواز سفر إلى روسيا ويحصل على تذاكر السفر ، ويجهز عفشه ، ويركب الطائرة ، ويصل موسكو ، ويستأجر حجرة بأحد الفنادق ويقيم بها فترة معينة ... ثم يعود . يوجد نوع مماثل من المؤثرات الرياضية سوف نتعرض لها فيما بعد .

– ولكى لا يتيه الرياضى بين الرموز المختلفة يلجأ فى كثير من المسائل إلى الطرق الهيروغليفية ولاسيما الحديث المبتكر فيها . فيستخدم مثلا الرسم البيانى فى حل مسألة أخيل والسلحفاة (أنظر شكل ٢٦) التى عجزت عن حلها الهندسة الإقليدية . وسنرى فى الباب التاسع عندما نتكلم عن الرسم البيانى كيف نرسم المنحنى ص = س^٥ الذى عجزت الهندسة الإقليدية عن رسم نموذج له .

– وقد أدى الميل إلى حل بعض المسائل العددية المشكوك فيها ، بالطرق الهندسية إلى ظهور مايسمى البرهان ، فالحقائق الرياضية تكتشف عادة عند دراسة مسائل خاصة ثم تبرهن فيما بعد ، وبرهان مسألة معينة يبين كيف تتوقف على القوانين المعروفة من قبل ، وتكون البراهين الرياضية الأولى لمسألة معينة ، عادة غير دقيقة إلى أن تبرهن فيما بعد بدقة تامة من أحد الرياضيين النابغين ، ولعل أصدق ما قيل عن براهين



شكل (٢٦)

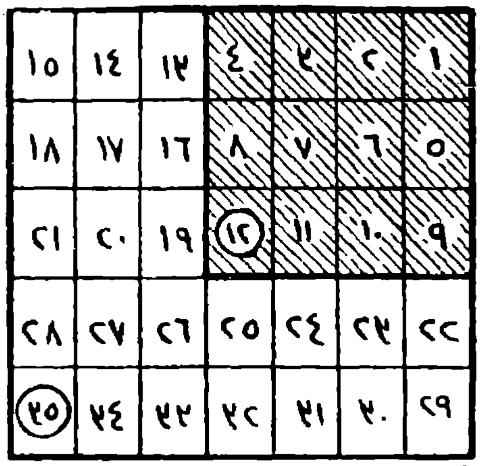
لم تتمكن الهندسة الاغريقية من حل المسألة التى عرضها الفيلسوف زينو وهى سباق أخيل والسلحفاة وذلك لان الهندسة الاغريقية تناولت الفراغ فقط ولم تتناول الزمن • ولكن عندما بدأ رجال التجارة يتنقلون بين أجزاء المعمورة المختلفة رسموا الخرائط التى توضح خطوط الطول وخطوط العرض • من هذه الخرائط نشأت فكرة الهندسة البيانية التى أدخل فيها الزمن فأصبحت تمدنا الهندسة البيانية بحل سهل سريع لايجاد الزمن الذى عنده يلحق أخيل بالسلحفاة ، وسنشرح ذلك فى الباب التاسع •

النظريات المختلفة هو قول الأستاذ « هاردى » أستاذ الرياضة بجامعة كامبردج عندما تحدث عن أحد فروع الرياضة فقال : « إن نظريات الأعداد بأجمعها نشأت بطريق المشاهدة ، فقد خمنت جميع النظريات قبل أن تبرهن بمائة عام أو أكثر ، وقد خمنت جميعها بعد القيام بأعمال حسابية ضخمة » .

ومن بين الأمثلة التى توضح لنا كيف تعرف النظريات قبل برهنتها بزمن بعيد نذكر طريقة لإيجاد المساحات المختلفة قد عرفت منذ مئات السنين قبل ابتكار القوانين الخاصة بالكسور . هذه الطريقة التى تبين لنا أن

$$\frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٧} = \frac{١٢}{٣٥}$$

ترينا كيف حاول العرب تحقيق قوانين الكسور . وهذه الطريقة باللغة الرياضية



طول ضلع المربع الوحدة ومساحته الوحدة المربعة

شكل (٢٧)

طريقة هندسية لإثبات المعادلة $\frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٧} = \frac{١٢}{٣٥}$

الهيروغليفية هي أن نأخذ ثلاثة أجزاء متساوية على مستقيم طوله خمسة من هذه الأجزاء لتمثل الكسر $\frac{٣}{٥}$ ، ونأخذ أربعة أجزاء مماثلة على مستقيم طوله سبعة من هذه الأجزاء لتمثل الكسر $\frac{٤}{٧}$ ، ثم نصل بخطوط رأسية وأخرى أفقية كما هو موضح في شكل (٢٧) ، فنحصل على ١٢ مربعا من بين ٣٥ مربعا . وفي الواقع يعطينا هذا المثال تمثيلا صادقا للقانون العام للكسور

$$\frac{أ}{ب} \times \frac{حـ}{ء} = \frac{أحـ}{بء}$$

وإجابة على السؤال «إلى أي حد يمكن اعتبار هذا الشكل برهانا» نقول أن هذا الشكل يكشف لنا العلاقة بين ما كان معروفا من قبل وهو طريقة إيجاد المساحات المختلفة وما لم يكن معروفا بعد وهو قوانين الكسور . وهذه الكسور تمثل المساحات بطريقة تقريبية فنكيف نقول أن قانون الكسور قد تبرهن بواسطة هذا الشكل ، جوابنا على هذا هو أن كلا منهما يفيد نفس المعنى أو أن الشكل هو صورة كارتوجرافية لقانون الكسور .

— وكما أنه يوجد بعض الاختلاف بين قواعد اللغات المختلفة هكذا تختلف قواعد اللغة الرياضية بعض الاختلاف عن قواعد اللغات الأبجدية . فالأفعال في اللغة الرياضية جميعها أفعال متعدية وذلك نتيجة مباشرة لكون اللغة الرياضية ليست لغة الفكر أو

الخيال وإنما لغة الفعل والعمل . وتقسم الأفعال فى اللغة الرياضية بطرق مختلفة أهمها طريقتان . الطريقة الأولى هى أن تقسم من حيث علاقتها بباقى الجملة وفيها تنقسم إلى مجموعتين مؤثرات انعكاسية ومؤثرات غير انعكاسية فالمؤثر « + » هو مؤثر انعكاسى بمعنى أن العبارة ٣ + ٤ هى نفسها العبارة ٤ + ٣ ، والمؤثر « × » أيضا مؤثر انعكاسى لأن العبارة ٣ × ٤ هى نفسها العبارة ٤ × ٣ . أما المؤثران « — » و « ÷ » فهما مؤثران غير انعكاسيين ، فالعبارة ٤ — ٣ تختلف عن العبارة ٣ — ٤ ، والعبارة ٤ ÷ ٣ تختلف كل الاختلاف عن العبارة ٣ ÷ ٤ . وتشبه المؤثرات الانعكاسية قولنا أغسل وجهى عندما استيقظ كما تشبه المؤثرات غير الانعكاسية قولنا سأذهب إلى مصلحة البريد لأسجل خطابا الذى لا يعنى القول سأسجل خطابا بالاذهب إلى مصلحة البريد .

والطريقة الثانية هى أن تقسم الافعال من حيث علاقتها ببعضها وهى أهم من الطريقة السابقة إلا أنه لا يوجد ما يناظرها تماما فى اللغة الابجدية فهى تارة تناظر تقسيم الفعل إلى المبنى للمعلوم والمبنى للمجهول وتارة تشبه التفرقة بين أفعال الشك وأفعال اليقين فنقول أن المؤثر « — » هو مقلوب المؤثر « + » والمؤثر « ÷ » هو مقلوب المؤثر « × » ويمكننا أن ندرك معنى ذلك عندما نجرى عملية طرح أو عملية قسمة ، فإذا كان

٣ + ٤ = ٧

فإن ٧ — ٤ = ٣

وأيضاً ٧ — ٣ = ٤

فبدلا من أن نترجم العبارة الثالثة إلى العبارة « اطرح ثلاثة من سبعة فنحصل على أربعة » يمكن أن نترجمها إلى العبارة « العدد ٤ هو العدد الذى إذا أضيف إلى ٣ لكان الناتج ٧ ، وهذه العبارة الأخيرة تمثل حاصل الجمع فى صيغة الفعل المبنى للمجهول .

وإذا كانت ٤ ÷ ٣ = ١ $\frac{1}{3}$

فإن ١ $\frac{1}{3}$ × ٣ = ٤

فالعبارة الثانية التى تفيد أن حاصل ضرب ١ $\frac{1}{3}$ × ٣ يساوى ٤ تمثل حاصل الضرب فى صيغة الفعل المبنى المعلوم . بينما العبارة الأولى التى يمكن ترجمتها إلى العبارة « ماهو العدد الذى إذا ضرب فى ٣ لكان الناتج ٤ ؟ تمثل حاصل الضرب فى صيغة المبنى

المجهول . ومن الأمثلة الأخرى للمؤثر ومقلوبه نذكر أن «الجذر التربيعى» هو مقلوب المؤثر ^{٢} مكتوبا إلى أعلى اليسار فالعبارة

$$٧^{٢} = ٤٩$$

التى تعنى أن حاصل ضرب سبعة فى سبعة هو ٤٩ ، هى نفس العبارة

$$\sqrt{٤٩} = ٧$$

التى تعنى أن العدد الذى يضرب فى نفسه ليكون الناتج ٤٩ هو ٧ .

فالمؤثر $\sqrt{}$ هو مقلوب المؤثر ٢ مكتوبا إلى أعلى اليسار . والعبارة الأولى هى صورة المبنى للمعلوم لعملية التربيع والعبارة الثانيــــة هى صورة المبنى للمجهول لنفس العملية .

وأيضاً المؤثر $\sqrt[٣]{}$ هو مقلوب المؤثر ٣ مكتوبا إلى أعلى اليسار

والمؤثر $\sqrt[٤]{}$ هو مقلوب المؤثر ٤ مكتوبا إلى أعلى اليسار والعبارتان $٢^{٤} = ١٦$ ، $\sqrt[٤]{١٦} = ٢$ تناظران العبارتين «فلان كتب هذا المؤلف» و«هذا المؤلف كتب بواسطة فلان» .

ونلاحظ أنه إذا وضع مقلوب المؤثر أمام المؤثر نفسه انعدم تأثير هذا المؤثر . يمكن تشبيه ذلك بما يأتى ، نفرض أننا سألنا شخصا ما عن أخبار معينة ، فأجاب بالقول «أظن أننى أستطيع أن أؤكد أن هذه الأخبار صحيحة» ، هذه العبارة لاتجعلنا نعرف ماإذا كانت هذه الأخبار صحيحة أم لا ، فتتركنا كما لو كنا لم نسأل ولم نجاب ، هذا مايحدث عندما يوضع مقلوب المؤثر أمام المؤثر نفسه كما فى العبارتين

$$\sqrt[٣]{٢٧} = \sqrt[٣]{٣^{٣}} = ٣$$

$$\sqrt[٥]{٣٢} = \sqrt[٥]{٢^{٥}} = ٢$$

فالمؤثر $\sqrt[ﻫ]{}$ الذى هو مقلوب المؤثر ﻫ موضوعا إلى أعلى اليسار عنـــدما يكتب أمامه يزيل تأثيره . ومن الأمثلة الأخرى العدد المقابل للوغاريتم العدد . فالعبارة «العدد المقابل للعدد (لو ﻫ) تعنى اقرأ لوغاريتم العدد ﻫ من جداول لوغاريتمات

الأعداد ثم اقرأ العدد المقابل لهذا اللوغاريتم من جدول الأعداد المقابلة للوغاريتمات فنحصل على العدد ٥ نفسه ، وسنشرح فى الباب العاشر بالتفصيل كيفية استخدام هذين الجدولين . ويمكن للقارىء أن يعمل جدولا يبين مربعات الأعداد (مثل $١^٢ = ١$ ، $٢^٢ = ٤$ ، $٣^٢ = ٩$ . . . . الخ) فيلاحظ أن هذا الجدول نفسه يصح أن يكون جدولا للجذور التربيعية لبعض الأعداد بل ويمكن استخدامه فى إيجاد الجذر التربيعى لأى عدد كما سنوضح فى مثال قادم ، إلا أننا نلاحظ أشياء أخرى كثيرة سنعود إلى الكلام عنها بالتفصيل فى الباب القادم .

- الجذر التربيعى لعدد ما فى اللغة الرياضية الهيروغليفية هو طول ضلع المربع الذى مساحته هذا العدد . فالجذر التربيعى للعدد ٤٩ أى ٧ هو طول ضلع المربع الذى مساحته ٤٩ وحدة مربعة . وكما ذكرنا سابقاً أن الإغريق قد أدركوا أنه لا يمكن استخدام الأعداد المضبوطة الصحيحة أو الكسرية فى قياس أشياء معينة ، نرى هذه الصعوبة عندما نعتبر الجذر التربيعى للعدد ٢ . فمع أنه يمكننا إيجاد عدد يقرب جداً من الجذر التربيعى للعدد ٢ بحيث أن مساحة المربع الذى طول ضلعه هذا العدد يختلف عن العدد ٢ بمقدار صغير جداً أيما نريد إلا أنه لا يمكننا التعبير عن الجذر التربيعى العدد ٢ بعدد مضبوط كالعدد ٣ ثيران . وباستخدام جداول مربعات الأعداد المعطاة فى نهاية الجزء الثانى من هذا الكتاب يمكننا إيجاد $\sqrt{٢}$ مقرباً إلى أى عـــدد نريد من الأرقام العشرية . فحيث أن $\sqrt{١} = ١$ ، $\sqrt{٤} = ٢$ إذن $\sqrt{٢}$ أصغر من ٢ وأكبر من ١ . لذلك نعتبر القيمة ١,٥ من جدول مربعات الأعداد. نقرأ $١٥^٢ = ٢٢٥$ أى أن $١,٥^٢ = ٢,٢٥$ ، $١٤^٢ = ١٩٦$ أى أن $١,٤^٢ = ١,٩٦$ وإذن $\sqrt{٢}$ أصغر من ١,٥ وأكبر من ١,٤ وبما أن العدد ١,٩٦ أقرب إلى ٢ من العدد ٢,٢٥ إذن $\sqrt{٢}$ أقرب إلى ١,٤ منه إلى ١,٥ . وبإجراء عمليات الضرب العادية نجد أن $١,٤٢^٢$ أكبر من ٢ ، $١,٤١^٢$ أصغر من ٢ . وإذا كنا نريد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{٢}$ بحيث يكون الخطأ نحو ١ ٪ يكفى أن نعتبر القيمة ١,٤١٥ ± ٠,٠٠٥ . ويمكننا أن نعتبر $\sqrt{٢}$ أى عدد محصور بين ١,٤١٤ ، ١,٤١٥ إذا أردنا خطأ أقل من ١ ٪ .

وتوجد طريقة أخرى يمكننا بواسطتها إيجاد الجذور التربيعية لمثل هذه الأعداد التى تسمى بالجذور الصماء أو الأعداد غير القياسية . فاذا أردنا مثلا إيجاد الجـذر

التربيعي للعدد ١٠ نبحث في جدول مربعات الأعداد عن عددين أحدهما يقرب جداً من عشرة أمثال الثاني . فنجد مثلا العددين ٩٦٠٤ ، ٩٦١ حيث ينقص العدد الأول عن عشرة أمثال العدد الثاني بمقدار ٦ من ١٠٠٠٠ أى ما يعادل ٠,٠٦ ٪ . والعدد الأول هو ٩٨^٢ والثاني ٣١^٢ . وإذن فالعدد $(\frac{٩٨}{٣١})^٢$ هو عدد قريب جداً من العدد ١٠ . وإذن الجذر التربيعي للعدد ١٠ يقرب جداً من $\frac{٩٨}{٣١}$ أى ٣,١٦ . ويمكن للقارىء أن يجري عملية الضرب ٣,١٦ × ٣,١٦ ليدرك مدى قرب العدد الناتج من العدد ١٠ .

تكوين الجمل : تنقسم قواعد اللغة إلى قسمين ، قسم يشمل القواعد الخاصة بالكلمات نفسها من أسماء وأفعال ... الخ ، وقسم يشمل القواعد الخاصة بترتيب هذه الكلمات لتكوين الجملة . وقد تكلمنا فيما سبق عن القسم الأول ونتكلم فيما يأتي عن القسم الثاني فنقول أن القواعد الخاصة بتكوين الجمل الرياضية هي قواعد بسيطة للغاية لأن اللغة الرياضية ليست لغة عاطفية . فجميع الجمل في هذه اللغة تتكون بنفس الكيفية وجميعها تحوى الفعل نحصل على الذي يكتب « = » . ويشطر هذا الفعل الجملة الرياضية شطرين يسميان طرفا المعادلة ، وتتناول القواعد الخاصة بتكوين الجمل طرق التحوير في أحد طرفي المعادلة أو طرق التحوير في الطرفين معاً .

والنقطة الأساسية التي يجب أن نلتفت إليها عند إجراء بعض التحوير في أحد طرفي معادلة هي ترتيب الكلمات أى الحدود في هذا الطرف . إذ توجد كلمات يمكن نقلها من مواضعها إلى مواضع أخرى وتوجد كلمات أخرى لا يمكن تغيير مواضعها . فمثلا نقول أن « البابا هو رئيس الكنيسة الكاثوليكية » ونعني نفس الشيء عندما نقول « رئيس الكنيسة الكاثوليكية هو البابا » ، ولكن هذا لا يعني أن « الكنيسة الكاثوليكية هي رئيسة البابا » أو « رئيس البابا هو الكنيسة الكاثوليكية » . وقد شرحنا هذه الصعوبة في اللغة الرياضية عندما تحدثنا عن المؤثرات « + » ، « × » ، « — » ، « ÷ » فكل من المؤثرين « × » ، « + » يجعل الأعداد تقبل تغيير مواضعها ، فمثلا

$$ا ب = ب ا$$

أى أن $٣ \times ٧ = ٢١ = ٧ \times ٣$

، ا (ب+ح) = ا (ح+ب) = (ب+ح) ا = (ح+ب) ا

أى أن ٧ (٣ + ٢) = ٧ (٢+٣) = ٣٥ = (٣+٢)٧ = (٢+٣)٧

والتحويرات التى تجرى فى أحد طرفى معادلة هى تلك التحويرات التى لا تؤثر على قيمة هذا الطرف ، فاذا كانت تغير قيمته لابد من إجراء نفس التحويرات فى الطرف الآخر . فمثلا إذا كانت س = ص يمكننا أن نكتب

(١) س + ا = ص + ا

(٢) س — ا = ص — ا

(٣) ا س = ا ص

(٤) $\frac{\text{س}}{\text{ا}} = \frac{\text{ص}}{\text{ا}}$ (حيث ا لا تساوى صفراً)

وفى المعادلة الرياضية نضع عادة الكميات المجهولة فى الطرف الأيمن والكميات المعلومة فى الطرف الأيسر وتقرأ المعادلة بإحدى الطريقتين

إعمل كذا وكذا لتحصل على ما تريد إيجاده

أو الذى تريد إيجاده يمكن الحصول عليه بأجراء كذا وكذا .

ويمكن تغيير الحدود بإحدى القواعد الأربعة السالفة الذكر .

ويمكن الجمع بين القاعدتين الأولى والثانية فى القاعدة الآتية : إذا كان أحد طرفى معادلة يحتوى على مقدار مضاف إلى مقادير أخرى فإن هذا المقدار يمكن نقله إلى الطرف الآخر على أن تتبدل إشارته من + إلى — أو من — إلى + . فإذا كان

س + ا = ص

مثل ٣ + ٤ = ٧

فإن س + ا — ا = ص — ا

أى س = ص — ا

مثل ٣ = ٧ − ٤
وإذا كان س − ب = ص
مثل ٩ − ٥ = ٤
فإن س − ب + ب = ص + ب
أى س = ص + ب
مثل ٩ = ٤ + ٥

وسنشرح القاعدة التى تجمع بين القاعدتين (٣) ، (٤) باعطاء مثالين من حياتنا اليومية . لكن قبل أن نعمل ذلك علينا أن نلاحظ أن (٣) يمكن كتابتها على الصورة: ١س/١ = ١ص/١ . وسنرى فيما بعد أنه عند دراسة الهندسة يمكننا أن نوفر الجزء الأكبر من وقتنا إذا نحن لم نعرقل أنفسنا بالصعوبات الجمة التى وضعتها «النسبة» أمام قدماء الرياضيين ، هذه الكلمة التى تستعمل مع الكميات المرتبطة بكلمات مثل « فى » ، « ل » . . . فمن الأمثلة العادية « الدخل كذا فى السنة » و « المرتب كذا فى الشهر » و «الربح كذا فى المائة» و « السرعة كذا فى الساعة » و «استهلاك البترول جالونا لكذا ميل » . . . . الخ .

والمثال الأول الذى نعطيه هو استهلاك البترول . تقدر كمية البترول التى تستهلكها سيارة بمقدار جالون واحد لكل ٣٥ ميلا ، ولنفرض أن البائع صدق فى هذا القول، فهذا يعنى أنه إذا قسمنا المسافة المقطوعة بالأميال ف على عدد الجالونات المستهلكة ن فإن خارج القسمة لا بد أن يكون ٣٥ أى أن

ف ÷ ن = ٣٥

أى ف/ن = ٣٥

يستخدم سائق السيارة هذه العبارة فى حل ثلاث مسائل .

(١) إذا كان السائق من رجال البوليس ويريد القبض على شخص هارب ، وعليه أن يقوم برحلة من القاهرة إلى الاسكندرية دون أن يتوقف فى الطريق ، فهو

يعلم كم ميلا عليه أن يقطعها بدون أن يطالب مزيداً من البترول ، وأذن يعلم كم جالوناً يلزمه قبل قيامه ، أى أن عدد الجالونات

$$ن = \frac{ف}{٣٥}$$

فهو يقسم عدد الأميال التى يريد أن يقطعها على ٣٥ ميلا ليحصل على عدد الجالونات اللازمة له .

(٢) وإذا بدأ السائق رحلته من مكان الحادثة وهو يعلم كمية البترول التى بالسيارة عند قيامه ، ثم لحق بالشخص الهارب فى مكان ما ، يمكنه أن يعرف بعد هذا المكان عن مكان الحادثة . وذلك بأن يقرأ كمية البترول الباقية بالسيارة بواسطة المؤشر الخاص ، وبطرح هذه الكمية من الكمية الأولى يعلم عدد الجالونات التى استهلكت أثناء الرحلة وتكون المسافة التى قطعها

$$ف = ٣٥ ن$$

أى أنه يضرب عدد الجالونات فى ٣٥ فيحصل على عدد الأميال التى أبتعدها الجانى عن مكان الحادثة .

(٣) ولنفرض أن الجانى اعترف بمكان الحادثة وأيدت ذلك كمية البترول المستهلكة إلا أن رجل البوليس أراد أن يتحقق إنه لم يستنفذ بعض البترول هباء أثناء الرحلة ، فهو يرحل بالسيارة لفترة معينة ويقسم عدد الأميال التى يقطعها على عدد الجالونات المستهلكة فاذا كان خارج القسمة يساوى ٣٥ فان اعتراف الجانى لاكذب فيه ، أى أن تحديد موضع القبض على الجانى بالنسبة إلى مكان الحادثة يكون مضبوطاً إذا كان

$$٣٥ = \frac{ف}{ن}$$

هذه المسائل الثلاث التى تتعلق باستهلاك البترول يمكن تلخيصها فى عبارة حاصل ضرب الطرفين والوسطين :

$$\frac{ف}{ن} \times \frac{٣٥}{١}$$

وهى تناظر تماما العبارات الثلاث :

منح المدرس التلميذ جائزة

منح التلميذ جائزة من مدرسه

منحت جائزة للتلميذ من مدرسه

التى تعنى نفس الشىء ولكنها لاتعنى أن التلميذ منح المدرس جائزة .

أما المثال الثانى فنجده فى كتب الطهى وهو يشرح لنا السبب فى كتابة ٣٥ على الصورة غير المألوفة $\frac{٣٥}{١}$. فى النسب عندما نقول « أضف هذا المقدار من كذا إلى ذاك المقدار من كذا » يصح أن يكون « هذا المقدار » كسراً . فيخبرنا كتاب الطهى أنه عند عمل الألماسية (الألماظية) نضيف $\frac{٣}{٢}$ أوقية من الجلاتين إلى أقة من المحلول (المحلول يحوى الماء وعصير الليمون والسكر المذاب) . هذه العبارة التى تكتب

$$\frac{\text{ح}}{\text{ل}} = \frac{٣}{٢}$$

$$\text{أى} \quad \frac{\text{أوقيات من الجلاتين}}{\text{أقات من المحلول}} = \frac{٣}{٢}$$

يمكن استعمالها بطرق ثلاث :

(١) إذا حضرنا كمية معينة من المحلول علينا أن نضيف عدداً من أوقيات الجلاتين يساوى $\frac{٣}{٢}$ من عدد أقات المحلول . أى

$$\text{ح} = \frac{٣\,\text{ل}}{٢}$$

(٢) إذا كان لدينا كمية معينة من الجلاتين ونريد أن نعمل أكبر كمية ممكنة من الألماسية علينا أن نجهز عدداً من أقات المحلول يساوى ١ ÷ $\frac{٣}{٢}$ أى $\frac{٢}{٣}$ عدد أوقيات الجلاتين ، أى

$$\text{ل} = \frac{٢\,\text{ح}}{٣}$$

(٣) إذا كان الطاهى لا يستطيع إجراء عملية حسابية بسيطة ولديه كمية من

المحلول فهو ينقلها إلى وعاء آخر على دفعات كل مرة ينقل فيها أقتين من المحلول ويضيف ثلاث أوقيات من الجلاتين وهكذا إلى أن يفرغ المحلول ، أى أن

$$٢ ح = ٣ ل$$

هذه الطرق الثلاث تتلخص فى القاعدة

$$\frac{ح}{ل} \times \frac{٣}{٢}$$

(باقى أجزاء الجملة): ربما يسأل القارىء هل هناك فى اللغة الرياضية ما يناظر باقى أجزاء الجملة فى اللغة الأبجدية . من البديهى ليس هناك حروف نداء أو حروف تعجب لأن هذه الحروف ليس لها موضع فى لغة العمل، فهى بقايا الأصوات القديمة التى كان يستخدمها الإنسان البدائى قبل أن يتعلم اللغات الاجتماعية . ولكن توجد فى اللغة الرياضية الصفات والظروف ومن أمثلة الظروف الرقم ٣ فى العبارة $\sqrt[3]{\;}$ فالعبارة $\sqrt{\;}$ تعنى أن حاصل ضرب عدد معين فى نفسه يساوى العدد الموضوع تحت هذه العلامة ، والرقم ٣ يدلنا على عدد المرات التى يضرب فيها العدد فى نفسه . ونكتب العبارة $\sqrt{\;}$ بدون أن نكتب رقماً فوقها فنعنى بها الرقم ٢ .

ونستخدم الحرف س فى التعبير عن الأبعاد المقيسة فى اتجاه معين والحرف ص فى التعبير عن الأبعاد المقيسة فى إتجاه آخر ونكتب $س_{ا}$ أو $ص_{ب}$ فنعنى قيمة خاصة للحرف س أو الحرف ص فالحرف ا أو ب صفة ، والعبارة $س_{ا}$ تناظر تماما العبارة ثور بنى .

يوجد أيضاً نوع آخر من الكلمات هو إسم الفاعل الذى يجمع فى معناه بين الأسم والفعل مثل كلمة « كاتب » ، يناظر ذلك فى اللغة الرياضية العدد السالب مثل -٣ والعدد التخيلى مثل $\sqrt{-٣}$ فليس من السهل أن نقول أن -٣ عدد إلا إذا نظرنا إليها من ناحية معينة وفى الواقع تجمع -٣ فى معناها بين العدد والمؤثر فهى إسم الفاعل فى اللغة الرياضية . وأكثر الشعوذة التى تحيط بالأعداد التخيلية التى تتعرض لها عند توليد الكهرباء للإنارة ، تنتج من تعودنا الحديث عنها باعتبارها أعداداً . وكونها ليست أعداداً تجعلها تبدو أنها تخيلية رغم أننا نتعرض لها عند توليد الكهرباء .

ويوجد فى اللغة الرياضية حرفا عطف هما ∴ (إذن) ، ∵ (بما أن) .

(الأسلوب :) نلمس شبها آخر بين اللغة الرياضية واللغة الأبجدية . فنى اللغة الأبجدية نحاول دائماً أن نتجنب الأسهاب أى لا نذكر عدة كلمات يمكن الإستعاضة عنها بكلمة واحدة أو بعدد أقل من الكلمات وذلك لأن الاسهاب فى العبارة يقلل من قيمتها ، هكذا فى اللغة الرياضية ، التى لا تستخدم إلا فى التحدث عن المسائل الهامة ، تتجنب دائماً الإسهاب فى العبارة . ويمنع الإسهاب عادة بإحدى طريقتين الأولى هى جمع الحدود المتشابهة والثانية هى الإختصار . أما جمع الحدود المتشابهة فهو كما فى العبارة

$$\text{١٣} - \text{ح} + \text{ب} + \text{١} - \text{٢ح} + \text{ب} = \text{١٤} + \text{٢ب} - \text{٣ح}$$

التى يمكن التأكد من أنها صحيحة بإعطاء ا ، ب ، ح قيما خاصة . والاختصار هو إزالة كمية مضافة ومطروحة فى نفس الوقت أو إزالة كمية مضروب فيها ومقسوم عليها فى وقت واحد . فنى الحالة الأولى

$$\text{١٣} + \text{ب} - \text{ب} = \text{١٣}$$

هذه العبارة ، يمكن لسهولتها ، اعتبارها بديهية ، فاضافة وطرح نفس العدد لا يحدثان أى تأثير وفى الحالة الثانية

$$\frac{\text{٦}}{\text{١٦}} = \frac{\text{٢} \times \text{٣}}{\text{٢} \times \text{٨}} = \frac{\text{٣}}{\text{٨}}$$

وإذا استخدمنا الرموز نكشف عن القاعدة العامة

$$\frac{\text{اب}}{\text{بح}} = \frac{\text{اب}}{\text{حب}} = \frac{\text{ا}}{\text{ح}}$$

ويمكن إثبات ذلك بسهولة باستخدام قاعدة ضرب الكسور فى بعضها هكذا

$$\frac{\text{ب}}{\text{ب}} = \text{١}$$

وإذن $\frac{\text{ب}}{\text{ب}} \times \frac{\text{ا}}{\text{ح}} = \frac{\text{ا}}{\text{ح}} \times \text{١}$

وإذن $\frac{\text{ب ا}}{\text{ب ح}} = \frac{\text{ا}}{\text{ح}}$.

وتوجد ملاحظة أخرى تخص الاسلوب يجب الالتفات اليها ، وهى أنه حين التحدث علينا أن لانقص على السامعين أخبـــارا غير لازمة الفائدة ، وعلينا الا نستعمل نفس الكلمة عدة مرات ، فاستعمال نفس الكلمة مرارا عديدة يزعج السامع كما يزعجه الصوت المتقطع الذى يحدثه الماء المتساقط من صنبور لم يحكم سداده . فنى الحديث نضحى بسهولة النطق فى سبيل إرضاء نفس السامع ، وربما كان من مبررات التحامل الشديد على فكرة وجود لغة واحدة مبسطة عالمية ، رغم شدة الحاجة السريعة اليها ، حقيقة الأمر أن اللغات القديمة غنية فى مترادفاتها . هكـذا فى اللغة الرياضية العالمية نضحى بكل شيء فى سبيل أن تكون العبارة واضحة بقدر الإمكان ، ولذلك نتجنب دائماً كتابة نفس العملية بطرق مختلفة .

الحذف : عند تكوين الجمل يمكن حذف بعض الكلمات فنقول مثلا « قرأت الكتاب » ونعنى « أنا قرأت الكتاب » . هكذا فى اللغة الرياضية نحذف العدد ١ عندما يكون مضروبا فيه أو مقسوما عليه عدد آخر ، وذلك لأن هذا الحـذف لايؤثر على النتيجة ، فمثلا

$$\frac{١}{١} = ١ ، ١ = ١ \times ١ ، ١ = ١^{١} ، ١ = ١$$

وبالانتباه إلى العدد المحذوف ١ يمكننا كتابة العبارة

$$ا س = ب ص$$

على صورة طرفين ووسطين

$$\frac{ا س}{١} = \frac{ب ص}{١}$$

ومنها :

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ص}{س} ، \frac{س}{ص} = \frac{ب}{ا} ، \frac{س}{ب} = \frac{ص}{ا}$$

وهناك حالات أخرى يجب الانتباه فيها إلى العدد المحذوف ١ ، وذلك عندما نريد إيجاد العلاقة بين مجموعة معينة من الأعداد ، ففى مجموعة الأعداد :

٢ ، ٢ (٣) ، ٤ (٣) ، ٨ (٣) ، ١٦ (٣)

تسمى الأعداد ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ معاملات ٣ ، ونكتب العدد الأول ١ (٣)، ونرى بوضوح العلاقة بين المعاملات .

وفى المجموعة :

$$\text{س} ،\ ٣\,\text{س}^{٣} ،\ ٥\,\text{س}^{٥} ،\ ٧\,\text{س}^{٧}$$

نرى بسهولة الارتباط بين معاملات قوى س إذا نحن كتبنا المجموعة :

$$١\,\text{س}^{١} ،\ ٣\,\text{س}^{٣} ،\ ٥\,\text{س}^{٥} ،\ ٧\,\text{س}^{٧} .$$

ومن الأشياء التى تستحق الذكر ، العبارة

$$\frac{١}{١} = ١$$

التى تمكننا من معرفة الارتباط بين مجموعه مثل

$$١ ،\ \frac{٤}{٥} ،\ \frac{٢}{٣} ،\ \frac{٤}{٧}$$

إذا نحن كتبناها

$$\frac{٤}{٤} ،\ \frac{٤}{٥} ،\ \frac{٤}{٦} ،\ \frac{٤}{٧}$$

وأخيراً لا ننسى العبارة

$$١^{\text{ن}} = ١ = \sqrt[\text{ن}]{١}$$

فاذا كانت $\text{ا} = ١$ ، $\text{ب} = ١$ ، $\text{حـ}^{٢} = \text{ا}^{٢} + \text{ب}^{٢}$

فان $\text{حـ}^{٢} = ١ + ١ = ٢$

وإذن $\text{حـ} = \sqrt{٢}$

المصطلحات : لقد شرحنا بالتفصيل أوجه الشبه الرئيسية بين اللغة الرياضية واللغة الأبجدية إلا أننا لم نطرق بتوسع ناحية معينة هى المصطلحات الخاصة بترتيب الكلمات ، وسندرس ذلك فى الباب السابع حيث نعطى أمثلة تاريخية نوضح بها كيف نمت اللغة الرياضية وكثرت رموزها حتى فاقت اللغة الأبجدية بمراحل واسعة لا يمكن تداركها .

وقبل أن نختتم هذا الباب لا ننسى العبارات الرياضية التى تفيد حقائق علمية مثل ازدياد شدة التيار فى دائرة كهربائية عندما تنقص المقاومة ، أو نقص حجم الغاز عند ازدياد الضغط.

فعندما نقول أن كمية البترول المستهلكة تتناسب مع طول المسافة المقطوعة تعنى أن النسبة بينهما مقدار ثابت هو عدد الأميال التى يمكن قطعها بواسطة جالون واحد من البترول . فالعبارة « س تتناسب طرديا مع ص » التى تكتب س $\propto$ ص تعنى أن $\frac{س}{ص}$ = مقدارا ثابتا أو س = ص × مقدار ثابت ، وتكتب على الصورة الموجزة س = ك ص .

بالمثل تعنى العبارة « س تتناسب عكسيا مع ص » أنه إذا ازدادت ص تناقصت س وبالعكس ، بحيث يظل حاصل الضرب دائماً مقدارا ثابتا ، فاذا زادت المقاومة إلى ثلاثة أمثال مقدارها نقصت شدة التيار إلى ثلث مقدارها . فالعبارة « س تتناسب عكسيا مع ص » التى تكتب س $\propto$ $\frac{1}{ص}$ هى نفسها العبارة س ص = مقدارا ثابتا وتكتب على الصورة الموجزة س ص = ك

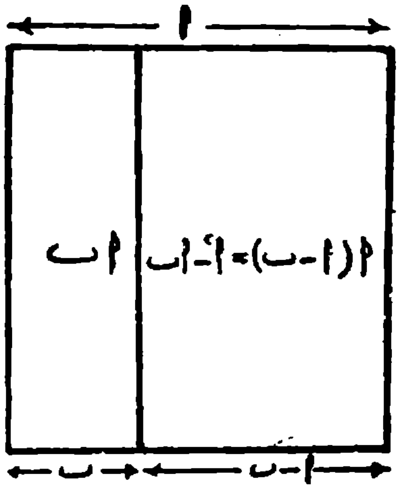
–[يقول الفيلسوف بيكون ، بينما نحن نمدح بالباطل قوى العقل البشرى لا نحاول الاستفادة بها] إذا كان القارىء يريد الاستفادة من هذا الكتاب فعليه الا يخطىء فيزيد الأمر تعقيدا بمغالاته فى قوى العقل البشرى ، بل عليه أن يستعين بوسيلتين بسيطتين ، فاذا أراد أن يفهم قاعدة حسابية معينة أو أحدى تطبيقاتها عليه أن يختبر هده القاعدة أو هذا التطبيق بأن يأخذ مثالا بسيطا أو مسألة مشابهه ليرى ما إذا كان يحصل على نفس النتائج . بهذه الوسيلة يستطيع القارىء أن يفهم القاعدة وطرق تطبيقها ويعرف نوع المسائل التى تطبق فيها . وأغلب المسائل المعطاة فى نهاية كل باب من هذا الكتاب يمكن القارىء التأكد من صحة الإجابة عنها بنفسه ولذلك لم ندون أجوبتها فى نهاية الكتاب .

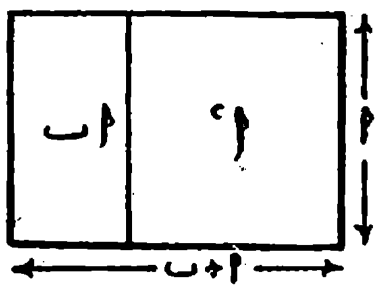
– ويمكن الاستعانة بطريقة ثانية لفهم المسائل الهندسية . ويجب رسم الأشكال الهندسية بأقصى درجة ممكنة من الدقة لأن الرسم الدقيق يكشف لنا عن كثير من النتائج التى لا يمكن ملاحظتها فى الرسم غير الدقيق ، وإذا كان القارىء يريد إثبات قاعدة معينة لقياس أشياء خاصة عليه أن يقيس هذه الأشياء حتى يقتنع بأن القاعدة المطلوب إثباتها صحيحة .

تمارين على الباب الثالث

إكتشافات

(١) يمكن استخدام الشكلين (٢٤) ، (٢٧) فى شرح كثير من العبارات الرياضية ، والشكلان الآتيان يوضحان العبارتين ا (ا + ب) ، ا (ا — ب) .





ا(ا+ب)=ا²+اب

ارسم على ورق المربعات أشكالا توضح العبارات الآتية :

(ا + ب) (ا + ب)

(ا — ب) (ا — ب)

(ا + ب) (ا — ب) .

لرسم هذه الأشكال خذ ا ، ب أعداداً صحيحة واكتب النتائج على صورة مماثلة للصورة : ا (ا + ب) = ا^٢ + ا ب .

تحقق من أن النتائج صحيحة بالطريقتين الآتيتين :

(ا) عوض عن ا ، ب بالمقادير التى استخدمتها فى الرسم وتحقق من أن الطرفين متساويان .

(ب) عد المربعات الموجودة فى الرسم .

(٢) ارسم على ورق المربعات أشكالا تثبت بها المتطابقات الآتية :

(س + ص + ع)^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢س ص + ٢ س ع + ٢ص ع

(ل + م) (ا + ب + حـ + ء) = ل (ا + ب + حـ + ء) + م (ا + ب + حـ + ء)

(ل + م) (ا + ب + حـ + ء) = ل ا + ل ب + ل حـ + ل ء + م ا + م ب + م حـ + م ء

تحقق من أن هذه المتطابقات صحيحة بوضع س = ٣ ، ص = ٤ ، ع = ٧ ، ... الخ .

(٣) أوجد مجموع الأعداد :

(ا) من ٧ إلى ٢١

(ب) من ٩ إلى ٢٩

(حـ) من ١ إلى ١٠٠

تحقق من أن النتائج صحيحة بجمع هذه الأعداد جمعاً عادياً .

(٤) أوجد بواسطة القانون العام ، وبواسطة الجمع العادى ، مجموع الأعداد فى كل من المجموعات الآتية :

(ا) ٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ٢٣ ، ٢٧ ، ٣١ ، ٣٥

(ب) ٥ ، ١٤ ، ٢٣ ، ٣٢ ، ٤١ ، ٥٠

(حـ) ٧ ، ٥½ ، ٤ ، ٢½ ، ١ ، −½

(٥) ارسم زاوية مقدارها ٣٠° . خذ نقطة ما على أحد ذراعى الزاوية واسقط منها عموداً على الذراع الآخر لتحصل على مثلث قائم الزاوية أحدى زواياه ٣٠°. تسمى أضلاع المثلث القائم الزاوية بأسماء خاصة فالضلع المقابل الزاوية القائمة يسمى وتراً والضلعان الآخران يسميان بدلاله إحدى الزاويتين الباقيتين . فاذا اعتبرنا الزاوية التى تساوى ٣٠° يسمى الضلع المقابل لها بالضلع المقابل ويسمى الضلع الآخر بالضلع المجاور . ارسم بنفس الكيفية عدداً من المثلثات القائمة الزاوية والتى فى كل منها زاوية تساوى ٣٠° وتحقق من أنه يمكن فى كل حالة التمييز بين الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور .

(٦) أوجد النسب الآتية فى جميع هذه المثلثات ،

$$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} ، \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} ، \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

(٧) بنفس الكيفية إرسم عدداً من المثلثات القائمة الزاوية والتى فى كل منها زاوية تساوى ٤٥° ومجموعة أخرى من المثلثات القائمة الزاوية والتى فى كل منها زاوية تساوى ٦٠° وأوجد النسب فى جميع هذه الحالات . هذه النسب لها أسماء خاصة . فاذا كانت ا أحدى الزاويتين الصغيرتين فى مثلث قائم الزاوية فان الوتر والضلع المجاور هما الضلعان اللذان يحصران الزاوية ا والضلع الثالث هو المقابل لها. تسمى النسبة $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ جيب الزاوية ا ، النسبة $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ جيب تمام الزاوية ا ، النسبة $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ ظل الزاوية ا ، وتكتب هذه النسب على الصورة الموجزة جا ا ، جتا ا ، ظا ا [وهذه النسب ثابتة بالنسبة إلى الزاوية ا مهما كانت مقاييس أضلاع المثلث القائم الزاوية الذى يحوى الزاوية ا]

(٨) ارسم مجموعة من المثلثات القائمة الزاوية والتى إحدى زواياها ١٥° . ثم خذ متوسط النسب الخاصة بهذه الزاوية ، كرر العمل مع الزوايا ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° ، ٧٥° واعمل جدولا يبين النسب فى هذه الحالات المختلفة . بالانتباه إلى المثلثات المرسومة يمكن بسهولة التحقق من المتطابقات الآتية

(ا) جا (٩٠ — ا) = جتا ا

(ب) جتا (٩٠ — ا) = جا ا

(حـ) ظــا ا $= \frac{\text{جا ا}}{\text{جتا ا}}$

(٩) إرسم دائرة نصف قطرها بوصة واحدة ثم ارسم نصفى قطرين فى هذه الدائرة يحصران بينهما زاوية ١٥°/ إحدى الطرق التى تقاس بها زاوية معينة هى النسبة بين القوس الذى تقبله هذه الزاوية ونصف قطر الدائرة ، ويقال عندئذ أن الزاوية مقاسة بالتقدير الدائرى ، والزاوية التى تقبل قوســاً يساوى نصف قطر

الدائرة تسمى زاوية نصف قطريه ، وهى الوحدة فى التقدير الدائرى/ وبالنظر إلى الشكل المرسوم نرى أن الدائرة مقسمة إلى ٢٤ زاوية كل منها تساوى ١٥° ، وإذن فالقوس الذى تقبله الزاوية ١٥° يساوى $\frac{١}{٢٤}$ من محيط الدائرة/ وقد ذكرنا سابقاً أن نسبة محيط الدائرة التى قطرها تساوى ط ، وإذن فالقوس الذى تقبله الزاوية ١٥° يساوى $\frac{ط}{٢٤}$ من القطر أى $\frac{ط}{١٢}$ من نصف القطر/ وبما أن نصف قطر الدائرة هو الوحدة ، إذن فالزاوية ١٥° تساوى بالتقدير الدائرى $\frac{ط}{١٢}$ من الزوايا النصف القطرية.

(١٠) بنفس الكيفية ، أوجد كل من الزوايا ٣٠° ، ٦٠° ، ٩٠° ، ١٨٠° بالتقدير الدائرى .

(١١) أوجد بالدرجات مقدار الزاوية النصف القطرية (خذ ط = ٣ $\frac{١}{٧}$) . أوجد أيضاً الزاوية ١° بالتقدير الدائرى .

تمارين على قياس الأبعاد

(١) نفرض أننا نريد إيجاد طول حديقة ما. يمكننا إعطاء قيمة تقريبية بواسطة عدد الخطوات التى نخطوها حتى نقطع طول الحديقة . ويستخدم المساحون فى القياس الجنزير والعقلة ، فالجنزير يساوى ٦٦ قدما ، والعقلة تساوى $\frac{١}{١٠٠}$ من الجنزير أى ٧,٩٢ من البوصة . والخطوة العادية تساوى ٢ $\frac{١}{٢}$ قدما تقريبا ، فيضرب المساح عدد الخطوات فى ٤ ويأخذ رقمين على اليمين ، فى الناتج ، ويضع العلامة العشرية ، فيمثل العدد المكون من هذين الرقمين عدد العقل . فاذا كان طول سور الحديقة ١٢٠ خطوة مثلا فهو يساوى ٤ جنزيرات ، ٨٠ عقلة ، (٤ × ١٢٠ = ٤٨٠) بهذه الكيفية يمكن التحويل من خطوات إلى جنزيرات وعقل .

(أ) افرض أن طول حديقتك هو بالضبط ٨٠ خطوة من خطواتك ، واذن حسب القاعدة السابقة يساوى ٣ جنزيرات ، ٢٠ عقلة أى ٢١١ قدما ، ٢,٤ بوصة . ضع علامتين بالطباشير على الأرض بحيث يكون البعد بينهما يساوى خطوتك ، ثم قس هذه المسافة بالمسطرة . كيف يمكنك تصحيح النتيجة السابقة باعتبار الفرق بين الخطوة الرسمية للقياس وخطوتك الخاصة .

(ب) وإذا قست طول الحديقة بواسطة جنزير جونتر المقسم إلى ١٠٠ عقلة فماذا تكون القراءة ؟

(ح) وإذا قست طول الحديقة بواسطة شريط معدنى طوله ٦٦ قدما مقسما إلى أقدام وبوصات ، ثم علمت أن هذا الشريط كان قد استعمل فوق حشائش مبللة فانكمش طوله إلى ٦٥ قدما و ٤ بوصات ، فكيف يمكنك تصحيح الجواب ؟

(٢) يستخدم فى قياس الأقمشة شريط عليه علامات يقرب سمك كل منها من $\frac{٥}{٨}$ من المليمتر ، والمليمتر يساوى $\frac{١}{٢٥}$ من البوصة . فإذا كان الشخص العادى لايعبأ بدقة القياس فهو يقرأ المقياس عند ابتداء العلامة أوعند آخرها ، ماذا تكون أصغر قيمة وأكبر قيمة لطول

(ا) ستارة طولها نحو ٦ أقدام ؟

(ب) مسافة $\frac{١}{٢}$ بوصة تقريبا بين موضعى زرارين على جلباب طفل صغير ؟

ماهى النسبة المئوية للفرق بين القيمتين فى (ا) بالنسبة إلى متوسط القيمتين ؟

عمل الجداول

(٣) باستخدام طريقة التقريب المعطاه فى هذا الباب اعمل جدولا للجذور التربيعية للأعداد من ١ إلى ٢٠ مقربة إلى ثلاثة أرقام عشرية.

(٤) أعمل جدولا للأعداد $٢^{ن}$ من ن = ١ ($٢^{ن}$ = ٢) إلى ن = ١٢ ($٢^{ن}$ = ٤٠٩٦) . اعمل جدولا آخرا للأعداد $٣^{ن}$ من ن = ١ إلى ن = ١٠ استخدم هذين الجدولين فى عمل جدولين آخرين يعطيان الأعداد $(\frac{٣}{٢})^{ن}$ ، $(\frac{٢}{٣})^{ن}$ من ن = ١ إلى ن = ٨ مقربة إلى ثلاثة أرقام عشرية .

الترجمة إلى اللغة الرياضية

(٥) ترجم ما يأتى إلى اللغة الرياضية .

(ا) اضرب ضعف طول حديقة مضافا إلى ضعف عرضها بالياردات فى ثمن الياردة الواحدة من السياج المراد احاطتها به لتحصل على تكاليف سياج الحديقة .

(ب) ضع فى الوعاء ملعقة شاى عن كل شخص ثم أضف ملعقة شاى أخرى فتحصل على كمية الشاى اللازمة لتجهيز الشاى لمجموعة من الأشخاص (افرض أن عدد الأشخاص ن) .

(حـ) إذا كان وزن سلة وهى مملوءة بالبيض و َ ووزن السلة وهى فارغة و فاطرح و من و َ وأقسم الناتج على عدد البيض لتحصل على وزن البيضة الواحدة .

(ى) اضرب طول قاعدة مثلث فى ارتفاعه واقسم على اثنين لتحصل على مساحة المثلث .

(هـ) اكتب القانون الذى يستخدم فى إيجاد جملة مبلغ معين من المال (م جنيها) يربح ربحا بسيطا ر٪ فى السنة لمدة ﻫ من السنوات .

مسائل جبرية

(٦) العبارة ١ + ٢ب + ٣حـ + ١٤ + ٥حـ + ٦ب

تختصر إلى الصورة ١٥ + ٨ب + ٨حـ

وذلك بأن نجمع الحدود المتشابهة على بعضها . ونتحقق من أن هذه النتيجة صحيحة بأن نعطى ١ ، ب ، حـ قيما خاصة ، فمثلا نضع ١ = ١ ، ب = ٢ ، حـ = ٣ .

فالمقدار ١ + ٢ب + ٣حـ + ١٤ + ٥حـ + ٦ب = ١ + ٢ × ٢ + ٣ × ٣ + ٤ × ١ + ٥ × ٣ + ٦ × ٢ = ١ + ٤ + ٩ + ٤ + ١٥ + ١٢

= ٤٥

والمقدار ١٥ + ٨ب + ٨حـ = ٥ × ١ + ٨ × ٢ + ٨ × ٣

= ٥ + ١٦ + ٢٤

= ٤٥

تحقق بنفس الكيفية من أن النتائج التى تحصل عليها فى التمرينات الآتية صحيحة .

اختصر

(١) س (س + ٢ص) + ص (س + ص)

(ب) (س + ٢ص + ٣ع) + (ص + ٢س + ٥ع) + (٢ع + ٣ص + ٢س)

(حـ) (١ + ١) (١ + ٢) + (١ + ٢) (١ + ٣) + (١ + ٣) (١ + ١) + ١

(د) $(س - ١)^٢ - (س - ٢)^٢$

(هـ) $أ^٢ - أب - (ب^٢ + أب)$

(و) $(ع\,س)(س\,ص) + (س\,ص)(ص\,ع) + (ص\,ع)(ع\,س)$

(ز) $(٢\,أب)(٣\,أ^٢\,ب^٣)$

(ح) $(س^٣)^٢ + (س^٢)^٣$

(ط) $(أ - ب)(أ + ٢ب) - (أ + ٣س)(أ + س) - (أ - ٢س + ٢ب)$
$(أ - س - ب)$

(ى) $\frac{٢س^٤ص^٥}{٤س^٣ص^٢}$

(ك) $\frac{(٣أب^٢)^٣}{٩أ^٢\,ب^٥}$

(ل) $\frac{٢أب}{٣حـ} \times \frac{٤حـ د}{٨ب}$

(٧) إثبت أن العبارتين

(أ) س تتناسب عكسياً مع ص عندما تكون ع ثابتة

(ب) س تتناسب طردياً مع ع عندما تكون ص ثابتة

تجمعهما المعادلة

$$س\,ص = ك\,ع$$

(إرمز للكمية الثابتة بالرمز حـ مثلا فتتضح العبارة المراد إثباتها)

معادلات سهلة

(٨) أوجد قيمة س من المعادلات الآتية وفى كل حالة تحقق من أن القيمة التى تحصل عليها تحقق المعادلة .

(ا) ٣س + ٧ = ٤٣

(ب) ٢س − ٣ = ٢١

(ح) ١٧ = س + ٣

(ء) ٣(س + ٥) + ١ = ٣١

(هـ) ٢(٣س − ١) + ٣ = ١٣

(و) س + ٥ = ٣س − ٧

(ز) ٤ (س + ٢) = س + ١٧

(ع) $\frac{س}{٤} = \frac{١}{٨}$

(ط) $\frac{س + ٢}{٥} = \frac{س - ١}{٢}$

(ى) $\frac{س}{٢} - \frac{س}{٣} + ٧ = \frac{٥س}{٦}$

(ك) $\frac{٣}{س} = ٣$

(ل) $٤ + \frac{١٥}{س} = ٧$

(م) − ٢س − ٥ + ١٢س − ٣ − ٤ = ٨

أوجد س بدلالة ا ، ب من المعادلات الآتية

(م) س − ١ = ٢ س − ١٧٠

(ن) ٢(س − ١)٢ = س + ب

(ع) ا (ا − س) = ٢اب − ب (س + ب)

تطبيقات سهلة على المعادلات

تحقق من الأجوبة .

(٩) قسم مبلغ ٥٤٠ جنيهاً بين ا ، ب بحيث يزيد نصيب ا عن نصيب ب بمقدار ٣٠ جنيهاً .

(أفرض أن نصيب ب هو س فيكون نصيب ا هو س + ٣٠)

(١٠) قسم مبلغ ٦٢٧ جنيها بين ا ، ب ، حـ بحيث يأخذ ا ضعف ما يأخذه ب وثلاثة أمثال ما يأخذه حـ . (أفرض أن نصيب حـ يساوى س)

(١١) يسير ا بسرعة ٤ أميال فى الساعة ويسير ب بسرعة ثلاثة أميال فى الساعة فإذا بدأ ب السير قبل ا بنصف ساعة أوجد الزمن الذى يمضى حتى يلحق ا بـ ب .

(افرض أن الزمن الذى يمضى ابتداء من سير ب هو س)

(١٢) يمكن كتابة ١٢٠٠ كلمة بالخط الكبير فى الصفحة ويمكن كتابة ١٥٠٠ كلمة بالخط الصغير فى نفس الصفحة ، فإذا أريد كتابة ٣٠٠٠٠ كلمة فى ٢٢ صفحة كم صفحة تكتب بالخط الصغير ؟

(١٣) عربة ا تستهلك جالونا من البترول لتقطع ٣٠ ميلا وتستهلك جالونا من الزيت لتقطع ٥٠٠ ميلا وعربة ب تستهلك جالونا من البترول لتقطع ٤٠ ميلا وتستهلك جالونا من الزيت لتقطع ٤٠٠ ميلا ، فإذا كان ثمن البترول هو نفسه ثمن الزيت أوجد أى العربتين تكلف أقل من الأخرى ؟

(١٤) إذا كان فى المحصول المبكر تعطينا ٦٠ قدما طولية ١٢ مكيالاً من البسلة ، وفى المحصول العادى تعطينا ٨٠ قدما طولية ١٨ مكيالا من البسلة ، وكان ثمن

المكيال من المحصول العادى شلنا وأربعة بنسات فأوجد ثمن المكيال من المحصول المبكر حتى يتساوى ثمن المحصول فى الحالتين

ملخص القوانين فى الباب الثالث

(١) (ا + ب) (ا + ب) = ا^{2} + ٢ ا ب + ب^{2}

(ا − ب) (ا − ب) = ا^{2} − ٢ ا ب + ب^{2}

(ا + ب) (ا − ب) = ا^{2} − ب^{2}

(٢) إذا كانت ا زاوية ما فإن

جا ا = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ جا (٩٠ − ا) = جتا ا

جتا ا = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ جتا (٩٠ − ا) = جا ا

طا ا = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ طا ا = $\frac{\text{جا ا}}{\text{جتا ا}}$

(٢) إذا كانت س $\propto$ ع عندما تكون ص ثابتة ، س $\propto$ $\frac{1}{\text{ص}}$ عندما تكون ع ثابتة فإن س ص = ك ع .

الباب الرابع

اقليـــــــدس بدون دموع
أو
ما يمكنك عمله بالهندسة

لقد حاولنا أن نكون صورة — حدسية نوعا — عن العالم القديم حيث كان الناس يتعلمون الكلام عن الكم ، وحتى حوالى سنة ٢٠٠٠ قبل الميلاد لم يتقدم الناس تقدما يذكر فى وضع مبادىء عامة عن عد الأشياء وقياسها . وقد كانت هناك مبادىء لغة للكم ، ولكن لم توضع فيها حتى ذلك الوقت كتابات تذكر . وأن المبانى التى شيدها هؤلاء الناس لها دلالة فى هذه الناحية أقوى كثيراً من لوحاتهم القليلة عن الحساب التجارى التى عثر عليها فى حفائر نيبور أو القراطيس التى تخبرنا عن كل ما نعرفه من العلوم الكهنوتية عن النيل . فهرم خوفو الأكبر هو نصبهم التذكارى الباقى لتخليد حقائق عن المثلثات كانوا يتناقلونها من فم إلى فم من كاهن قديم إلى كاهن مبتدىء ، ومن صانع أستاذ إلى تلميذه ، ومن عبد صاحب حرفة إلى أطفاله . وربما يظل هذا الهرم باقياً حتى بعد أن نكف عن تعليم الناس كيف بنى الأغريق هرما أكبر من المنطق لا يقل صلابة ولا استقراراً . ومن المؤكد أن مهندسى المعابد ومساحى الضرائب بدأوا فعلا بممارسة تخطيط النماذج على الرمال لترشدهم فى فن حساب الظل والمساحة قبل أن يبــدأ الناس فى تسجيل الأشكال ومحاولة تجميع المبادىء التمهيدية بزمن طويل . وقد بقيت طريقة تخطيط الأشكال فى الرمال مستعملة لحل التمرينات الهندسية بضعة قرون . وقد ذبحت قوات الهجوم الرومانية أرشميدس ، أعظم الرياضيين القدامى ، وهو يرسم أشكالا على الرمال . فالخطوات التى اتخذها الإنسان لعمل الإنشاءات الهندسية الأولى بالحبـــل والوتد ، وبخيط المطمار وسطح الماء ، أهم من كتابة مؤلفات عنها .

ويرجع للصينيين بعض الفضل فى وضع أساس مؤلفات عن الكم . وبمضى الوقت ربما نعلم كثيراً عن مقدار ما ندين به لهم . والإيضاح المبين فى شكل ١٩ كاف لتبرير اعتقادنا أنهم أسسوا قواعد عامة مهمة عن الأشكال قبل الإغريق بخمسمائة سنة . فقد كشفوا أموراً عظيمة الأهمية عن الأعداد ، مختلطة بكثير من الهلوسة . ومن المحتمل أن يكونوا قد عرفوا شيئاً عن عائلات الأعداد ، التى تلعب دوراً هاماً فى الإحصاء الحديث . وقد فقــدت معظم معلوماتهم لأن المكتبات الصينية المبكرة أحرقت مثل مكتبتى الإسكندرية . ولم تكن هذه الكارثة ناتجة عن حرب بل كانت متعمدة مثل تقويض هتلر للثقافة الألمانية . فقد تم إحراق الكتب بأمر أحد الأباطرة الذى كان يعتقد ، كما يعتقد برناردشو ، أن الناس تتحسن كتاباتهم إذا قلت قراءتهم . وفى البداية كان الصينيون يمتازون على حضارات أوربا المبكرة . فقد كان صناع تقاويمهم من طائفة أقل اهتماما بالطقوس ومن نوع أكثر اهتماما بالدنيويات . ونحن لا نعلم السبب فى فشل الصينيين فى إنجاز ما كان يتوقع منهم ، ولا يمكننا إلا تخمين بعض العقبات التى عاقتهم . ومن المحتمل أن يكون أحد الأسباب تبكيرهم فى التعليم . كما أنهم كانوا مثقلين بكتابة هيروغليفية فاسدة لا تصلح للتعبير عن الأشياء البسيطة بأسلوب بسيط . ولم يتمكنوا من التخلص من هذه الصعوبة مطلقاً .

– أما الأغريق الذين من الجائز أن يكونوا قد تعلموا منهم الكثير فلم تعترضهم عقبة الطائفة الكهنوتية ولا عقبة ارتفاع تكاليف التربية . وفى الوقت الذى كان الصينيون يكتبون فيه كتبهم الرياضية الأولى كانت أراضى الإغريق تغزوها البدو الهمج من الشمال . وقد أتى هؤلاء الغزاة الآريون من بلاد ليست بها نجوم براقة فى سماء صافية . ولم تكن لديهم طريقة للكتابة ، ولم يتعلموا فن البناء ولا فن التجارة ، ولم تكن لديهم أوزان أو مقاييس . وقد غزوا شواطىء آسيا الصغرى حيث أقاموا ممالك صغيرة مثــل ليديا وحكومات مدن مثل ميليطة على حاشية موانى تجارية أسسها أعاظم التجار والملاحين القدامى . ومع هؤلاء الفينيقيين الساميين عقد الرجل الشمالى أول قرض له من اليهود . وقد كان هذا القرض من أجل مصاريف الدراسة . وقد تعلم القراءة والكتابة والحساب . وساعده جهله على التخلص من الكتابة التصويرية القبيحة التى عرقلت الحضارات السابقة فى مصر والصين . فاستعمل الرموز القديمة للدلالة على أصوات لغته البسيطة . وبذلك

حصل على أبجدية صوتية بدأ بها كتابة جمل بسيطة واضحة . ولما لم يتقيد بتقاليد وطقوس معقدة أمكنه أن يسبر غور أسرار الكهنة لامن قبيل الاحترام وإنما من قبيل حب الاستطلاع . إذ لم يتعلم أن يعتقد أن « فى البداية الها » . بل هو يعلم أن فى البداية فوضى ، وأنه كان يعمل نظاما حيث اعتاد أن يجد فوضى .

ولسنا نعلم أن كان هؤلاء الهمج الشماليون الذين غزوا الجزء الشمالى الشرقى من البحر المتوسط كانوا حقيقة زرق العيون أو كانت شعورهم حقيقة شقراء . ولكننا نعلم أنه ليست هناك أية ذرة تبرر الاعتقاد بأن الأعمال العلمية التى تمت فى الحضارة الاغريقية كانت ثمرة استعداد جنسهم . فإن رجلين مشهورين بأنهما مؤسسا الهندسة الاغريقية وهما طاليس (٦٤٠ — ٥٤٦ قبل الميلاد) وفيثاغورس (٥٨٢ — ٥٠٧ قبل الميلاد) كانا من أصل فينيقى . ولم تصل العلوم والرياضات أرض الاغريق حتى كانت قد قاربت نهاية مرحلة التكوين . فقد أدخلت فى بلاط بريكلين بأمر من أسبازيا معلمته ، وهى سيدة من ميليطة على شواطىء آسيا الصغرى . وقد أتى أناكساجوراس تلبية لدعوتها من ميليطة مدينة طاليس نفسه . أما فيثاغورس ، وامبيدوكليس الذى كان أول من كتب عن الفراغ ، فقد عاشا فى ايطاليا وصقلية . كما عاش ديموقريطس ، الذى تأمل فى الذرة فى أبديرا على الشاطىء فى منتصف المسافة بين آسيا الصغرى وأرض الاغريق . وعندما بدأ مذهب الفلسفة الأثينية كان نجم العلم اليونانى قد أفل . ولذلك فإن هذه الفلسفة لم تكن فى بدايتها اغريقية الجنس .

والأصل التيريانى لفيثاغورس يبين لنا السر فى العلامات الواضحة للأثر الصينى فى تعاليمه . وسنعود إلى هذا فى الباب التالى . فقد قام برحلات فى آسيا وكان بحكم تنشئته متصلا بالمجتمع التجارى العظيم الذى كان المنفذ إلى طرق التجارة البرية الاسيويه . وكان طاليس تاجراً مهندساً ، وقام برحلات كثيرة وزار مصر . وقد استخدم المبادىء التى كان يعمل بها فى قياس ارتفاع الهرم الأكبر خلال رحلاته ، وتنبأ بحدوث كسوف فى ٢٨ مايو سنة ٥٨٥ قبل الميلاد . كما قام بعمل تجارب على الكهرباء وكانت ملاحظاته أول ما دون عن الجذب الكهربائى ، ودرس حجر المغناطيس أو المغناطيس الطبيعى . ولم يقم طاليس بالبحث الرياضى كأداة توصله إلى الكمال الروحى . وربما كان يدهش لو سمع هذا عن البحث الرياضى . وقد أفاد الاغريق الأيونيون مثل طاليس من موقعهم الجغرافى حيث عاشوا فى جماعات فى جزائر أو على الشواطىء دون أن يكون لهم سلف من الطوائف الكهنوتية واكتسبوا بهذا ميزة كبيرة على الصينيين المعاصرين

لهم . ونجد لمحة واضحة لهذه الميزة فى نبذة من كتابة الذهرى الكبير الأول الذى كتب عنه كارل ماركس رسالته للدكتوراه . واليك كلمات ديموقريطس : —

« أنا وحدى من بين جميع معاصرى قطعت أكبر جزء من الأرض ، وزرت أبعد الأقطار ، ودرست أكثر الأحواء تنوعا وأكثر البلاد اختلافا ، واستمعت إلى أكبر عدد من الناس . ولم يوجد من هو أمهر منى فى الانشاءات والبراهين الهندسية ولا نفس علماء الهندسة المصريين الذين قضيت بينهم خمس سنوات كاملة من حياتى » .

ونرى من هذا عذر أفلاطون ، الذى كان من تعاليمه أن الهندسة تمرين للذهن المجرد عن الجسد ، فى تعبيره عن أمنيته فى إحراق جميع مؤلفات ديموقريطس . وقد امتدح شو حكمة قيصر الفاشستى الذى تمتع بالنظر إلى مكتبة الإسكندرية الأولى وهى تحترق . وقد بادت معها مؤلفات ديموقريطس الثمانين وجميع ما قام به الفلكيون الإسكندريون . وربما باد كثير من النفاية ولكن شرور العقلية اليونانية بقيت بعد دمار النيران ودفنت أعمالهم الطيبة مع عظامهم . والمخلفات الأساسية هى علم أرسطو الفاسد وهندسة أفلاطون التى أتى بها إقليدس إلى الاسكندرية . وإقليدس هو الذى قال أنه لا يوجد طريق ملكى إلى الرياضة . وقد قالها لأحد الحكام ولكنه لاشك قال نفس الشىء لتلاميذه . وعندما أراد أحدهم أن يعرف فائدة الهندسة أمر عبده أن يعطى الشاب قطعة من العملة ليعوضه شيئاً عن تعبه . ولكن مجتمع الأسكندرية العالمى النشيط اكتشف فوائد هنـــدسة إقليدس رغم أنف معلمهم . وسنحذو نحن حذوهم .

قيود أقليدس :

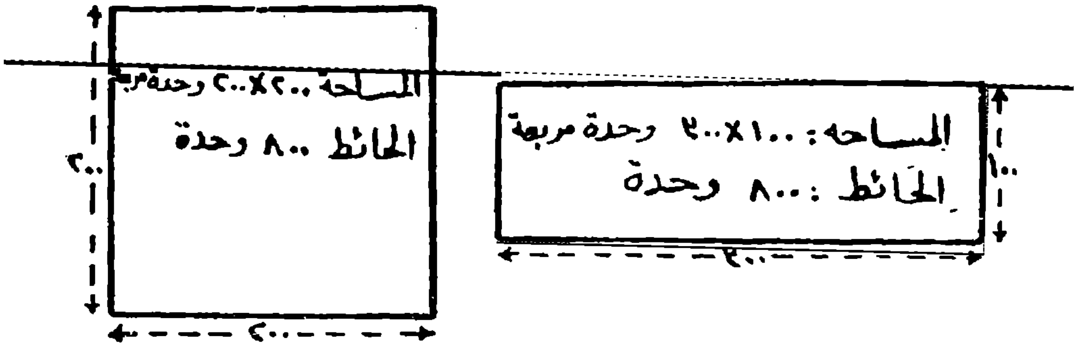
لقد تغيرت النظرة إلى الهندسة فى جيلنا الحاضر . ويرتبط هذا التغيير خاصة باسمى أرنست ماخ واينشتين . فنحن الآن نعرف أن هندسة أقليدس لا تعطينا أحسن طريقة ممكنة لقياس الفراغ . ولايعنى هذا أنها ليست فرعا نافعا من المعرفة ، بل أنها كانت وما زالت كذلك . وقد تعلمنا من الاكتشافات الحديثة فقط أن لها حدودها . ومن السهل جداً رؤية بعض هذه الحدود من البداية بدلا من وضعها فى النهاية . ومازالت الهندسة الأغريقية أحسن أداة فى متناولنا لكثير من الأشياء . فميزان البقال أفيد فى الشئون المنزلية من أدق ميزان كيميائى ، لأن نفس دقة الميزان

التي تمكننا من الحصول على تقديرات لقدر الذرات تجعله غير ملائم للاستعمال المنزلي . وكذلك مازلنا في حاجة إلى تعلم هندسة أقليدس للاستعمال المنزلي بالمعنى الحرفي للكلمة . فقد كانت هندسة معلميه الأيونيين مبنية أصلا على ملاحظة كيف شيد الناس أبنيتهم وكيف قسموا الأرض إلى قطع . وتنقطع فائدتها عند ما تريد معرفة موضع أبعد سدم في مجموعة الدب الأكبر . فهذه السدم تبعد عنا أكثر من ثلاثمائة سنة ضوئية . أي أن الضوء الذي يقطع بالتقريب أحد عشر مليون ميل في الدقيقة يستغرق ثلاثمائة عام في قطع المسافة بينها وبين الأرض التي نعيش عليها .

وينبغي أن لا تدهشنا هذه الحدود عندما نرى كيف كانت الهندسة الأغريقية محاطة بالقرائن الاجتماعية . وقد سبق أن رأينا أن الحساب الأغريقي لم يتمكن من اللحاق بالسلحفاة ، وكذلك الحال في الهندسة الأغريقية . فقد برزت الهندسة من عملية رسم أشكال على الرمل لأشياء ثابتة نسبياً مثل المباني والأراضي والسفن ، ولم تنظر إلى عنصر الزمن بعين الاعتبار فكانت خطوطها وزواياها وأشكالها ثابتة . ولذلك عندما نستعمل أشكالها غير المتغيرة لترشدنا في قياس عالم متغير علينا أن نتذكر ما أهملنا وضعه في الصورة . إذ لا يوجد شيء من الجمود بحيث يبقى على حالته بالضبط إلى ما شاء الله . فعند ما نقول أن مساحة روسيا السوفيتية ٨,٢٤٢,٩٠٠ ميلا مربعا فاننا نفترض أن حدودها سوف لا تتغير في أثناء الفترة التي نبغي إستخدام معلوماتنا هذه خلالها ، وأن حجم الأرض لم يتغير تغيرا محسوسا في هذه الأثناء . والواقع أن الأرض يصغر حجمها كلما بردت فهي تتقلص كثيراً بمرور زمن يشمل عدة عصور جيولوجية .

وعندما نقول أن صندوقا حجمه كذا فاننا نتكلم عن قياس يبقى ثابتا في المدة بين صناعته وبين تكسيره للوقود . والزمن لا علاقة له بالفائدة الاجتماعية لمعلوماتنا هذه ، ولذلك نعزل حيز الفراغ عن الزمن . وعندما نقول أن حقلا له قدر معين من السطح أو المساحة فإننا نخرج من اعتبارنا حقيقة أن الأرض تتقلص كلما بردت وبذلك نعمل تقريبا آخر . وحتى إذا كان يهمنا الحصول على معادن فإنه لا يمكننا أن نحفر الأرض حتى نصل إلى مركزها ، أو إلى جيراننا على السطح المقابل من الكرة الأرضية . ولذلك سنترك العمق/ وكان أول من قاموا بقياس السطوح لا يهمهم الحصول على معادن. وكان اهتمامهم بكمية الحب الممكن بذرها في حقل معين أو حصادها منه ، أو عدد الأغنام والأبقار الممكن وضعها ترعى فيه . وعندما كانوا يحتاجون

إلى بناء حائط يحمى قطعانهم وكرومهم ، أو معبد يتقربون فيه إلى الآلهة الذين ينظمون المطر والمواسم وضوء الشمس فانهم يواجهون مشكلة مختلفة .



شكل ٢٨ — نسبية الكم والفائدة الاجتماعية

وترى فى شكل ٢٨ أن حائطا ذا طول معين يمكنه أن يحيط بحقلين أو قطعتى أرض مختلفتى المساحة . ونجد أن كمية الحب المزروع فى احداها أو عدد الغنم الممكن وضعه فيها يزيد عما يذرع أو يمكن وضعه فى الأخرى بمقدار الثلث . ففى قياس الطول نهمل هذا لأنه لاعلاقة له اجتماعيا بمهمة بناء حائط . فالطول هو الكم المستعمل فى بناء حائط . والمساحة هى الكم المستخدم فى زراعة المحاصيل أو الكروم ، والحجم هو الكم المستخدم فى مبادلة اللبن والنبيذ . ولم يدرك أذكياء الاغريق نسبية الكم والفائدة الاجتماعية . وقد اعتقد أول من اهتموا بتشريح الأشكال أنهم وصلوا إلى القرار عندما عزلوا المستقيم والزاوية والنقطة — أى البقعة التى منها نبدأ رسم المستقيم . فقد وصلوا إلى أشياء غير متغيرة لادخل للزمن فيها ، وإذن فهى أبدية . وعلى أساسها المتين يمكن تشييد باقى الحقيقة بالبرهان وحده . فالمستقيم كم ولا شىء خلاف الكم ، والنقطة وضع ولا شىء غير الوضع .

ولكن موقفنا يختلف عن هذا . فليست الحقيقة بالنسبة لنا بسيطة أبداً وقلما تكون بحتة كما قال أوسكار وايلد . فالاغريق كانوا يعملون فى تشريح شىء ميت ، ولا بد من دراسة التشريح قبل أن نتمكن من دراسة وظائف أعضاء جسم حى متحرك متغير . فالتشريح يعلمنا أين تقع أعضاء الجسم وكيف نجد طريقنا فى داخل الجسد . وهندسة الأشكال المسطحة تخبرنا كيف نجد طريقنا فى الأشكال المسطحة . فعلم التشريح يكشف طبيعة الجثة بتشريحها ، والهندسة تكشف طبيعة الأشكال المسطحة بتشريحها .

ولا تبدأ الكتب عن التشريح دائماً من نفس النقطة ، وكذلك دراسة الهندسة أيضاً . فلكى نرى كيف أن أعضاء الشكل المسطح — المستقيمات والزوايا والسطوح — متصلة ببعضها البعض يمكننا أن نبدأ حيث نشاء ، أى أنه يمكننا أن نسلم بصحة ما نشاء . فليست هناك حقيقة أبدية عن مكان البدء . والقواعد عن الأشكال المسطحة أو غير المسطحة هى حقائق تقريبية فيما يختص بمدى فائدتها فى قياس عالم متغير . وهى نماذج جيدة ترشدنا فى البناء وفى تقسيم الأرض . وهى إلى حد ما نماذج جيدة لوصف عالم النجوم الأكبر . فلم يضع ديموقريطس وقته سدى عندما قضى من حياته خمس سنوات كاملة فى ملاحظة كيفية عمل المصريين لمثل هذه الأشياء حتى يتمكن من إثبات هذه القواعد لأبناء وطنه . والهندسة فى هذا الباب هى عن أشكال فعلية يمكنك رسمها بالمسطرة والفرجار (كما وصفها أفلاطون) . ولذلك فلا علاقة لها بالتكافؤ التام كالذى يوجد بين الأعداد الصحيحة المذكرة والمؤنثة فى الحساب الاغريقى . والزوايا والمستقيمات، والمساحات المذكورة بها لا يمكن تمثيلها إلا بأعداد من النوع القابل للإمتداد الذى يستعمل فى القياس الحقيقى . فقولنا أن ا ب = حـ ء لا يعنى أن « المستقيم اب يساوى تماما المستقيم حـ ء » لأنه لا يعرف أحد كيف يرسم مستقيمات متساوية تماما بأى فرجار حقيقى أو مسطرة . وترجمتها هى « قس اب لتحصل على الطول حـ ء بأقصى دقة تلزمك » .

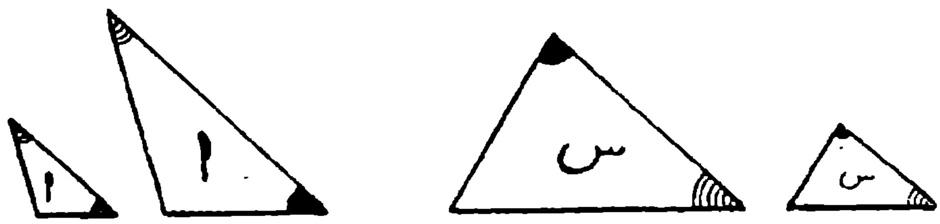
ولم يكن الاغريق يألفون تغييرات أساسية وسريعة فى العادات الاجتماعية . وقد حسبوا الوقت بالمزولة والساعة الرملية . ولم يكن لديهم آلات طبيعية لقياس الزمن فى فترات أقصر اللهم إلا الزمن اللازم لسلق بيضة . فكان من الطبيعى لديهم أن يظنوا أن لا علاقة لقياس الفراغ بقياس الزمن . فالمعمار والمساحة والتجارة قد حولت الفراغ إلى غاية عالمية . وقد ظل قياس الوقت فى الغالب الأعم امتياز الكهنة فى الدول التى غشيها رياضو الاغريق . وقد تركتهم هندسة الاغريق مع الزمن . وحتى أرشميدس الذى تعلم هندسته فى الاسكندرية واستعملها فى بناء روافع وعجلات اعتقد أن الخط لا بد أن يكون مستقيما لأنه أقصر بعد بين نقطتين . وهذا صحيح فى أغلب الأغراض العملية ، ولكنه ليس حقيقة أبدية لا مفر منها . وعلماء الحياة يمكنهم أن يخبرونا سببا لعدم كونها حقيقية . لأن جزءا من الأذن الداخلة فى أجسامنا يسجل تأثير الجاذبية . وهذا هو السبب فى أن القطة تقع على أقدامها والسمكة تستمر تسبح فى الاتجاه الصحيح . فاذا بدأنا نحرك السائل فى الأذن الداخلية باللف عدة مرات

بسرعة فإننا نصاب بدوار ، ولا ندرى عندئذ فى أى اتجاه نقف . والجنبرى له عضو شبيه بهذا . فإذا ملىء الجنبرى ببرادة الصلب الدقيقة فإنها تستجيب لفعل المغناطيس بدلا من أن تستجيب لقوة جذب الأرض . وإذا كانت خطوط القوة المغناطيسية منحنية فلا يمكنها السباحة فى خط مستقيم . ويكون أقصر بعد بين نقطتين بالنسبة لهذا الجنبرى خط منحن . وأبسط تقدير يمكننا عمله عن كم الخطوط يتضمن حركة عضلات العين . فهو يتوقف على الزمان والمكان . وخداع البصر فى المسافات يتوقف على الضغط على العين لتتحرك بطريقة غير عادية . فالكم والحركة فى الزمان لا ينفصلان فى العالم الحقيقى لعلماء الحياة .

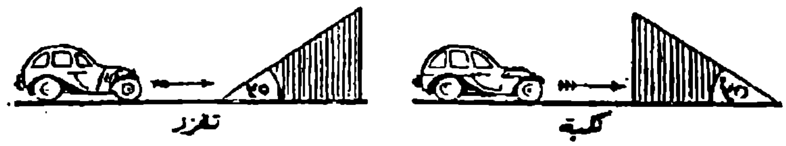
– وهناك قيد آخر لطريقة أقليدس ذو علاقة وثيقـــة بإهماله عنصر الزمن . وسيصادفنا هذا مرة أخرى عندما نرى كيف بدأ العرب يعملون جملا رياضية فى لغة القاموس . فعندما استخدم العرب أشكالا مسطحة كما كان يرسمها الإغريق لرسم أشكال بمقياس لحل مشاكل حسـابية سرعان ما لاحظوا اختلافاً غريباً . وأمكن لنماذجهم أن تجيب عن سؤال بطريقة واحدة . ويمكن أن يكون لبعض الأسئلة أكثر من إجابة واحدة ، وقد كانوا يعرفون عن الأعداد ما يكفى لإدراك إمكان تساوى عددين فى الصلاحية للإجابة على بعض الأسئلة التى سألوها . وقد نشأت هذه الورطة لسبب بسيط . فأشكال أقليدس المنفصلة ليس لها وضع خاص . وتكون الهندسة الإغريقية فى الواقع قد قالت بتساوى بعض الأشياء التى بينها خلاف واضح . وهكذا أهمل الوضع مع الزمن . وعندما أوحى إلينا موضع سفينة متحركة فى البحر هندسة جديدة فإنها أمدتنا أيضاً بطريقة لتمثيل الزمن . وكما رأيت فى شكل (٢٦) لحق أخيل بالسلحفاة فى عهد الإصلاح الذى أخذ الزمن من الكهنة بنزع القديسين من التقويم .

– ويؤدى بنا هذا القيد إلى التعاريف الثلاثة الأولى التى سنستخدمها فى بدء تشريح الأشكال المسطحة ، أى إرشاداتنا الثلاثة الأولى لتدلنا كيف نضع الجثة ونستخدم المشرط . ففى هندسة أقليدس يقال للأشكال أنها مثل بعضها فى الكم أو فى الشكل أو فى كليهما . وعندما تكون مثل بعضها فى كليهما فإن أقليدس يسميها متساوية فى كل شىء . والأشكال المحدودة بمستقيمات تكون مثل بعضها فى الشكل وحده ، أو « متشابهة » (تذكر كيفية استعمال هذه الكلمة) عندما تتساوى زواياها . وتكون مثل بعضها فى الكم عندما تتساوى أضلاعها أيضاً كما تتساوى زواياها وعندما تحيط

بسطوح متكافئة . فالمثلثان قد يتكافآن فى المساحة دون أن تتساوى أضلاعهما وزواياهما . وما عليك إلا أن تنظر إلى شكل (٢٩) لترى أننا يجب أن ننظر بعين الاعتبار إلى خاصية هامة أخرى بجانب الكم والشكل عند استخدام الأشكال كنماذج للعالم الحقيقى .



قد تكون المثلثات مثل بعضها فى الشكل ، أى تكون زواياها متساوية، ولكنها تختلف فى القدر

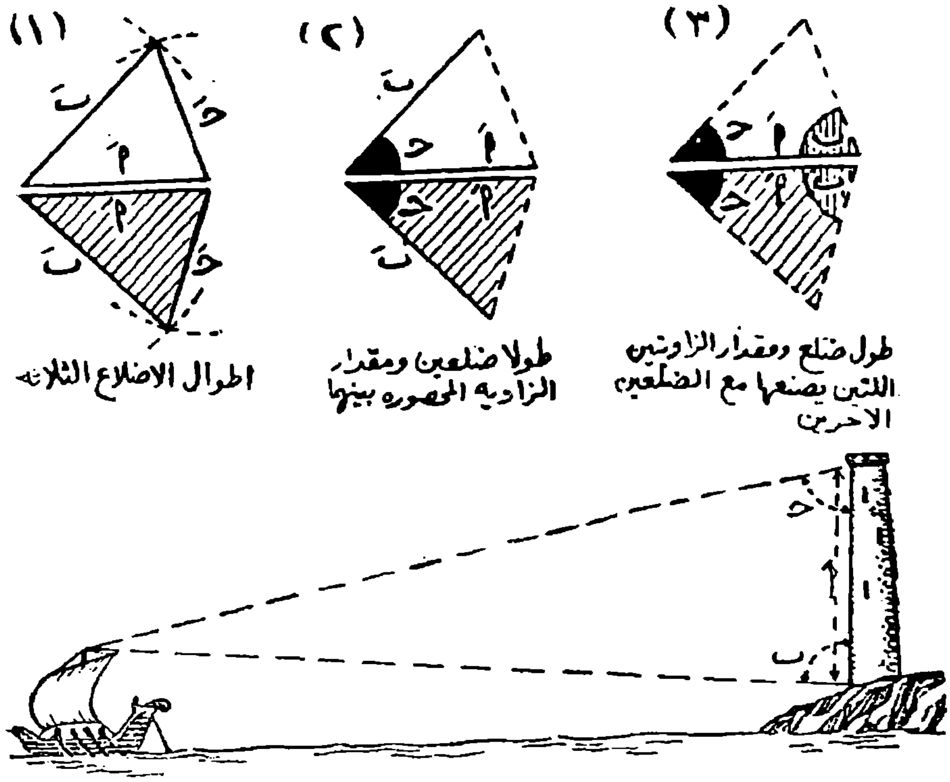


قد تكون للمثلثات نفس الشكل والقدر ولكنهما لايتساويان من جميع الوجوه الا اذا كان لهما نفس الوضع

(شكل ٢٩)

ولا داعى لإزعاج أنفسنا باستخدام محاولات إقليدس لإثبات متى تتساوى المثلثات فى الكم . فقد بدأ التشريح فى أكثر المواضع صعوبة . والطريقة المعقولة للسير فى هذا هو أن نسأل عن الحقائق اللازمة لرسم مثلث بعد تحديد موضعه .

فحتى بعد أن نحدد مستقيماً ثابتاً (شكل ٣٠) يوجد دائماً أربعة مثلثات يمكن رسمها إلا إذا قلنا شيئاً أكثر عن الموضع الذى سوف يرسم فيه المثلث . وترى إثنين منها فى شكل (٣٠) أحدهما فوق الآخر ، والإثنان الآخران يناظرانهما مع عكسهما من اليسار إلى اليمين . والتشريح الإغريقى للأشكال المسطحة مفيد كنموذج للحياة الحقيقية لأنه يعرض مسافات أو زوايا أو سطوح يمكن قياسها بسهولة وتساوى مسافات أو زوايا أو سطوحا قد لا يكون من السهل قياسها . فالحقائق التقريبية التى تعرب عنها هى وسائل قياس كيات لا يمكن قياسها مباشرة / والأسلوب الإغريقى



(شكل ٣٠)
استعمال متقدم فى الزمن للحالة (٣)منسوب لطاليس

لعرض هذه الحقائق التقريبية كان مبنياً إلى حد بعيد على حيلة واحدة من حيل التشريح وهى تقسيم الشكل إلى مثلثات ثم إدراك أى هذه المثلثات « متساوية من جميع الوجوه» وعليه تظهر مستقيمات وزوايا متساوية ، ولا يمكننا أن نعرف أبداً إذا كانت أجزاء أشكال مرسومة بالمسطرة والفرجار متساوية تماما أم لا ، وذلك للأسباب المشروحة فيما سبق . ولأننا قوم عمليـــون سنترك التعبير « متساو من جميع الوجوه » ونقول أن المثلثات متشابهة أو غير متشابهة (متساوية الزوايا) ، والمثلثات متكافئة أو غير متكافئة فى المساحة ، والمثلثات متساوية فى الكم أو غير متساوية (متساوية الأضلاع ، ومتساوية الزوايا ، ومتساوية المساحات) . والمثلثان يجب أن يكون لهما خاصية رابعة لكى يتساويا فى كل شىء وهى تساوى الموضع وفى هذه الحالة يكونان نفس المثلث . فإذا كان المثلثان المتساويان فى الكم منفصلين حقيقة ويشغلان موضعين مختلفين فقد يختلفان بكيفيتين حسب كون كل منهما صورة للآخر فى المرآة أو عدم كونهما كذلك . والمثلثان اللذان كل منهما صورة للآخر فى المرآة يمكن إعتبارهما تخطيطا لقطعـــة من الزجاج أو القماش عليها نفس

الرسم من جهتيها . ولا يمكن إعتبارهما تخطيطا لقطعة من القماش عليها شكلان مختلفان من جهتيها ولا لوجه واحد من بلورة .

ومتى قررنا الموضع الذى سيتخذه مثلث ما فإنه يمكننا رسمه إذا عرفنا معلومات من أحد ثلاثة أنواع (شكل ٣٠) . أولها أطوال الأضلاع الثلاثة . فنرسم أحد الأضلاع ثم نرسم دائرة مركزها أحد طرفى المستقيم المرسوم ونصف قطرها طوله كأحد الضلعين الآخرين . ثم دائرة أخرى مركزها الطرف الآخر للمستقيم الأول ونصف قطرها طوله كطول الضلع الثالث . وحيث تتقاطع الدائرتان يكون المكان الوحيد لتلاقى مستقيمين ذوى طولين معلومين . فإذا كان مجموع الطولين أقل من الطول الأول فلا يتلاقيان ولا يمكن رسم المثلث . وتتوقف هذه الوصفة على حقيقة أن بعد مركز الدائرة عن أية نقطة على محيطها يساوى بعد المركز عن أى نقطة أخرى على المحيط . وهذا التعريف للدائرة ما هو إلا مجرد وصف للطريقة الأولى لرسم الدوائر بواسطة حبل مشدود بين عصاتين إحداهما مثبتة فى الرمل (شكل ١٨) . والوصفة الثانية هى أن نعرف طولى مستقيمين والزاوية المحصورة بينهما . وهى وصفة كافية لأن علينا فقط أن نصل طرفى المستقيمين . وإذا كانت الزاوية أكبر من قائمتين فلا يمكننا رسم مثلث يشملها كاحدى زواياه . والثالثة أن نعرف مقدار أحد الأضلاع والزاويتين اللتين يصنعهما الضلعان الآخران معه . ويمكننا رسم مثلث كهذا ما دام مجموع الزاويتين المعلومتين أقل من قائمتين . فمتى رسمنا هاتين الزاويتين نمد ضلعيهما حتى يتلاقيا . ويبين شكل ٣٠ كيف استخدمت هذه الوصفة فى تاريخ مبكر جداً لرسم شكل بمقياس لإيجاد بعد سفينة فى البحر .

ويمكننا الآن أن نقرر ثلاث قواعد لعرض العلاقات بين أجزاء الأشكال بعد تشريحها إلى مثلثات : —

القاعدة الأولى للمثلث : يتساوى المثلثان كما إذا تساوت أضلاعهما

القاعدة الثانية للمثلث : يتساوى المثلثان كما إذا ساوى فى أحد المثلثين ضلعان والزاوية المحصورة بينهما ضلعين والزاوية المحصورة بينهما من المثلث الآخر .

القاعدة الثالثة للمثلث : يتساوى المثلثان كماً إذا ساوى فى أحد المثلثين ضلع والزاويتان اللتان يصنعهما معه الضلعان الآخران ضلعا والزاويتين اللتين يصنعهما معه الضلعان الآخران فى المثلث الآخر .

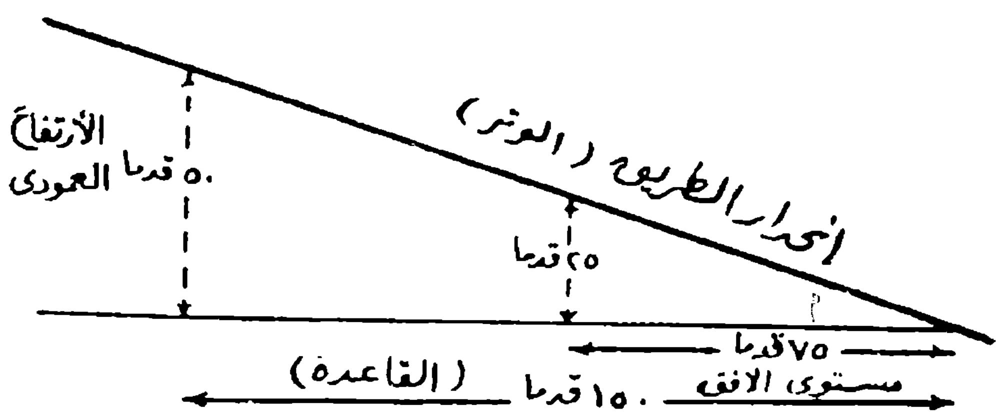
والقيد الثالث لهندسة اقليدس يجعلها أصعب بكثير مما ينبغى أن تكون . فقد بت طاليس الهندسى الأيونى حقيقة أساسية جدا عن المثلثات . وهى أن النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فى مثلثين متشابهين (أى مثلثين تتساوى زواياهما) ثابتة دائما مهما كان مقداراهما الفعليان . وسنرى فيما بعد كيف استخدمها فى إيجاد ارتفاع الهرم الأكبر. وليس من المستغرب أن تكون هذه الحقيقة قد أدركت فى تاريخ مبكر . وأننا نفترضها فى أغلب الحالات عندما نستخدم الهندسة فى رسم نموذج لشكل يتضمن مثلثات . ومتى أدركنا هذه الحقيقة أمكننا التقدم بسرعة إلى إكتشاف نتائج اخرى مفيدة . والسبب الرئيسى فى أن أقليدس مطول جدا هو أنه وضع كل ما يختص بالنسب فى نهاية منهجه بدلا من بدايته . وهناك سبب بسيط لذلك . فقد كان مقيدا بالثقافة الاجتماعية التى عاش فيها . فلم يحى الأغريق فى عالم الفوائد واستهلاك البترول وتحليل نتائج الكرة . ولم تكن النسب من المقادير المألوفة . إذ كانت تدل على عملية قسمة ، وكانت القسمة تعمل بواسطة آلة جامدة هى المعداد . ولم يكن التناسب خفيف الظل على تلاميذ اقليدس .

ويمكنك أن ترى بسهولة صعوبة تلاميذ اقليدس . فاذا فرضت أننى عرفت أن استهلاك عربة للبنزين هو ٣٥ ميلا للجالون . فانه يمكننى أن أعرف عدد الأميال التى يمكننى قطعها قبل أن أحتاج إلى بنزين بضرب عدد الجالونات فى الخزان فى ٣٥ . ويمكننى الحصول على عدد الجالونات اللازمة بقسمة عدد الأميال المرغوب قطعها على ٣٥ . والعمليتان متساويتا السهولة فى حسابنا . أما حساب إطار العد فمختلف . وضرب عدد صحيح فى آخر يعطينا دائما نتيجة مضبوطة يمكن الحصول عليها بالجمع المتكرر (شكل ٦) . وقسمة عدد صحيح على آخر معناه إيجاد عدد مرات امكان طرح أحدهما من الآخر . وتبقى عندك عادة بعض الخرزات على إطار العد . وقلما تحصل على اجابة تامة . ولذلك فان فهم عملية القسمة كان أكثر صعوبة عندما كان الناس يظنون أن جميع الأعداد الحقيقية أعداد صحيحة . وأضطر اقليدس الى تخصيص

كتاب بأكمله (الكتاب الخامس) لإيضاح القواعد البسيطة جدا للتناسب الملخصة كلها فى قاعدة القطر المعطاة فى الباب السابق . ارسم مثلثين قائمى الزاوية ، أحدهما فيه الضلعان القصيران ٣ سم ، ٤ سم والآخر فيه الضلعان القصيران ١½ بوصة ، ٢ بوصة ثم قارنهما ترى بدون صعوبة أن المثلثين اللذين تكون اضلاعهما المتناظرة متناسبة يهيئان موقفا لايزيد فهمه صعوبة عن الحقيقة أن الدراجة البخارية يكون لها نفس استهلاك البنزين فى يوم الجمعة الحزينة وفى أول أبريل .

وإحدى نسب أضلاع المثلث كمية مألوفة فى الحياة الحديثة . فتجدها محفورة على امتداد الطرق الحديدية وبالقرب من التلال الخطرة . فميل مقداره ١ فى ١٠ معناه أنك إذا رسمت مثلثا قائم الزاوية بمقياس رسم بحيث يكون أحد أضلاعه جزءاً من منحدر الطريق أو التل (الوتر) ، وضلع آخر أفقيا (القاعدة) ، والضلع الثالث الارتفاع العمودى على القاعدة ، فان القاعدة تكون دائماً عشرة أمثال العمود ، ويكون العمود دائماً عشر القاعدة . أى أن :

$$\frac{\text{العمود}}{\text{القاعدة}} = \frac{١}{١٠}$$



شكل (٣١) ميل مقداره ١ فى ٣

الزاوية بين الطريق والافق أ ، ظا أ = ⅓

وهذا الشكل أيضا مصور للقسمة على ٣ ، ولاستخدامه علم على القاعدة عدد الوحدات التى تريد قسمتها وقس طول الارتفاع

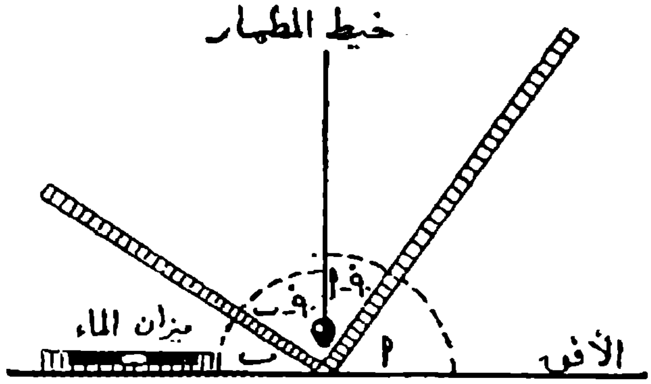
وهذه النسبة تسمى فى الرياضة عادة ظل الزاوية (أ) التى يصنعها المنحــدر مع الأفق ، وتكتب ظا أ ، ومعناها « ابحث فى جدول الظلال عن العدد الذى يناظر أ »(١) . وهناك فرعان من فروع الرياضة الأحدث (البابان السادس والحادى عشر) يبحثان أساسا فى الانحدارات . فحساب المثلثات يضعها فى جداول تمكننا من ايجاد مسافة يصعب علينا قياسها بالضبط أو يستحيل ذلك (مثل بعدنا عن القمر) إذا أمكننا قياس زاوية (أ) ومسافة أخرى (مثل البعد بين مكانين مختلفين على سطح الأرض) . وهذا يشبه استخدام استهلاك البنزين لمعرفة عدد الأميال الممكن قطعها إذا كان فى الخزان مقدار معين من جالونات البنزين ، أو عدد الجالونات التى تلزمنا لقطع عدد معين من الأميال . وفرع الرياضة المسمى بحساب التفاضل يقيس المنحدرات التى فيها انحناء ، كما نحسب المسافة بمعلومية استهلاك البنزين إذا كان الخزان يرشح . ولو أن أقليدس كان يعلم أهمية هذه النسب فى المستقبل لكان من المحتمل أن تكون محاولته أقوى فى ادخالها فى مرحلة مبكرة من منهجه كما نحاول أن نفعل ذلك .

طريقة اقليدس :

عندما كان يقول شرلوك هولمز كعادته « أنت تعلم طرقى يا واطسن » كان ينبغى أن يقول الدكتور واطسن « لا أعرفها . فأرجو أن تشرحها » . لقد رأينا فعلا الحيلة الأساسية التى كان أقليدس يستخدمها فى اكتشاف علاقات بين أعضاء الأشكال الميتة (خطوط وزوايا وسطوح) . فكان يقوم بتشريحها إلى مثلثات . فإذا علمنا فقط قيمة ضلع أو ضلعين من كل من مثلثين فإننا نحتاج إلى معرفة تساوى أى زوايا فيهما لكى نحكم أن كان المثلثان متساويين كماً . ودرجة الرعاة ، التى أساسها تقويم الفصول ، لا تساعدنا فى معرفة متى تتساوى الزوايا . وقد استعمل علماء الهندسة فى دول المدن زاوية بنائى المدن لمقارنة مقادير الزوايا (شكل ٣٢) .

---

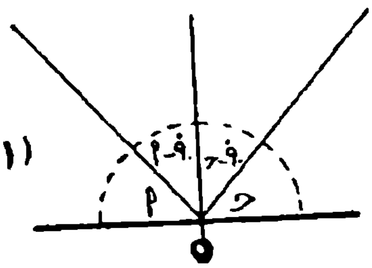
(١) اذا بحثت فى الجدول تجد ان ظا٧ر٥° قريب جـدا من ١ر٠ فيكون الميل ١ فى ١٠ يناظر منحدرا قدره٧ر٥° .



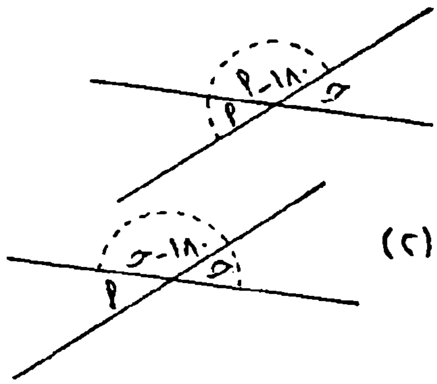
شكل (٣٢) تعليم الاضافة بالزوايا

وتعريف اقليدس للزوايا القائمة (= ٩٠°) كقولنا أن الانفراج بين خط المطمار والأفق متساو فى جميع الجهات . وهذا واضح بدون تمضية خمس سنوات كاملة فى مصر . والزاويتان يكون مجموعهما زاوية قائمة إذا كانت احداهما تمثل ميل حافة مستقيمة على الأفق والأخرى تمثل ميل نفس الحافة المستقيمة على خيط المطمار .

(١)



(٢)



(١) القاعدة الاولى للزاوية

الزاوية الوسطى = ٩٠ − ا + ٩٠ − ح

= ١٨٠ − ا − ح

مجموع الزوايا الثلاث = (١٨٠ − ا − ح) + ا + ح = ١٨٠°

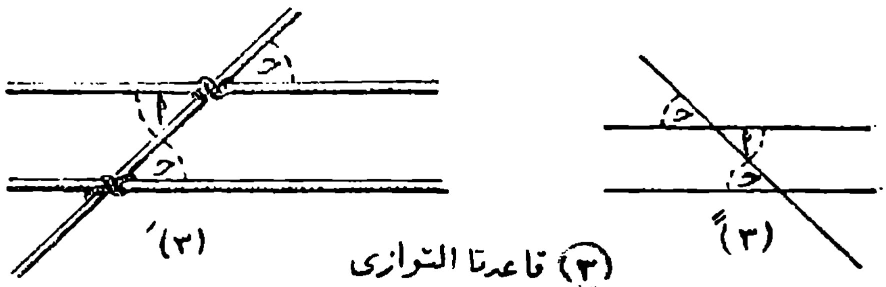
(٢) القاعدة الثانية للزاوية

رسم الشكل مرتين : وبمقارنة

الاثنين ∴ ١٨٠ − ا = ١٨٠ − ح

∴ ا = ح

الزاويتان ا ، ح تسميان المتقـــابلتين بالرأس



(٣) قاعدتا التوازى

(٣)ً تعلم كيف تعرف الزوايا المتســاوية المرسومة فى ناحية أخرى

(٣)ٌ رؤية متى يتوازى عمودان

شكل (٣٣)

فاذا قرأت الكتابة المرافقة لشكل ٣٣ فانك سوف لاتجد صعوبة مطلقا فى رؤية قاعدتين كان علماء الهندسة من الإغريق يستخدمونهما لمعرفة متى تتسـاوى الزوايا . هاتان القاعدتان هما :

القاعدة الأولى للزاوية — عنـدما يتلاقى مستقيمان فى نقطة على مستقيم ثالث فان مجموع الزوايا الثلاث الحادثة قائمتان ، أى ١٨٠° .

القاعدة الثانيـة للزاوية — عندما يتقاطع مستقيمان تـكون الزوايا المتقابلة بالرأس متساوية .

وهناك قاعدتان أخريان تساعدان على رؤية متى تتسـاوى الزوايا وتذكراننا بقيد رابع لهندسة أقليدس . فقد عرف أقليدس المستقيمات المتوازية بأنها المستقيمات التى لاتتلاقى مهما امتدت . وهـذا التعريف يرفعنا إلى السماء ويتركنا فى الهواء مثل أفلاطون . فنحن لانعرف مطلقا أى سطح مستو لدرجـــة تسمح لنا برسم خطوط ومدها إلى أى بعـــد نشاء مع الاحتفاظ باستقامتها . فاننا نعمل رسومنا على جزء من سطح الأرض صغير بالنسبة إلى باقى سطحها صغراً كافيا يجعلها تظهر كما لو كانت مستوية فعلا . فقدعلمنا الفلك الحديث أن المستقيمات المتوازية حسب تعريف أقليدس ليست من نوع المستقيمات التى تمتد إلى أبعـــد النجوم لو أمكننا الوصول اليها . والمعقول كثيرا هو أن نسأل كيف ندرك متى تتوازى المستقيمات . وإحدى الطرق

هو أن نلاحظ أن حافتين مستقيمتين تتوازيان عندما نجمل الفرجتين بين كل منهما وحافة أخرى مستقيمة موضوعة بجوارهما متساويتين ، أو بعبارة فنية ، عندما تتساوى الزاويتان المتناظرتان (شكل ٣٣) . وبالعودة إلى (شكل ١٢) ومقارنته (بشكل ٣٣) ترى أن هـذه هى القاعدة المبنى عليها استخدام الاسطرلاب فى قياس الزاوية التى يصنعها تل أو نجم مع الأفق . وتخبرنا عندئذ القاعدة الثانية للزاوية أن الزاويتين المتبادلتين (ا ، حـ فى شكل ٣٣) متساويتان أيضا . ويعطينا هذا قاعدتين جديدتين عن تساوى الزوايا :

القاعدة الأولى للتوازى — عندما يقطع مستقيم ثالث مستقيمين متوازيين تكون الزاويتان المتناظراتان التى يصنعها معهما متساويتين .

القاعدة الثانية للتوازى — عندما يقطع مستقيم ثالث مستقيمين متوازيين فانه يصنع زوايا متبادلة متساوية .

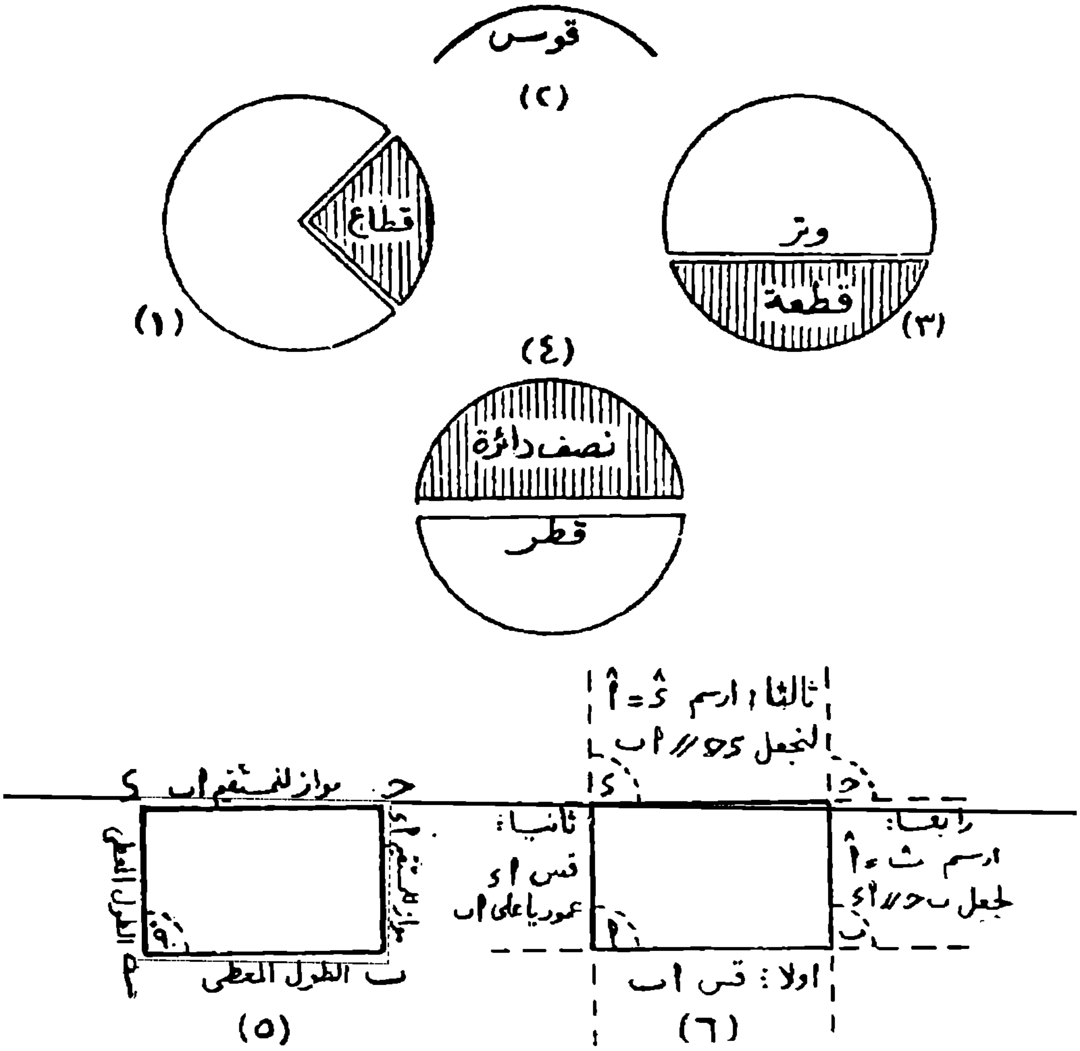
وهناك طريقة هامة لمعرفة متى يتساوى مستقيمان مختلفان عندما لا يكونان ضلعين متناظرين فى مثلثين متطابقين ، أو ضلعين من أضلاع مربع ، أو الضلعين المتساويين فى مثلث متساوى الساقين . وقد سبق أن استعملنا هذه الطريقة فعلا . وقاعدة أخرى قد تظهر أوضح من أن تذكر ، لولا أنها فى الواقع تعيننا على التخلص من صعوبة كبيرة . لكى نرى تطابق مثلثين لابد من إدراك ضلع على الأقل فى أحدهما يساوى نظيره فى الآخر . فاذا كنا نقوم بتشريح شكل لا نجد فيه أضلاعا متساوية فقد نستطيع تشريحه إلى مثلثين برسم مستقيم يقطعه . فسيشترك المثلثان فى ضلع . أى يكون ضلع فى أحد المثلثين مساويا ضلعا فى الآخر . وقد استخدم أقليدس حيلة ثالثة ليست ضرورية لنا ، بل يلزمنا وضع قاعدتين فقط تنتج أولاهما من طريقة رسم دائرة على الرمال بواسطة وتدين وحبل .

القاعدة الأولى للمستقيم: يتساوى المستقيمان إذا كانا نصفى قطرى نفس الدائرة .

القاعدة الثانية للمستقيم: إذا رسمت مستقيما يصل رأسى شكل مستقيم الأضلاع فانك تقسمه إلى شكلين فيهما ضلع مشترك وهو المستقيم المرسوم. فيكون هناك ضلع واحد على الأقل فى أحد الشكلين يساوى ضلعا فى الشكل الآخر .

والإرشاد الآخر الوحيد الذى نحتاج اليه لنعرف أين نبدأ التشريح هو كيف نشرح الدائرة . إذ يمكن تشريح الدائرة إلى شرائح أو قطاعات برسم نصفى قطرين أو أكثر ، أو إلى قطع برسم مستقيم يصل نقطة على محيطها بأخرى . ويسمى الضلع المنحنى للقطعة أو القطاع القوس . والمستقيم المرسوم من نقطة على المحيط مارا بالمركز

إلى النقطة المقابلة على المحيط يسمى القطر ويقسم الدائرة إلى قسمين متساويين يسمى كل منها نصف دائرة . ولم نذكر للآن شيئا عن المستطيل . وقبل أن نتمكن من تشريح جسم لابد من إيجاده . وكل ما يلزمنا معرفته لرسم مستطيل هو أنه شكل مقفل محدود بأربعة مستقيمات ، وكل ضلعين متقابلين فيه متوازيان ، واحدى زواياه قائمة ، وينتج من طريقة استخدام القاعدة الأولى للتوازى لرسم مستطيل أنه إذا كانت إحدى زواياه قائمة فجميع زواياه قوائم (شكل ٣٤ ، الجزء الخامس) .



شكل (٣٤) تشريح الدائرة والمستطيل

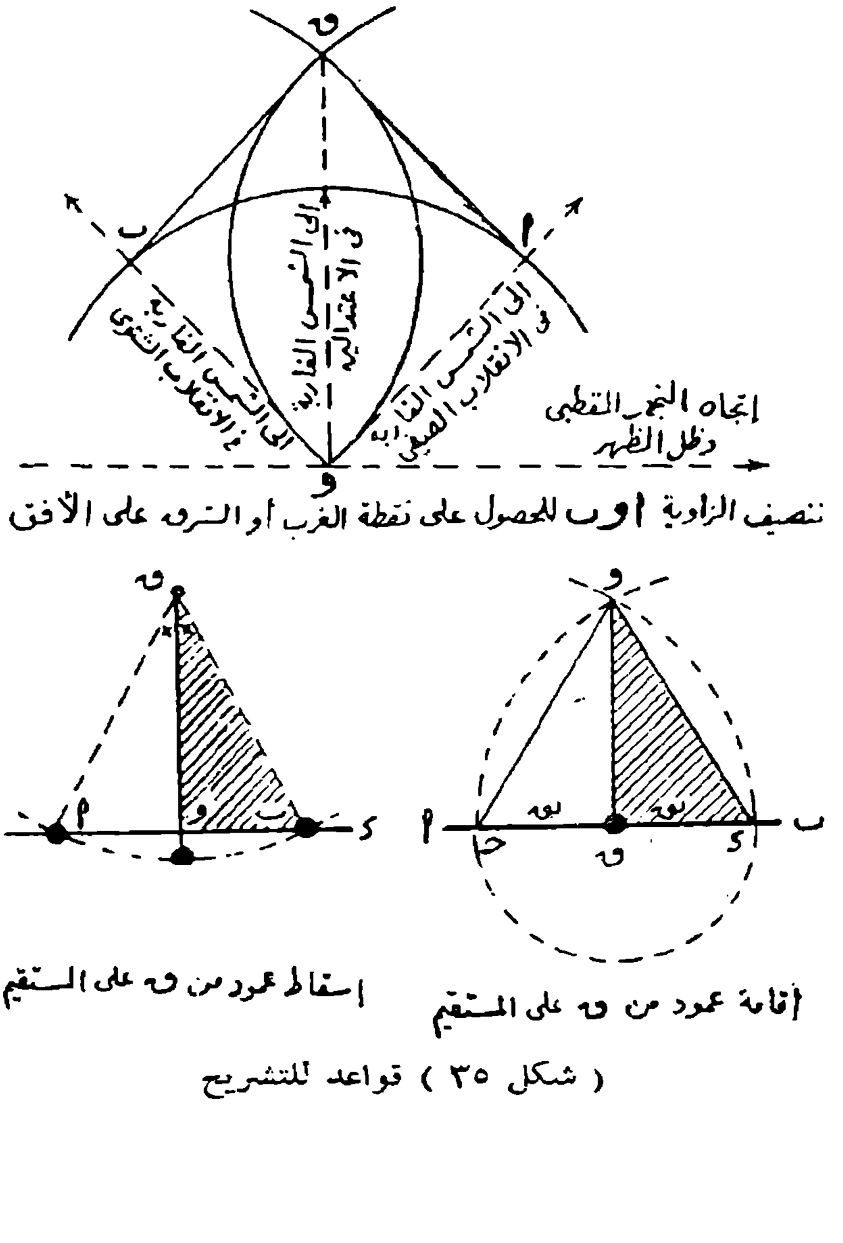
ملاحظة: لرسم الضلعين المتوازيين استخدم القاعدة الأولى للتوازى ، وأبدأ برسم ا = ٩٠° ، ومن هذا تجد أن جميع الزوايا قوائم .

والقواعد الهندسية التى مكنت من جاءوا بعد الإغريق من ابتداع لغات كم أفيد وأقل تعقيدا مثل حساب المثلثات والجبر قليلة جداً . ويكفينا أثنتا عشرة قاعدة .

وسنرتبها تحت ثلاثة رؤوس تدل على الوسط الاجتماعى الذى نشأت فيه . وقد سمى أقليدس عرض قاعدة عن الأشكال نظرية . ولكننا سنتبع ديمقريطس المادى فى تسميتها تداريب . وسنضعها فى مجموعات تبعا لكيفية استعمالها الأول أو اكتشافها كما يلى : أربعة تداريب فى رصد النجوم أو صناعة التقويم . ويجب أولا تطبيق القواعد الثلاثة للمثلثات لشرح طرق التشريح الثلاثة التى سنستعملها فى اثباتها . فقبل أن تصير مشرحا يجب أن تتعلم استعمال آلاتك .

قواعد التشريح :

(١) كيف تشرح زاوية إلى زاويتين (التنصيف) — رأينا فى الباب الثانى أن هذا مبنى على ما كان يعمله مهندسو المعابد لرسم خطوط الزوال على الرمال لكى يأخذ المعبد الاتجاه الصحيح .



(شكل ٣٥) قواعد للتشريح

قارن الشكل الأول فى شكل (٣٥) بشكل (٩) . فشكل (٣٥) يبين لك كيف كانوا يحصلون على خطفى اتجاه الغرب يمر بالشمس الغاربة يوم احتفال الخصوبة العظم فى الاعتدال الربيعى . المثلثان ب و ن ، ا و ن متطابقان لمساواة الأضلاع الثلاثة فى أحدهما للأضلاع الثلاثة فى الآخر (قاعدة المثلث الأولى) . لأنه إذا كانت أنصاف أقطار الدوائر الثلاثة التى مراكزها ا ، ب ، و متساوية (نفس قطعة الحبل مستخدمة لها جميعا) كان :

ب ن = ا ن } (قاعدة المستقيم الأولى)
، ب و = ا و
، و ن = و ن (قاعدة المستقيم الثانية)

فاذا كان المثلثان ب و ن ، ا و ن متساويين كما ، كانت الزاوية ب و ن المحصورة بين ب و ، و ن مساوية للزاوية ا و ن المحصورة بين الضلعين المناظرين او ، و ن والزاوية فى الشكل ٩٠° . وتبقى الطريقة كما هى لأى زاوية .

(ب) كيفية « إسقاط عمود » على مستقيم — هذه الطريقة أساسها ملاحظة تأرجح خيط المطمار . فهو رأسى عندما يكون فى منتصف المسافة بين طرفى أرجحته . ن فى الشكل هى النقطة التى نريد أن نسقط منها عمودا على المستقيم حـ ى . ارسم أولا أى دائرة مركزها ن تقطع المستقيم فى ا ، ب . وننصف زاوية التأرجح بالمستقيم ن و باستعمال الطريقة الأولى للتشريح . وهذا يجعل الزاويتين و ن ب ، و ن ا متساويتين. بمقارنة المثلثين ب و ن ، ا و ن ترى أن :

ن ا = ن ب (قاعدة المستقيم الأولى)
ن و = ن و (قاعدة المستقيم الثانية)
الزاوية المحصورة ا ن و = و ن ب

فيكون المثلثان متساويين كماً بحسب قاعدة المثلث الثانية . وإذن تكون الزاوية ن و ب المحصورة بين ن و ، و ب مساوية للزاوية ن و ا المحصورة بين الضلعين المناظرين ن و ، و ا . وعندما يلاقى مستقيم مستقيما آخر بحيث يصنع معه زاويتين متساويتين على

جانبيه تكون كل من الزاويتين قائمة . فيكون ﮬ و عموديا على حـ ى أى يصنع معه زوايا قوائم .

(حـ) كيفية إقامة عمود على مستقيم من نقطة معينة ـــ علينا ايجاد النقطة الواجب تعليق خيط المطار منها . ﮬ فى الشكل هى النقطة على المستقيم ا ب المطلوب إقامة العمود منها . أى ارسم مستقيم يصنع مع ا ب زوايا قوائم . آرسم أى دائرة بنصف قطر لق مركزها ﮬ لتقطع ا ب فى حـ ، ى . ثم ارسم دائرة أكبر نصف قطرها نق ومركزها حـ ودائرة اخرى نصف قطرها أيضاً نق ومركزها ى . المثلثان حـ و ﮬ ، ى و ﮬ متطابقان بناء على قاعدة المثلث الأولى ، لأن :

حـ و = نق = ى و

حـ ﮬ = لق = ى ﮬ

و ﮬ = و ﮬ

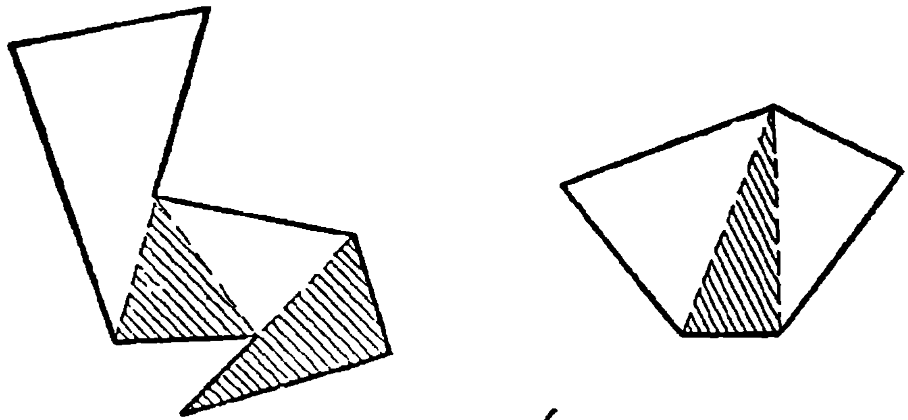
فى هذين المثلثين المتطابقين تتناظر الزاويتان و ﮬ ى ، و ﮬ حـ ، فتكونان متساويتين . ويكون و ق عموديا على ا ب .

وقبل أن نبدأ تداريبنا عليك باستذكار القواعد التسعه السابقة : قواعد المثلث الثلاثة ، وقاعدتى الزاوية ، وقاعدتى التوازى ، وقاعدتى المستقيم .

أربعة تداريب فى المسح

التداريب الثلاثة الأولى التى أوردها اقليدس فى كتبه الثانى والأول والسادس كانت معروفة للمصريين والسومريين قبل عهده بألفى سنة . أما التدريب الرابع ، وهو المذكور فى كتاب اقليدس الثانى ، فيحتمل أن يكون اغريقيا وأن يكون ظهر بعد الثلاثة الأولى بكثير . وهذه التداريب كلها عن قياس المساحة وقد نشأت أصلا بمناسبة قياس الأرض . فاذا بدأنا بالحيز المسطح المحصور داخل مربع كوحدة قياس فانه يمكننا أن نبين كيف نوجد مساحة مستطيل كمجموع شبكة من المربعات . ونرى أيضا كيف نعمل مستطيلا مساحته ضعف مساحة أى مثلث قائم الزاوية . وعلى ذلك يمكننا إيجاد مساحة

مثلث قائم الزاوية . ثم بعد ذلك نبين أن أى مثلث يمكن قسمته إلى مثلثين قائمى الزاوية . وعلى ذلك يمكننا ايجاد مساحة المثلث من أى نوع . وأى شكل محدود بأضلاع مستقيمة يمكن قسمته إلى مثلثات (شكل ٣٦) .



شكل (٣٦)

اذا أمكننا ايجاد مساحة مثلث ،فيمكننا ايجاد مساحة أية قطعة من الارض اذا كانت مستقيمة الاضلاع

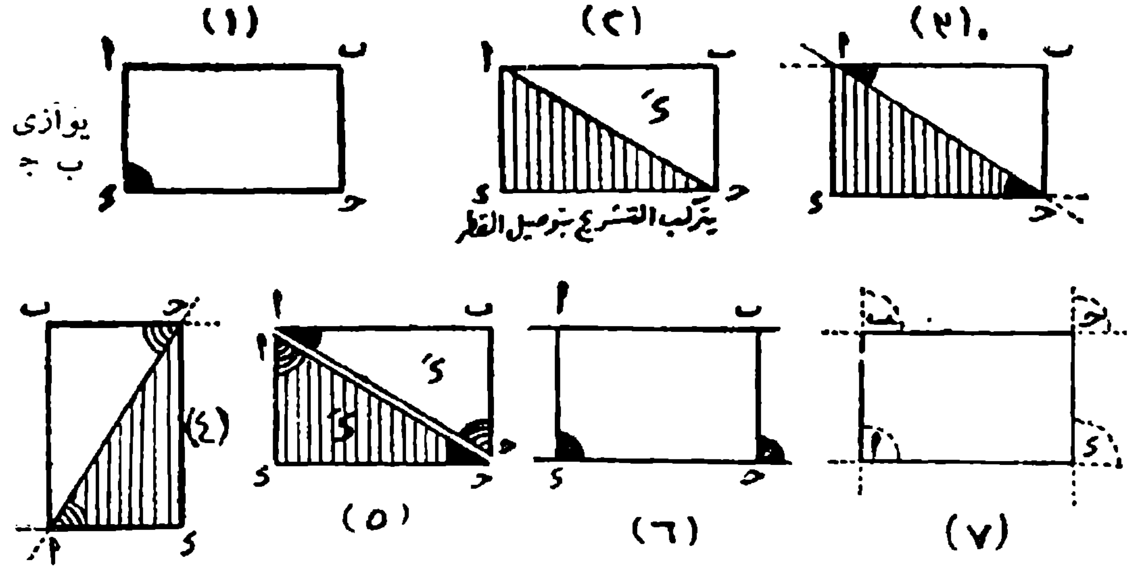
بهذه المعلومات يمكننا قياس مسطح أى قطعة من الأرض مهما كان شكلها ما دامت أضلاعها مستقيمة .

وهذه التداريب تعتبر نماذج لكيفية القيام بالعمليات الحسابية بجانب كونها نماذج لقياس الأرض (أنظر الباب الثالث) .

والأولى والأخيرة منها توحيان ببعض وصفات بسيطة لاختصار العمل على العداد [وقد أرشدنا العرب فيما بعد إلى وضع قواعد فى الحساب نستخدمها الآن . وهذه القواعد تسمى الجبر (الباب الرابع)] وقد يظهر أن البدء بالعلاقة بين المستطيل والمربع هو الطريق الأقوم ، ولكنا سنحتاج إلى استعمال شىء يتوقف على العلاقة بين المستطيل والمثلث قائم الزاوية لبيان كيفية إيجاد مساحة المستطيل . ولذا سنبدأ بالمثلث القائم الزاوية والمستطيل .

تدريب ١

« قطر المستطيل يقسمه إلى مثلثين قائمى الزاوية متطابقين » .



(شكل ٣٧) تدريب ١

اح فى شكل (٣٧) هو قطر المستطيل اب ح ى . وقد رأينا أن جميع زوايا المستطيل قوائم (شكل ٣٤) .وعليه فالمثلثان اب ح ، ا ى ح مثلثان قائما الزاوية فهما

(١) اح = ىَ = اح قاعدة المستقيم الثانية

(٢) حاب = احى قاعدة التوازى الثانية ، أنظر شكل ٣٣ (٣)

(٣) بحا = حاى قاعدة التوازى الثانية ، أنظر شكل ٣٣ (٣)

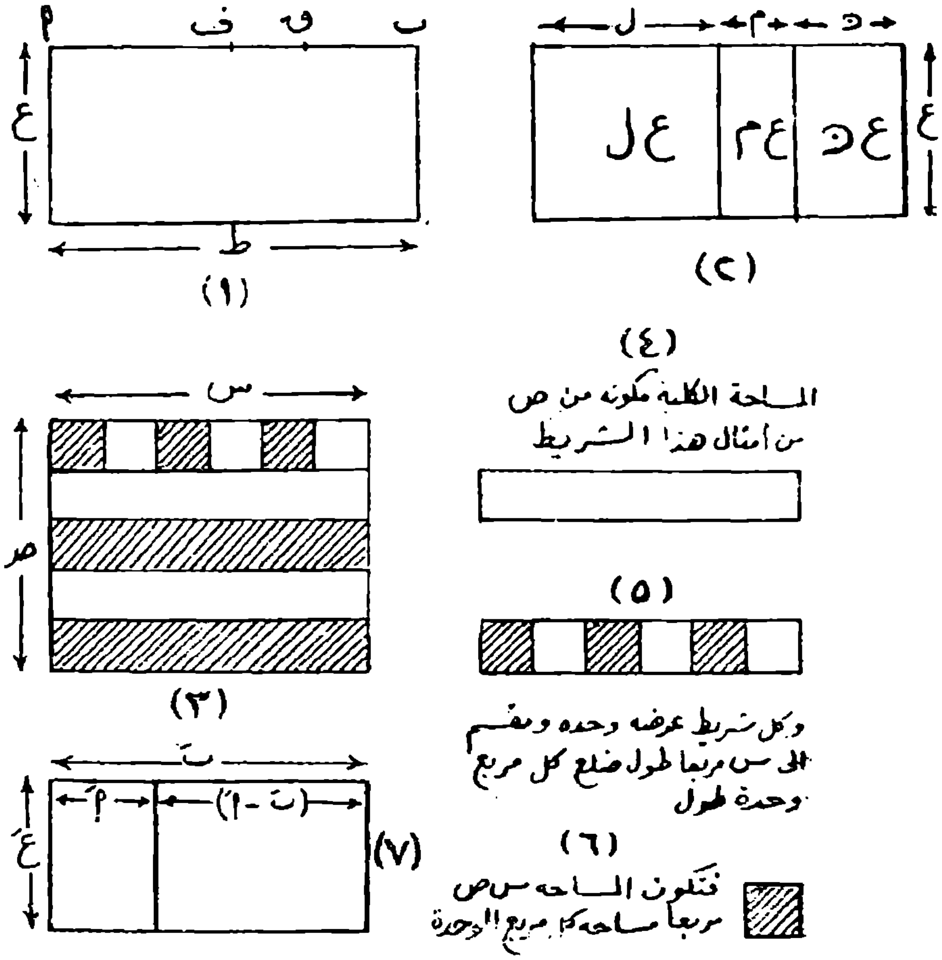
وبمقارنة (٥) فى شكل (٣٧) ، ٣ فى شكل (٣٠) نرى من قاعدة المثلث الثالثة أن المثلثين ابح ، اىح متطابقان . وطريقة أخرى لوضع هذه النتيجة هى أن نقول «أننا يمكننا إيجاد مساحة مثلث قائم الزاوية إذا أمكننا إيجاد مساحة مستطيل بعمل المستطيل الذى يساوى طوله وعرضه الضلعين المتعامدين . وتنشأ عن هذ التدريب نتيجتان هامتان :

(أ) الأضلاع المتقابلة فى المستطيل متساوية — بما أن المثلثين متطابقان فإن الضلعين اب ، اح المحيطين بالزاوية حاب يساويان نظيريهما ىح ، اح المحيطين بالزاوية احى التى تساويها . وكذلك الضلعان المتناظران اى ، بح متساويان .

(ب) الأعمدة الواصلة بين مستقيمين متوازيين متساوية — يمكنك أن تتبين صحة ذلك من (٦) فى شكل (٣٧) . لأنه إذا كان ا ب ، ى حـ متوازيين وكان ا ى ، ب حـ عمودين فإنهما يصنعان معهما زاويتين متناظرتين متساويتين (قاعدة التوازى الأولى) فيكونان متوازيين . وتكون الأضلاع المتقابلة فى الشكل ا ب حـ ى متوازية . وبما أن إحدى زواياه قوائم فهو إذن مستطيل . وعليه فالضلعان المتقابلان ا ى ، ب حـ متساويان .

تدريب (٢) :

« إذا قسم أحد أضلاع مستطيل أجزاء ذات أطوال مختلفة فإن مساحة المستطيل الكلية تساوى مجموع مساحات المستطيلات المكون كل منها من الضلع غير المقسم وأحد أجزاء الضلع المقسم » .



(شكل ٣٨) تدريب ٢

الضلع ا ب فى شكل ٣٨ (١) طوله ط ، قسم فى ف ، ن إلى ثلاث قطع ا ف ، ف ن ، ن ب أطوالها على الترتيب ل ، م ، ه من الوحدات . وترى التشريح فى (٢) برسم عمودين من ف ، ن على الضلع المقابل . وبهذا ينقسم الشكل إلى ثلاثة مستطيلات . وبما أن كل ضلعين متقابلين فى المستطيل متساويان (تدريب ١ — ١) ، فإن العمودين يساويان ع وهو طول الضلع الآخر فى المستطيل الكلى . ويمكننا الآن أن نرى أن :

مساحة المستطيل الكلى ع فى ط = مجموع مساحات المستطيلات ع فى ل ، ع فى م ، ع فى ه .

حاول أن تتصور أننا مصريون قدماء أو سومريون ، فيكون علينا أن نثبت لأنفسنا أن « فى » هنا تعنى نفس الشىء كعلامة الضرب . ولإثبات ذلك نعمل نموذجاً لمستطيل كما فى (٣) شكل (٣٨) ونقسم أحد أضلاعه إلى س من وحدات الطول ونقسم ضلعه الآخر إلى ص من وحدات الطول (قارن شكل ٢٤ حيث س = ٤ ، ص = ٣) فإذا نظرت إلى (٤) ، (٥) ، (٦) لرأيت أنه يمكننا كتابة :

ع ط من وحدات المساحة = (ع ل + ع م + ع ه) من وحدات المساحة

وبما أن ط = ل + م + ه

فيمكننا كتابة هذا هكذا ع (ل + م + ه) = ع ل + ع م + ع ن (ا)

وفى (٧) إذا طرحنا المستطيل الصغير عَ فى اَ من المستطيل الكلى عَ فى بَ نحصل بنفس الطريقة على : عَ (بَ — اَ) = عَ بَ — عَ اَ (ب)

ويمكن استخدام هاتين النتيجتين لاختصار عملية الضرب على العداد . إذ كانت فى البداية عملية ضرب ٣٦ فى ٢٥ معناها عد ٣٦ خمسا وعشرين مرة بدون ارجاع الخرز إلى مواضعه الأصلية . وفى العصور الوسطى بدأ استخدام الأعداد العربية ولكن تعلم جدول الضرب بأكمله لم يكن مألوفا بل أن جدول المرتين كان محفوظا عن ظهر قلب ومستخدما فى اجراء قاعدة فجة للضرب كان اسمها « التضعيف » . فباستعمال (ا) يمكننا وضع

٣٦ × ٢٥ = ٣٦ (١٦ + ٨ + ١)

وعندئذ تجرى العملية على المراحل التالية :

$$٣٦ \times ٢ = ٣٦ + ٣٦ = ٧٢$$

$$٣٦ \times ٤ = ٧٢ + ٧٢ = ١٤٤$$

$$٣٦ \times ٨ = ١٤٤ + ١٤٤ = ٢٨٨$$

$$٣٦ \times ١٦ = ٢٨٨ + ٢٨٨ = ٥٧٦$$

$$٣٦ \times ١٦ = ٥٧٦$$

$$٣٦ \times ٨ = ٢٨٨$$

$$٣٦ \times ١ = ٣٦$$

$$\overline{\underline{٩٠٠}}$$

وهناك طريقة أخرى يظهر أنها كانت محبوبة فى العصور القديمة حيث تحمل الأولون مشاق عمل جداول لمربعات الأعداد ، كما يتبين من ألواح نيبور . فيمكننا أيضا وضع

$$٢٥ \times ٣٦ = ٢٥ (٢٥ + ١١)$$

وبالاستمرار بهذه الكيفية :

$$٢٥ \times ٣٦ = ٢٥^٢ + ١١ \times (٢٥) = ٢٥^٢ + ١١ \times (١١ + ١٤)$$

$$= ٢٥^٢ + ١١^٢ + ١١ \times (١٤) = ٢٥^٢ + ١١^٢ + ١١ \times (١١ + ٣)$$

$$= ٢٥^٢ + ١١^٢ + ١١^٢ + ٣ \times (١١)$$

$$= ٢٥^٢ + ١١^٢ + ١١^٢ + ٣ \times (٣ + ٣ + ٣ + ٢)$$

$$= ٢٥^٢ + ١١^٢ + ١١^٢ + ٣^٢ + ٣^٢ + ٣^٢ + ٣ \times (٢)$$

ومن جداول المربعات نحصل على قيمة ذلك هكذا :

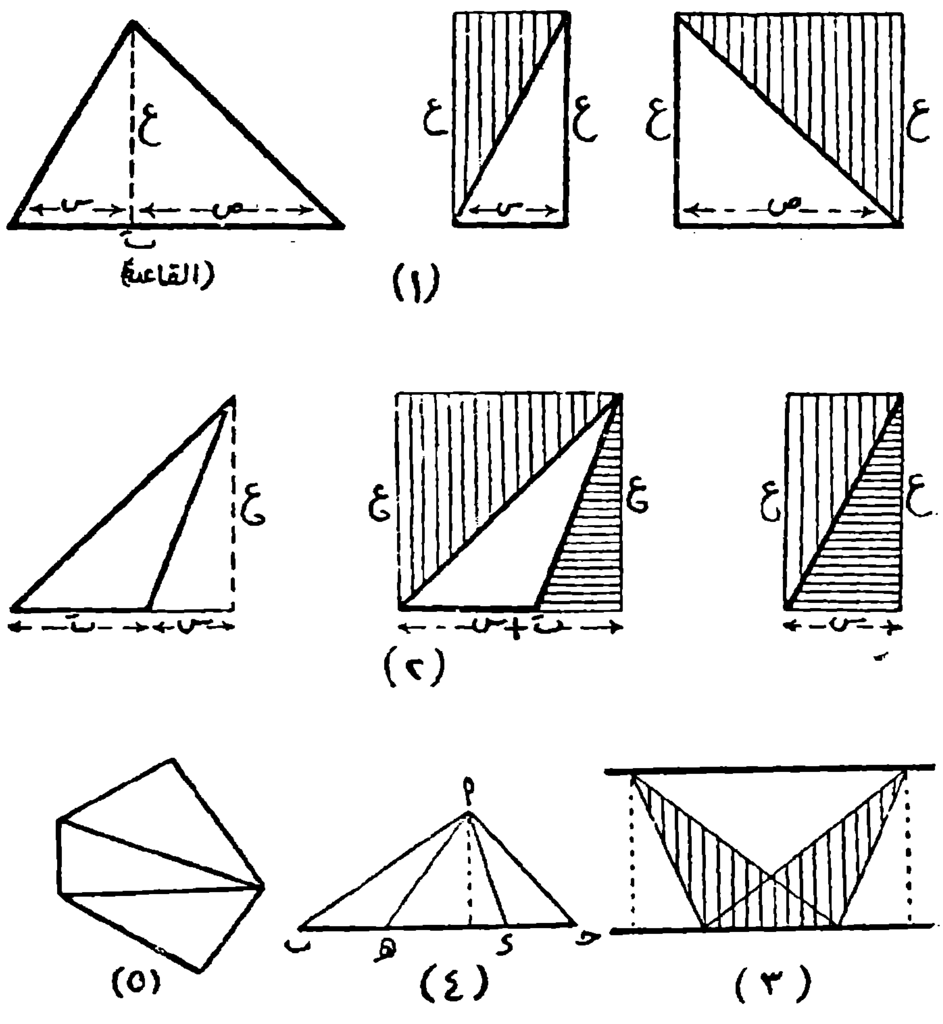
$$٦٢٥ + ١٢١ + ١٢١ + ٩ + ٩ + ٩ + ٦$$

وقد أجريت عملية الضرب الأخيرة بالذاكرة
ثم بإجراء عملية الجمع الأخيرة على العداد نحصل على النتيجة الصحيحة وهى ٩٠٠

تدريب ٣ :

« مساحة المثلث تساوى نصف حاصل ضرب أحد أضلاعه فى الارتفاع العمودى من الرأس المقابل » .

بعد أن بدأنا بأخذ الحيز المسطح المحصور داخل مربع كمقياس للمساحة ، تعلمنا كيف نوجد مساحة مستطيل . ثم كيف نوجد مساحة مثلث قائم الزاوية إذا عرفنا كيفية إيجاد مساحة مستطيل . وللقيام بالخطوة التالية وهى إيجاد المساحة (م) لأى مثلث نجد التشريح اللازم بسيطا جداً (شكل ٣٩) .



(شكل ٣٩) تدريب ٣

(١) إذا لم تكن إحدى زوايا المثلث قائمة فاسقط من رأس المثلث العليا عموداً على قاعدته . هذا العمود يقسم المثلث إلى مثلثين قائمى الزاوية . ويكون كل منهما مكافئاً نصف مستطيل حسب تدريب ١ . من تدريب ٢ لمساحة المستطيل :

$$م = \frac{1}{2} ع س + \frac{1}{2} ع ص \quad ،$$

لكننا رأينا أن $\frac{1}{2}$ ع س + $\frac{1}{2}$ ع ص = $\frac{1}{2}$ ع (س + ص) تدريب ٢ (أ)

$$\therefore \quad م = \frac{1}{2} ع (س + ص)$$

$$\therefore \quad م = \frac{1}{2} ع بَ$$

(٢) إذا كانت إحدى زوايا المثلث أكبر من قائمة اسقط عموداً على امتداد الضلع كما فى (شكل ٣٩) (٢) .

$$فيكون \quad م = \frac{1}{2} ع (بَ + س) - \frac{1}{2} ع س$$

$$= \frac{1}{2} ع بَ + \frac{1}{2} ع س - \frac{1}{2} ع س$$

$$= \frac{1}{2} ع بَ$$

(أ) هذه النظرية تعيننا أيضاً على عرض قاعدة هامة جـــداً فى حساب الظل (تدريب ٧) بجانب أنها تعرفنا كيفية قياس مساحة مثلث . فإذا كان لدينا مثلث (مساحته م) وقاعدته طولها ب من وحدات الطول وارتفاعه العمودى ع ، ومثلث آخر (مساحته مَ) وقاعدته طولها بَ من وحدات الطول وله نفس الارتفاع العمودى فإن النسبة بين مساحتيهما يمكن كتابتها :

$$\frac{م}{مَ} = \frac{\frac{1}{2} ع \times ب}{\frac{1}{2} ع \times بَ} = \frac{ب}{بَ}$$

أى أن النسبة بين مساحتى مثلثين لهما نفس الارتفاع العمودى كالنسبة بين قاعدتيهما . ولابد لنا من التمكن من معرفة متى يكون لمثلثين نفس الارتفاع العمودى لكى نصل إلى التدريب الهام جداً الذى ذكرناه . وإليك دليلين إلى ذلك :

(ب) تتساوى الارتفاعات العمودية للمثلثات إذا كانت قواعدها على استقامة واحدة ووقعت رؤوسها فى نفس النقطة .

يمكنك رؤية هذا من (شكل ٣٩) (٤) . حيث المثلثات ا ب حـ ، ا ب هـ ، ا هـ ى ، ا ى حـ ، ا هـ حـ ، ا ب ى لها جميعا نفس الارتفاع العمودى .

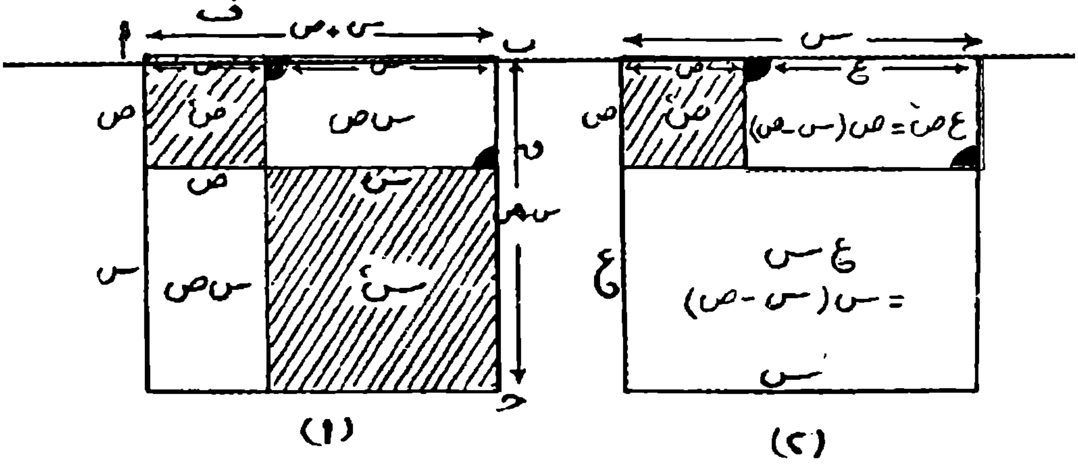
(حـ) تتساوى الارتفاعات العمودية للمثلثات إذا اشتركت فى القاعدة ووقعت رؤوسها على مستقيم يوازى القاعدة .

وهذا موضح فى (شكل ٣٩) (٣) . فقد عرفنا من تدريب ١ (ب) أن الأعمدة الواصلة بين مستقيمين متوازية متساوية .

تدريب ٤ : (كيفية تشريح مربع)

« إذا قسم ضلع مربع إلى جزأين كانت المساحة الكلية للمربع مساوية لمجموع مساحتى المربعين على كل من الجزأين وضعف مساحة المستطيل الذى ضلعاه المتجاوران يساويان الجزأين .

المربع عبارة عن مستطيل جميع أضلاعه متساوية . والصعوبة الوحيدة فى رؤية صحة النظرية هى معانى الكلمات .



(شكل ٤٠) تدريب (٤)

فى (شكل ٤٠) (١) قسم ا ب ضلع المربع الكبير فى ف إلى قطعتين طولهما ص ، س من الوحدات . وعلى ذلك يكون ا ب طوله (س + ص) . وقد قسم الضلع المجاور ب حـ بنفس الكيفية فى ﻫ . ثم رسم عمودان على الضلعين المقابلين من ف ، ﻫ . فقسم كل منهما المربع إلى مستطيلين . فيتعين طول كل ضلع من أضلاع الأشكال الأربعة المتكونة من معرفة أن الأضلاع المتقابلة فى المستطيل متساوية . مساحة المربع الكبير هى :

ا ب × ا ب أى (س + ص)^{٢} . ويتبين من الشكل أن :

(س + ص)^{٢} من وحدات المساحة = (س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}) من نفس وحدات المساحة

أى أن (س + ص)^{٢} = س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}

ونستنتج من تدريب آخر مشابه جداً مبين فى شكل ٤٠ (٢) أن :

س^{٢} − ص^{٢} = (س − ص) س + (س − ص) ص

وبتطبيق تدريب ٢ (ا) :

س^{٢} − ص^{٢} = (س − ص) (س + ص)

وسنرى فى الباب السابع أن أنواع عمليات الضرب التى تمثلها هـذه الأرقام بشكل هيروغليفى لعبت دوراً غاية فى الأهمية فى اكتشاف الجبر . والآن اختبر بنفسك كل قاعدة من قواعد الضرب هذه ،

فمثلا : (ا) (٣ + ٤)^{٢} = ٧^{٢} = ٣^{٢} + ٢ (٣ × ٤) + ٤^{٢}

= (٩ + ٢٤ + ١٦) = ٤٩

(ب) ٧^{٢} − ٤^{٢} = ٣٣ = (٧ − ٤) (٧ + ٤)

وما هذا التدريب إلا تطبيق لقاعدة إيجاد مساحة مستطيل . ومن المشكوك فيه أن يكون قد استخدم إطلاقا فى شئون المسح . أما تطبيقه العمـلى فى العصور

القديمة فكان لاختصار عمليات الضرب على العدادقبل أن يكون لدى الناس كتابة عددية يمكن بواسطتها القيام بعمليات حسابية مباشرة ، كما نعمل الآن .

ويعطينا نيقوماخوس الاسكندرى (١٠٠ ميلادية) أمثلة لأسلوب استعماله قبل أن يستعمل الرياضيون — ودع عنك الناس العاديين — جدول الضرب لإجراء عملياتهم على الورق . وإليك مثالين :

(ا) اضرب ٣٧ فى ٢٥ أوجد أولا العدد الذى فى منتصف المسافة بينهما وهو ٣١ فيكون :

$$٣٧ \times ٢٥ = (٣١ - ٦)(٣١ + ٦)$$

$$= ٣١^٢ - ٦^٢ = ٩٢٥$$ (تحقق بنفسك من صحة ذلك) .

وكل ما عليك عمله الآن أن تبحث عن مربعى ٣١ ، ٦ فى جداول المربعات القديمة مثل تلك الموجودة فى نيبور (سنة ٢٠٠٠ قبل الميلاد) ثم طرحهما . وهذا أكثر اختصاراً من الطرق المعطاة لتوضيح استعمال تدريب ٢ . وقد كان المثل السابق المعطى هناك وهو ٣٦ × ٢٥ . وليس هناك عدد صحيح فى منتصف المسافة بين هذين العددين وعلى ذلك نستعمل العدد الأكبر مباشرة من ٣٦ أو الأصغر منه مباشرة .

فمثلا : $٣٦ \times ٢٥ = (٣٧ - ١) \times ٢٥ = (٣٧ \times ٢٥) - ٢٥$
« تدريب ٢ (ب) »

$$= ٣١^٢ - ٦^٢ - ٢٥ = ٩٠٠$$

ويسمى العدد الأوسط بين عددين الوسط الحسابى أو المتوسط المعتاد . ويسىء السياسيون وغيرهم استعماله أكثر من أى كمية فى لغة الكم . فالوسط الحسابى للعددين ا ، ب هو $\frac{١}{٢}$ (ا + ب) ، فمثلا الوسط الحسابى للعددين ٣٧ ، ٢٥ هو $\frac{١}{٢}(٣٧ + ٢٥) = \frac{١}{٢}(٦٢) = ٣١$. والوسط الحسابى للعددين ٣٦ ، ٢٥ هو $٣٠\frac{١}{٢}$.

(ب) وقد نتج عن استعمال هذه الحيلة لاختصار العمل على العداد أن أصبح من المهم جداً عمل جداول جيدة للمربعات . ويمكن استعمال نفس هذا القانون لعملها .

فإذا فرض أن لدينا مربعات الأعداد لغاية ١٠٠ ، ونرغب فى الاستمرار أكثر فإليك ما أوصى به نيقوماخوس . لإيجاد مربع عدد أكبر مثل ١١٨ نتصرف هكذا :

$$(١١٨)^٢ - (١٨)^٢ = (١١٨ - ١٨) (١١٨ + ١٨)$$

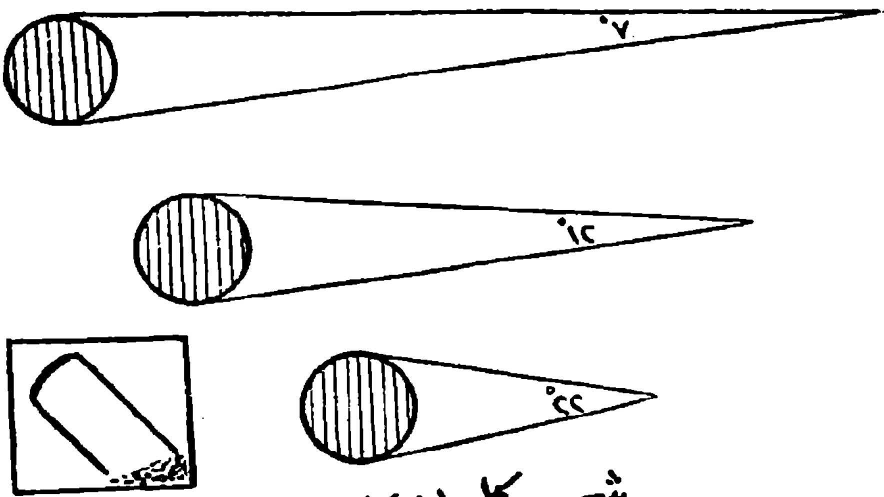
$$\therefore \quad (١١٨)^٢ = (١٠٠) (١٣٦) + (١٨)^٢ = ١٣٩٢٤$$

لأن الضرب فى عشرة أو مائة أو ما شاكلها على إطار العد لأى عدية أساسها مضاعفات عشرة ، كمعظم النظم ، أسهل بكثير جداً من الضرب فى أى عدد آخر . ولذلك نحصل على النتيجة بسرعة .

أربع تداريب فى حساب الظل :

من الصعب على أبناء المدن منا فى الحضارات الشمالية الذين ألفوا السكن فى بيوت لها نوافذ زجاجية فسيحة ، معدة بغاز الاستصباح أو الكهرباء ، وبالساعات وبغيرها إن سمحت حالتنا المادية من ثلاجات ومكانس كهربائية ، أن يدركوا بخيالهم دلالة الضوء والظل فى مهد الحضارة عند بناء المدن الحجرية الأولى . فنى يومنا هذا يلزمنا تصميم تجارب لتعليم الأولاد والبنات فى المدارس أن الضوء النافذ من فتحة يتخذ طريقاً واضحاً محدداً ، وأن أشعة الشمس متوازية . أما سكان المدن الأولون الذين كانت نوافذهم الوحيدة شقوقا ضيقة تلعب أشعة الشمس وضوء القمر من خلالها على الهواء المحمل بالتراب ، فكانوا يعيشون وسط الشمس المشرقة التى تلقى على الرمال ظلالا عالية نظيفة حادة الأطراف . فلم يكونوا بحاجة إلى من يعلمهم أن الضوء يسير فى خطوط مستقيمة ، أو أن أشعة الضوء المنبعث من جسم بعيد جداً ميلها ضئيل جداً لدرجة أننا يمكننا اعتبارها متوازيه . فهم يرون هذا بأنفسهم يومياً طول النهار (شكل ٤١) .

وعندما زار طاليس مصر واستخدم طريقة حساب الظل فى إيجاد ارتفاع الهرم الأكبر كانت حضارة النيل القديمة قد خضعت للآشوريين ثم للحيثيين على التوالى ، وليس هناك أدنى شك فى أنه استخدم نفس القاعدة البسيطة للقياس المعمارى التى استخدمها بناة الأهرام أنفسهم ، ولو أنه يقال أنه أدهش المصريين بطريقته . وقد كان فن حساب الظل أحد الفنون "عظيمة فى العصور القديمة . فكما أن هندسة المستطيل نشأت من قياس الأرض بقصد تقدير الضرائب على صغار الزراع ، فقد كشفت



شـــكل (٤١)

كلما كان الجرم السماوى بعيـدا صغرت الزاوية بين الأشعة الواردة من حافته ، والزاوية التى تقابل قطر الشمس أو القمر نساوى تقـريبا نصف درجة ، وأشـــعة الشمس والقمر المتوازية تقـريبا كانت من الأمور العادية للحياة اليومية حينمالم يوجد زجاج ، وكانت النـوافذ ضيقة وعالية .

هندسة المثلث عن استخدام حساب الظل فى البناء . وقد كان علم الهندسة مزدهراً فى مصر وفى الرافدين وقت أن كان سكان الشمال يبنون دوائر حجرية وشوارع حجرية مازال بعضهاموجوداً فى براري ديفون وكورنوول حيث كانت سفن الفينيقيين تذهب لأخذ القصدير . فما زالت أنقاض قرى عديدة من أكواخ حجرية بدائية منتشرة حيث كان القصـدير يوجد بكثرة . ولم يحدث قط أن قاموا ببناء مدن أومعابد من بنات أفكارهم ، وهم فى ذلك مثل «الباتو» . ولم يكن تأخر الرجل فى أوربا الشمالية راجعا إلى بلادته كما أعتقد أرسطو رسول العبودية ، أو كما علم «سيد طليطلة» المثقف عندما كان المغاربة يبنون حمامات قام غزاتهم النورديون بتـدميرها وطرد اليهود وإدخال رائحة التقديس . وقد وجد أرسطو وسيد طليطلة من الأسباب لدعم أحكامهما المغرضة مايشبه الأسباب التى يجدها من يشيرون إلى تأخر الباتو فى جيلنا هذا . مثل هؤلاء القوم يخرجون من حسابهم الظروف المادية التى هيأت لبدء الحضارة . وقد تعلم رجل الشمال فن البناء من حضارات سابقـة . وقد اضطر أيضا أن يتعلم فن ضبط الوقت قبل أن يتمكن من قطع شوط فى التقدم . ولم تتقدم حياة المدن المستقرة الزراعـة المتزنة كثيراً فى الدول التى ماكانت المزولة فيها أكثر من حلية للحديقـة ، قبل أن

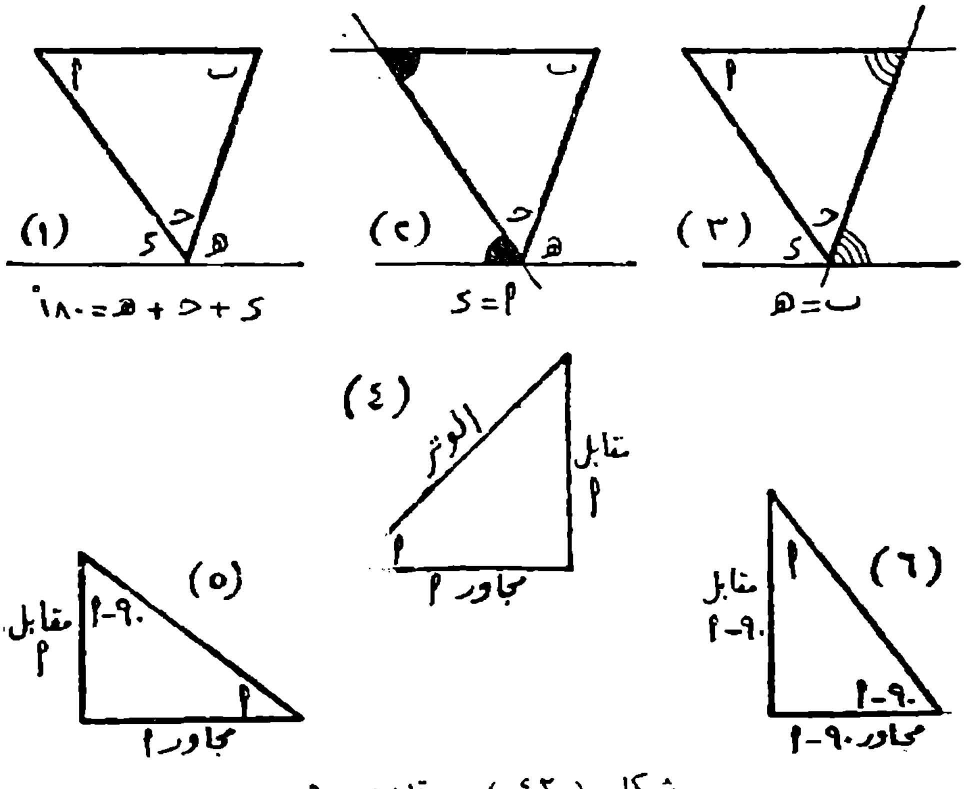
يدخل القسس الأجانب الساعة الشمعية لتحديد مواعيـــد قرع الأجراس لصلاة الصباح وصلاة المساء .

والتداريب الأربعة التالية معطاة بالترتيب فى كتاب أقليدس الأول (٥ ، ٦ ، ٨) والسادس (٧) . وقد كانت الثلاثة الأولى معلومـــة لطاليس الفينيق . ومازالت الأخيرة تحمل اسم فيثاغورس الفينيق ، ولو أن لدينا من الأسباب مايبرر أخـذه إياها عن الصينيين . وفى شرح هـذه التداريب سنعطى أمثلة لاستخدامها فى المعمار وفى المسح متقدمين بذلك الخطوة التالية التى اتخذها الاسكندرانيون الذين طبقوها فى مسح السماوات . وأولاها ليست ذات فائدة مباشرة ، ولو أنها فى غاية البساطة . وتنحصر أهميتها فى أنها تساعد على إدراك صدق الثلاث الآخر .

تدريب ٥

« مجموع الزوايا الثلاث لأى مثلث قائمتان » .

كل مايجب عليك أن تعمله هو أن تجعل إحـدى رؤوس المثلث تنزلق على حافة مستقيمة حتى يصير الضلع المقابل موازيا للحافة المستقيمة . وشكل ٤٢ (١) ، (٢) ، (٣) يوضح الخطوات التى يمكن تلخيصها فيما يلى :



شكل (٤٢) ـ تدريب ٥

ا + ب + حـ = ء + حـ + هـ (قاعدة التوازى الثانية)

، ء + حـ + هـ = ١٨٠° (قاعدة الزاوية الأولى ــ شكل ٣٣) (١).

وهذا بسيط جداً لدرجة أننا سننتهز الفرصة لشرح الطرق التى تستخدم لعرض قواعد حساب الظل المعطاة فى التداريب الثلاثة التالية . فعليك بملاحظة مايلى .

(ا) يتطابق المثلثان إذا ساوى ضلع فى أحدهما نظيره فى الآخر وساوت زاويتان فى أحدهما نظيرتيهما فى الآخر .

هذا يجمع بين ماعرفناه الآن وبين قاعدة المثلث الثالثة (شكل ٣٠) (٣) التى تخبرنا أنه يمكن رسم المثلث إذا علمنا ضلعه اَ وزاويتيه ب ، حـ . فاذا حدث أن عرفنا الزاويتين ا (المقابلة للضلع اَ) ، ب فانه يمكننا معرفة الزاوية الثالثة حـ فى الحال هكذا :

ا + ب + حـ = ١٨٠°

∴ حـ = ١٨٠ − (ا + ب)

فمثلا إذا كانت ا تساوى ٦٠° ، ب تساوى ٦٠° ، كانت حـ تساوى ١٨٠° ــ (٦٠° + ٦٠°) أى حـ تساوى ٦٠° .

وإذا كانت ا تساوى ٤٥° ، ب تساوى ٩٠° كانت حـ تساوى ١٨٠° ــ (٤٥° + ٩٠°) أى ٤٥° . وإذا كانت ا تساوى ٣٠° ، ب تساوى ٩٠° كانت حـ تساوى ٦٠° . وبالمثل إذا عرفنا ا ، حـ فانه يمكننا إيجاد ب . فمثلا إذا كانت ا تساوى ٦٠° ، حـ تساوى ٩٠° كانت ب = ١٨٠° ــ (ا + حـ) أى ٣٠° .

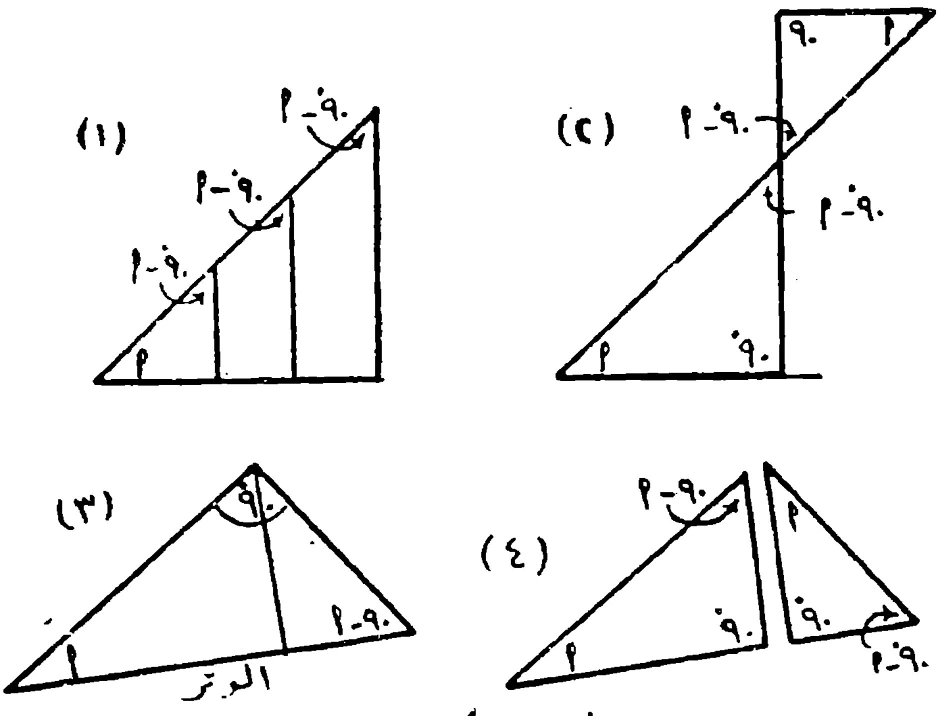
(ب) إذا عرفنا الزاوية (ا) من مثلث قائم الزاوية خلاف الزاوية القائمة فاننا نعرف الزاوية الثالثة (٩٠° ــ ا) .

وقد سبق أن رأينا هذا فعلا . لأنه إذا كانت الزوايا الثلاث ا ، ٩٠° ، ٩٠° ــ ا فان مجموعها يكون ١٨٠° ، أى أن ا + ٩٠° + ٩٠° ــ ا = ١٨٠°

وهناك ثلاثة اصطلاحات تطلق على أضلاع المثلث القائم الزاوية . فأطول الأضلاع المقابل للزاوية القائمة يسمى الوتر ، وإذا كانت ا زاوية خلاف القائمة سمى الضلع

المقابل لها المقابل ، وسمى الضلع الثالث المجاور للزاوية ا . ويلاحظ أن المقابل للزاوية ٩٠° — ا هو المجاور للزاوية ا وبالعكس (شكل ٤٢ (٤) ، (٥) ، (٦)) .

(ح) جميع المثلثات قائمة الزاوية التى تتساوى فيها إحدى الزوايا تكون متشابهة، أى متساوية الزوايا (شكل ٤٣ (١)) .



شكل (٤٣)

(ى) إذا أمكن وضع مثلثين قائمى الزاوية بحيث يشتركان فى الرأس ويكون ضلعاهما (غير المتعامدين) على استقامة واحدة كان المثلثان متشابهين شكل ٤٢ (٢) ،

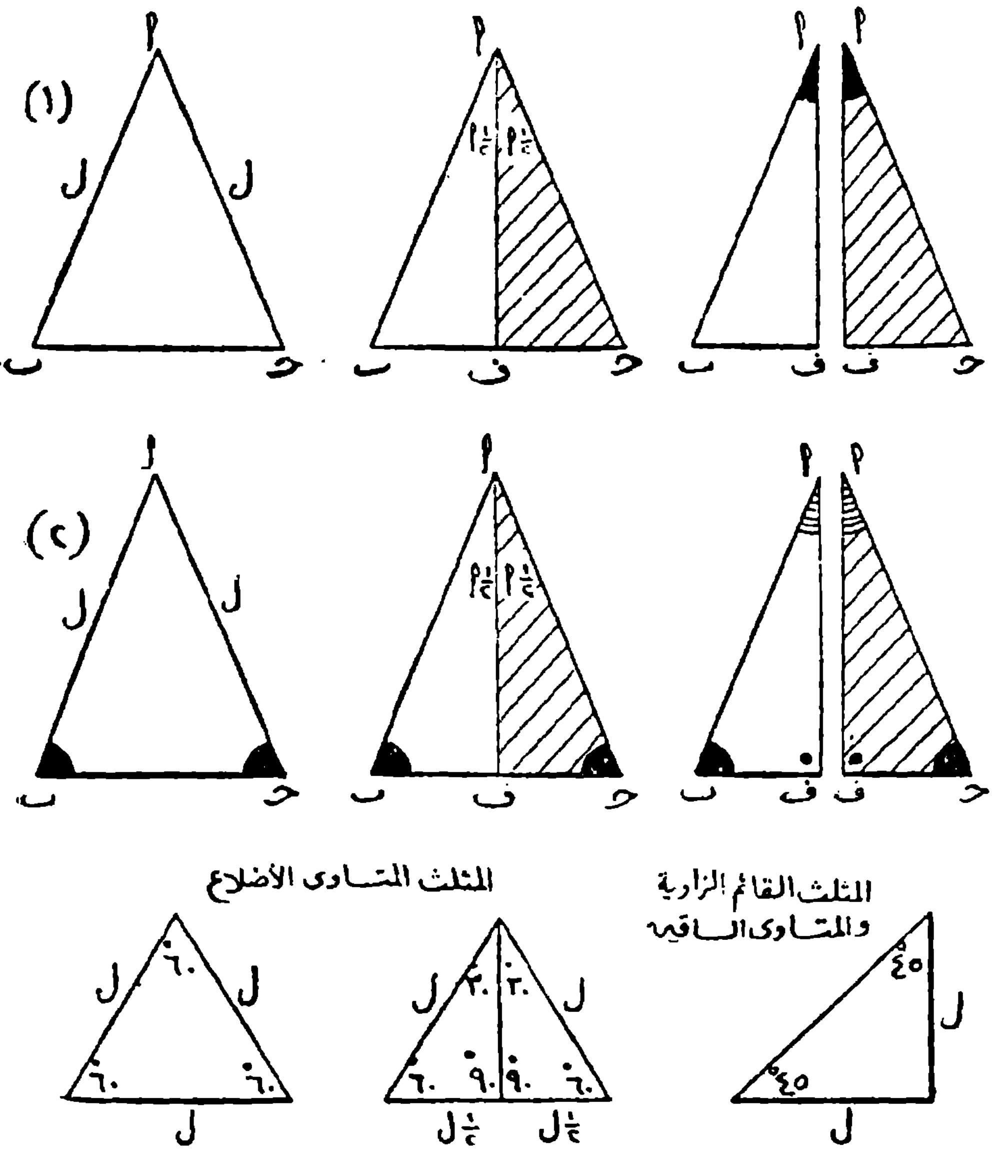
(هـ) العمود النازل من رأس القائمة على الوتر يقسم المثلث القائم الزاوية إلى مثلثين قائمى الزاوية يشابهان المثلث الأصلى ، ويكونان حينئذ متشابهين .

وهذا موضح فى شكلى ٤٣ (٣) ، (٤) . وهى واحدة من أهم الحيل فى تقسيم المثلثات .

تدريب ٦ :

« إذا تساوى ضلعان فى المثلث تساوت الزاويتان المقابلتان لهما ، وإذا تساوت زاويتان تساوى الضلعان المقابلان لهما » .

نحتاج إلى إثبات شيئين هنا . ولكن التقسيم واحد لكل منهما . فنقسم المثلث إلى مثلثين بتنصيف الزاوية بين الضلعين المتساويين ، أى الزاوية خلاف الزاويتين المتساويتين ، باستخدام قاعدة التقسيم .



شكل (٤٤) ــ تدريب ٦

(١) إذا علمنا أن ا ب = ل = ا حـ (شكل ٤٤ الصف الأعلى) ، فبمقارنة المثلثين ا ب ف ، ا ف حـ نرى أن :

ا ب = ل = ا حـ

والزاوية المحصورة ب ا ف = ½ ا = الزاوية المحصورة حـ ا ف

، ا ف = ا ف (مشترك فى الاثنين)

فبناء على قاعدة المثلث الثانية يكون المثلثان متطابقين . ومعنى هذا أن جميع أضلاعهما المتناظرة متساوية ، وجميع زواياهما المتناظرة متساوية . فتكون الزاوية ا حـ ب المقابلة للضلع ا ب مساوية للزاوية ا ب حـ المقابلة للضلع المساوى له ا حـ .

(٢) إذا علمنا (شكل ٤٤ الصف الثانى) أن الزاويتين ب (ا ب حـ) ، حـ (ا حـ ب) متساويتان نرى أن :

∠ ا ب حـ = ∠ ا حـ ب	(من الفرض)
، ∠ ب ا ف = ½ ا = ∠ حـ ا ف	
، ا ف = ا ف	(مشترك فى المثلثين)

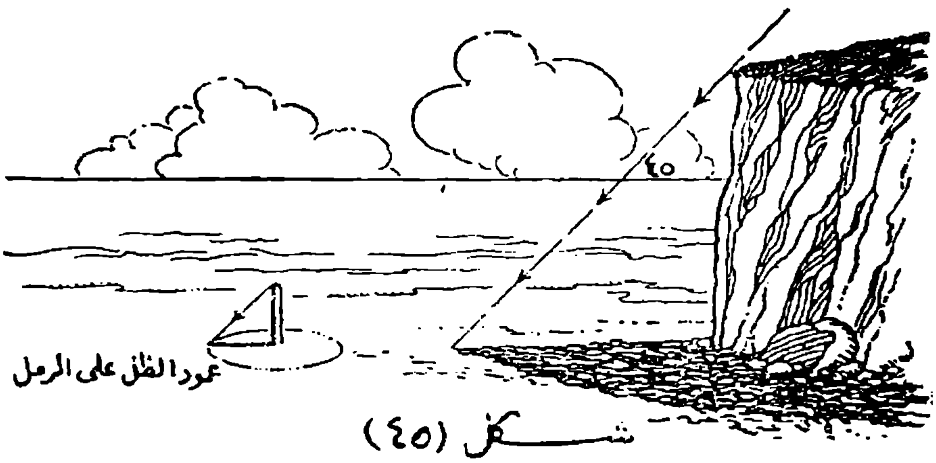
ولكن رأينا من تدريب ٥ (ا) أن المثلثين يتطابقان إذا تساوى فيهما ضلع وزاويتان متناظرتان . فيكون إذن المثلثان ا ف ب ، ا ف حـ متطابقين . ويكون الضلع ا ب المقابل للزاوية ا حـ ب مساوياً الضلع المناظر ا حـ المقابل للزاوية ا ب حـ التى تساويها . وقبل أن ننتقل لبيان كيف يمكن استعمال هذا لقياس ارتفاع تل بمعرفة ظله ، أو لرؤية إن كنا بنينا واجهة عالية إلى الارتفاع المطلوب ، سنتوقف هنا قليلا لنرى أن هذا التدريب يعطينا أسلوباً بسيطا لعمل الزوايا ٣٠° ، ٦٠° ، ٤٥° (انظر شكل ٤٤ الصف الأسفل) .

(ا) لرسم زوايا ٣٠° ، ٦٠° — يمكننا رسم مثلث متساوى الأضلاع بتثبيت حلقة مقفلة من الحبل بأوتاد فى عقد عليه موضوعة على أبعاد متساوية من بعضها البعض . ومما عرفناه الآن نجد أنه إذا كانت الأضلاع الثلاثة متساوية (طولها ل) كانت الزوايا الثلاث متساوية . وبما أن مجموع الثلاثة ١٨٠° ، فتكون كل منها ثلث ١٨٠° أى ٦٠° . وإذا رجعت إلى الصف الأعلى من

(شكل ٤٤) ، ترى أنه إذا كان المثلثان ا ب ف ، ا ف حـ متطابقين كان الضلع ب ف مساويا الضلع المنـــاظر ف حـ ، أى أن ف تقسم ب حـ إلى قسمين متساويين . فنجد فى المثلث المتساوى الأضلاع المقسم بنفس الكيفية بأسفل الشكل أن كلا من الضلعين المقابلين للزاوية ٣٠° (½ الـ ٦٠°) يساوى ½ ل . فبتوصيل رأس المثلث المتساوى الأضلاع بمنتصف قاعدته المقابلة نحصل على زاوية ٣٠° ، وتكون الزاوية الأخرى قائمة (تدريب ٥) .

(ب) لعمل زوايا ٤٥° — لقد تبين لنا من تدريب ٥ (ا) أنه إذا كانت إحدى زوايا المثلث القائم الزاوية ٤٥° كانت الزاوية الثالثة ٤٥° . فيكون المثلث القائم الزاوية الذى زاويته ٤٥° به زاويتان متساويتان ، وإذن فيه ضلعان متساويان . فبعد رسم زاوية قائمة يمكننا عمل زاوية ٤٥° بقياس مسافتين متساويتين (ل) على العمود والقاعدة وتوصيل الطرفين . ونتوقع من علماء الهندسة والمعمار المصريين عمل هذا بواسطة الحبل والوتد على الرمال. ويمكننا عمله الآن بواسطة خيط ودبابيس رسم على نضد .

قياس ارتفاع صخرة على الشاطئ

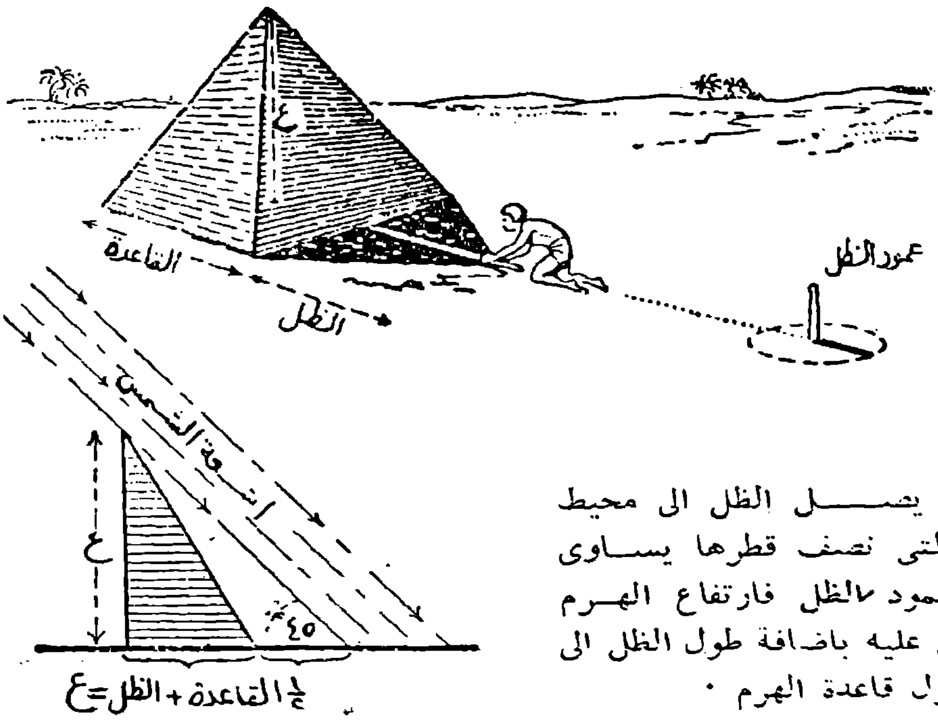


شكل (٤٥)

حساب الظل لتعيين الارتفاعات . الدائرة المرسومة حول عمود الظل نصف قطرها مساو لطول العمود . وعلى ذلك فعندما تكون الشمس على ارتفاع ٤٥° فوق الافق فنهاية الظل تمس المحيط .

وترى فى شكل (٤٥) استعمال هذا التدريب الذى كان يسمى بقنطرة الحمير (لأن الحمير الذين قاموا بتعليمها اهتموا اهتماما شديداً بتدمير القنطرة التى تربطها بالعالم الحقيقى) . فعندما تكون الشمس فوق الأفق بزاوية ٤٥° (أو ٤٥° عن سمت الرأس) فإن

شعاع الشمس والتل وظله ، أو شعاع الشمس وأى جسم رأسى وظله تكون مثلثا قائم الزاوية متساوى الساقين . ومعنى ذلك أن طول الظل عندئذ يساوى ارتفاع التل . ولاستعمال ذلك إغرس عصاة فى الرمل ثم اجلس بالقرب منها حتى يصير ظل العصا مساويا طولها . وعندئذ تقيس ظل التل فتحصل على ارتفاعه . أما كيفية استعمالها لبناء هرم فمبينة فى الشكل التالى ، حيث تتحقق القاعدة المذكورة فى ظهر كل من يومين اثنين أثناء العام .



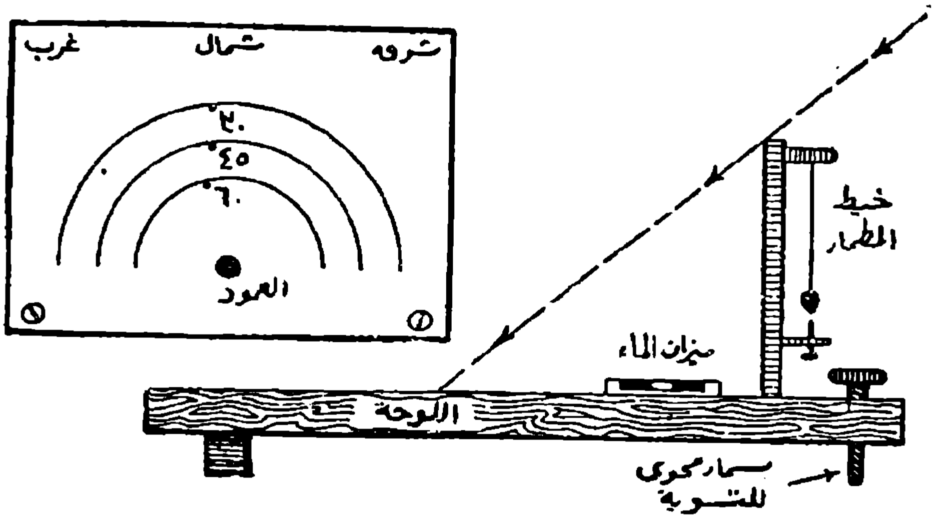
حينما يصل الظل الى محيط الدائرة التى نصف قطرها يساوى ارتفاع عمود الظل فارتفاع الهرم ع يحصل عليه باضافة طول الظل الى نصف طول قاعدة الهرم .

شكل (٤٥) ا

حينما تكون شمس منتصف النهار على ارتفاع ٤٥° فان ارتفاع الهرم يساوى طول الظل مضافا اليه طول نصف القاعدة .

ومن العبث أن نظل ننتظر وقت الظهر من هذين اليومين . فالوقت اللازم للترقب حتى تحصل على ظل الهرم فى اللحظة التى يتساوى فيها مع ارتفاعه أكبر كثيراً من الزمن اللازم لتعلم التدريب التالى الذى يريك كيف تحسب ارتفاع الهرم عندما تميل أشعة الشمس بأى زاوية . فإذا وجدت هذا التدريب مطولا ، فقد يرضيك أن تعرف أنه فى الحقيقة يوفر وقتا .

فإذا أمكنك الوصول إلى سطح، أو حديقة خلفية أو فناء، فإنك ترى فى شكل ٤٦ تصميما لعامود ظل يمكنك بواسطته ، كما سترى فيما بعد ، أن توجد ارتفاع منزلك ، وخط طول مكانه وخط عرضه ، والزمن من اليوم ، ومدى ميل الأرض ظاهريا على محورها أثناء السنة (ميل المدار على القطبين ويسميه الفلكيون ميل الدائرة الكسوفية) .

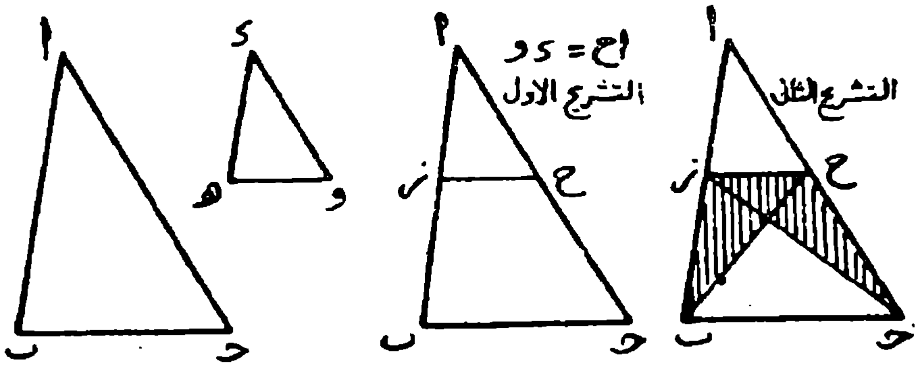


شكل (٤٦) — تصميم لعامود ظل منزلى

تدريب ٧ :

« فى المثلثات المتشابهة تتناسب الأضلاع المتناظرة » .

يحتاج التقسيم فى هذه النظرية إلى التحايل ، فسنقوم به على ثلاث مراحل :



شكل (٤٧) — تدريب ٧

تجد مرسوما فى يسار (شكل ٤٧) مثلثين متشابهين ا ب حـ ، ء هـ و ويمكنك أن ترى بسهولة أى الزوايا فيهما متساوية . وعندما نريد إثبات شيء جديد فإن أول شيء نسأله هو ماذا نعرف فعلا عن نوع الشيء الذى نبحث عنه ، وهنا نبحث عن نسب ، وكل ما تعلمناه عن النسب حتى الآن هو أن النسب بين مساحات المثلثات المتحدة الارتفاع كالنسب بين قواعدها (تدريب ٣) . فعلينا إذن أن نبحث عن مثلثات قواعدها الأضلاع المتناظرة فى المثلثين اللذين نقارنهما . ولعمل ذلك نبدأ بوضع المثلثين فى شكل واحد .

(١) فى الشكل الأيمن : أخذ ا ح على ا حـ بحيث يساوى ء و ، رسم ر ح يوازى ب حـ . فبمقارنة المثلثين ا ر ح ، ا ب حـ نرى أولا أن :

∠ ر ا ح = ∠ ب ا حـ

∴ ∠ ر ا ح = ∠ هـ ء و (∵ المثلثين ا ب حـ ، ء هـ و متشابهان)

، ∠ ا ح ر = ∠ ا حـ ب
∠ ا ر ح = ∠ ا ب حـ } (قاعدة التوازى الأولى)

∴ ∠ ا ح ر = ∠ ء و هـ ، ∠ ا ر ح = ∠ ء هـ و (∵ المثلثين ا ب حـ ، ء هـ و متشابهان) وبمقارنة المثلثين ء هـ و ، ا ر ح نجد

∠ هـ ء و = ∠ ر ا ح

، ء و = ا ح (بالرسم)

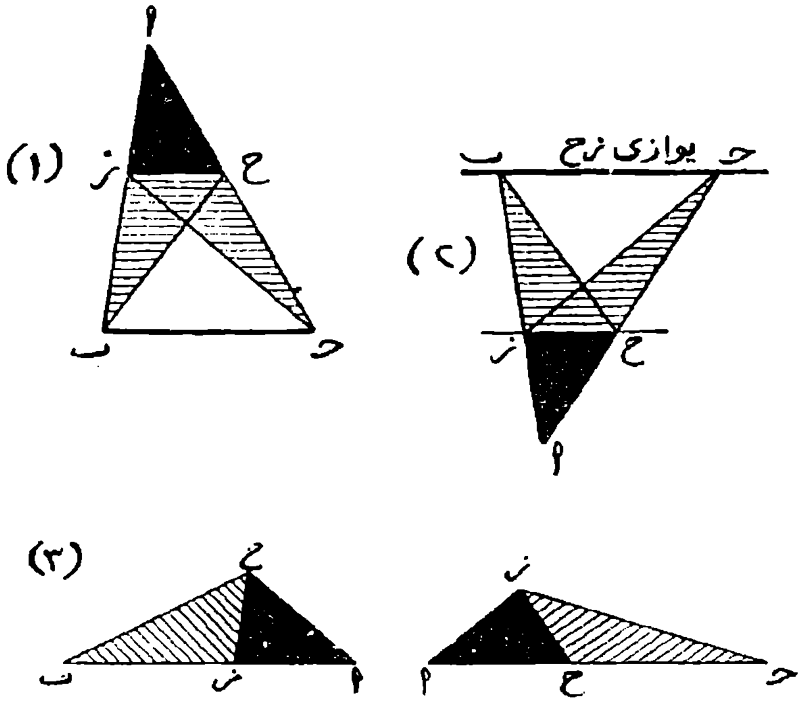
، ∠ ء و هـ = ∠ ا ح ر

ومن قاعدة المثلث الثالثة يكون المثلثان : ء هـ و ، ا ر ح متطابقين

∴ ر ح = هـ و ، ا ر = ء هـ . . . . (١)

(٢) عرفنا من نظرية ٣ أن المثلثات تتساوى ارتفاعاتها إذا وقعت قواعدها على مستقيم واحد ووقعت رؤوسها المقابلة على مستقيم يوازى المستقيم الأول . وهذا يوحى بالخطوة التالية . فارسم المستقيمين ر حـ ، ح ب (أيمن الشكل ٤٧)

ثم أنظر إلى الشكل مقلوبا (كما فى شكل ٤٨) (٢) لتحصل على شكل مالوف لما سيلى . يمكنك الآن أن ترى (تدريب ٣ (١) (شكل ٣٩) (٣) :



شكل (٤٨) – تدريب ٧ (تكملة)

مساحة △ ب ز ح = مساحة △ ز حـ ح . . . . (ب)

(٣) عرفنا أيضاً من نظرية ٣ أن المثلثات تتساوى ارتفاعاتها إذا وقعت قواعدها على مستقيم واحد وتلامست رؤوسها المقابلة . ويمكننا الحصول على زوجين من المثلثات من هذا النوع بإضافة المثلث أ ز ح إلى كل من المثلثين ز ح ب ، ز حـ ح . أى أن :

مساحتى المثلثين أ ز ح + ب ز ح = مساحتى المثلثين أ ز ح + ز حـ ح
أى أن مساحة △ اح ب = مساحة △ أ ز حـ . . . . (حـ)

والمثلثان اح ب ، أ ز ح لهما نفس الارتفاع وكذلك المثلثان أ ز ح ، أ ز حـ (نظرية ٣) (ب) . فبحسب نظرية ٣ (١) التى تقول أن النسبة بين مساحات المثلثات المتحدة الارتفاع كالنسبة بين قواعدها يكون:

$$\frac{\text{مساحة اجب}}{\text{مساحة ازح}} = \frac{\text{اب}}{\text{از}} \quad ، \quad \frac{\text{مساحة ازج}}{\text{مساحة ازح}} = \frac{\text{اج}}{\text{اح}}$$

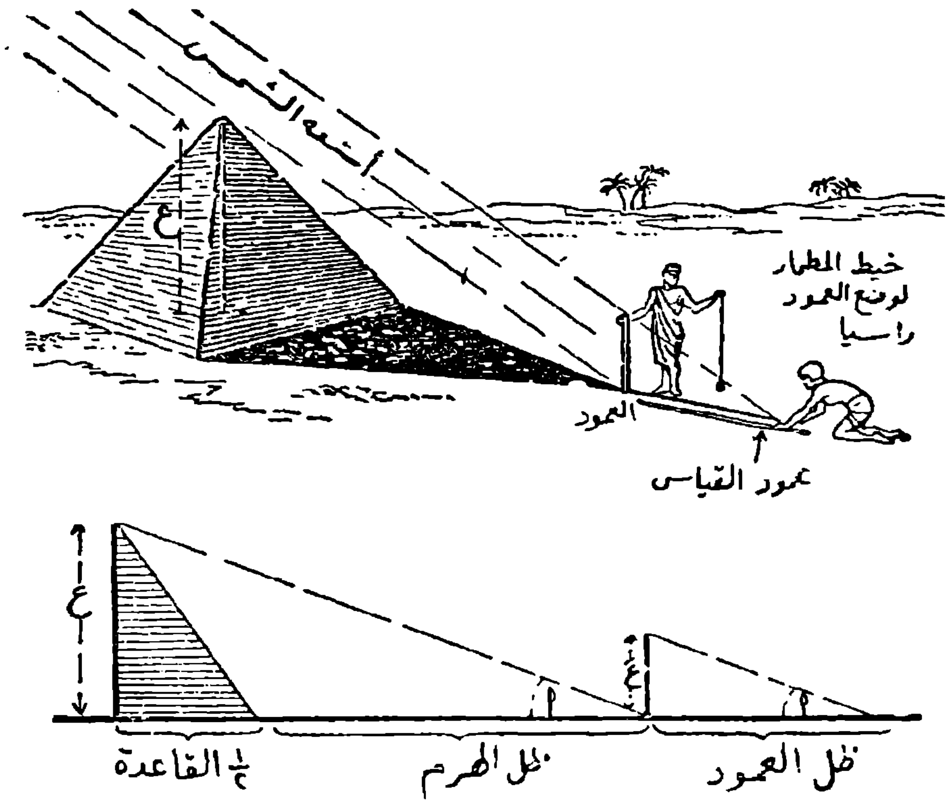
وبما أن مساحتى المثلثين اجب ، ازج متساويتان

$$\therefore \frac{\text{اب}}{\text{از}} = \frac{\text{اج}}{\text{اح}} \qquad \text{ومن (١) السابقة} \quad \frac{\text{اب}}{\text{ءه}} = \frac{\text{اج}}{\text{ءو}}$$

أو من حاصل ضرب الطرفين $\frac{\text{اب}}{\text{اج}} = \frac{\text{ءه}}{\text{ءو}}$.

وباستخدام تقسيم مشابه يمكننا إثبات أن :ـ

$$\frac{\text{بج}}{\text{اج}} = \frac{\text{هو}}{\text{ءو}} \qquad \text{أو} \qquad \frac{\text{بج}}{\text{اب}} = \frac{\text{هو}}{\text{ءه}}$$



شكل (٤٩)

كيف قاس طاليس ارتفاع الهرم الأكبر، الزاوية ا هي زاوية ميل شمس منتصف النهار على الأفق ،وهي هي لكل من المثلثين

وترى فى شكل (٤٩) كيف استخدم طاليس هذه النظرية فى قياس إرتفاع الهرم الأكبر لخوفو دون انتظار اليومين اللذين تميل شمس الظهيرة فيهما بزاوية °٤٥ . فغرس عصاه رأسيا فى الأرض عند طرف ظل الهرم . فتعطيك العصا وشعاع الشمس والظل مثلثا قائم الزاوية زواياه °٩٠ ، ا ، °٩٠ — ا . كذلك يعطيك إرتفاع الهرم وشعاع الشمس وظل الهرم مضافاً اليه نصف قاعدته مثلثا آخر له نفس الزوايا . وبما أن هذين المثلثين متشابهين تكون أضلاعهما المتناظرة متناسبة . أى أن

$$\frac{ع}{\frac{1}{2}ب + ظ} = \frac{عَ}{ظَ}$$

وباستخدام حاصل ضرب الطرفين نحصل على ارتفاع الهرم

$$ع = \frac{عَ}{ظَ}\left(\frac{1}{2}ب + ظ\right)$$

ومن الممكن بسهولة قياس إرتفاع العمود (عَ) وقاعدة الهرم (ب) ، والظلين (ظَ ، ظ) وقت الظهر من أى يوم .

وباستخدام طريقة تشبه هذه فى جوهرها يمكن قياس إرتفاع أى جسم لا نستطيع الوصول اليه . ويمكننا إيجاد بعده بشرط أن نتمكن من قياس الزاوية التى تصنعها قمته مع الأفق بمزواة من نوع ما كالمبينة فى شكل (١٢) . وأبسط طريقة أن نعمل شكلا نموذجا . وهذه هى طريقة « دع الأمور تجرى فى أعنتها » فى الهندسة الأغريقية . ولكن هناك طريقة أفضل ، وهى الهندسة الاجتماعية ، أو حساب المثلثات كما نسميه عادة ، من صنع الإسكندرانيين / وهذه الطريقة هى عمل جداول دائمة للنسب بين طول العمود وطول ظله لأى زاوية من زوايا الميل / فإذا رجعت إلى شكل (٣١) فانك ترى أن النسبة بين طول العمود وظله لزاوية ميل قدرها ا هى ما يسمى ظا ا فى قاموس لغة حساب المثلثات / ومعنى ذلك « ابحث عن عدد فى قاموس (جدول الظلال) عمل مرة ويصلح دواما ، بدلا من تحمل عناء رسم شكل نموذج فى كل مرة تحتاج إلى تقدير » / وإذا رجعت إلى شكل ٤٣ (ا) فانك تتذكر أن جميع المثلثات القائمة الزاوية والمحتوية على نفس الزاوية ا تكون متشابهة / وعلى ذلك فنسبة العمود للقاعدة (أى العمود إلى ظله ، أو الميل) تكون ثابتة إذا ظلت ا ثابتة / فمتى عينا قيمة ا تعينت قيمة واحدة فقط لهذه النسبة . ويبين لنا تدريب (٧) أن النسبة بين أى ضلعين متناظرين فى مثلث قائم الزاوية ثابتة ما دامت ا ثابتة .

ولم يأخذ الأغريق مطلقا هذه الخطوة من سياسة « دع الأمور » إلى إقتصاد

جماعي فى الأرقام . وسنرى فيما بعد كيف أن الاسكندريين إتخذوا هذه الخطوة عندما نستخدمها لقياس بعد القمر بصعوبة أقل مما تصادفنا فى قياس البعد بين إدنبره ولندن . ومما يساعدنا فيما يلى أن نألف أسماء القواميس الثلاثة المستخدمة فى هذا القياس . وهى جداول الظلال والجيوب وجيوب التمام . فهناك ثلاث نسب تستعمل عادة فى المثلث القائم الزاوية :

$$\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \text{ظا } ا$$

$$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \text{جا } ا$$

$$\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \text{جتا } ا$$

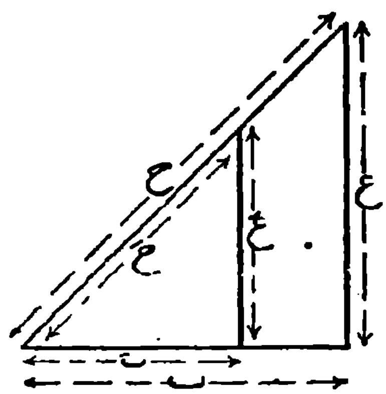
ومقلوبات هذه النسب لها أسماء هى الأخرى : ظتا ا ، قتا ا ، قا ا على الترتيب. فتكون ظتا ا هى المجاور ÷ المقابل ، قتا ا هى الوتر ÷ المقابل ، قا ا هى الوتر ÷ المجاور .

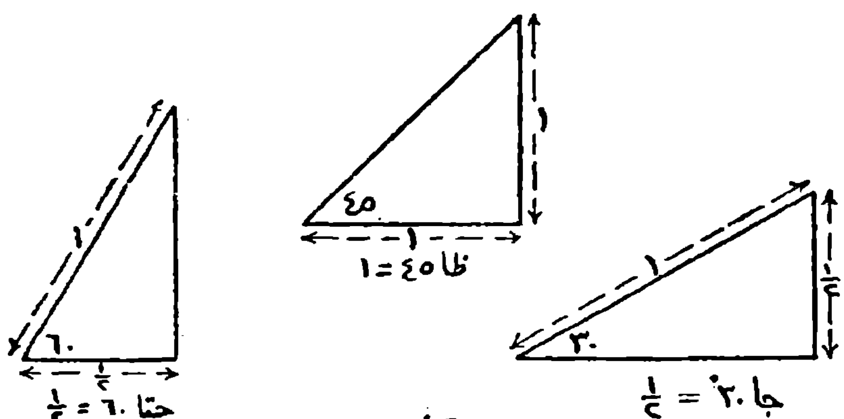
وهناك جداول لهذه النسب الست . ولا يزيد استعمال هذه الجداول صعوبة عن استعمال جداول مواعيد السكك الحديدية . ففى جدول الجيوب يعطينا أحد الأعمدة الزاوية ا مثل عمود مواعيد القيام من محطة ويفرلى فى إدنبرة . والعمود الآخر مثل عمود الوصول إلى لندن (أو مكان آخر تريد الهرب إليه) يعطيك العدد المطلوب (جا ا) . وكيفية تكوين هذه الجداول من اختصاص باب آخر . ولكن يحتمل أن يكون عندك من الاهتمام ما يتطلب إشارة إلى ذلك الآن . وإحدى طرق معالجة هذه المسألة هى رسم عدد كبير من أشكال دقيقة جداً نماذج لمثلثات قائمة الزاوية وتحتوى زوايا مختلفة (ا) ، ثم قياس الأضلاع بكل دقة وتدوين النتائج . ولكن هذا يستغرق زمناً طويلا . وسوف لا تكون لها الجودة اللازمة لأننا نحتاج إلى أدق قيم يمكننا الحصول عليها فى عالم بعيد عن الكمال حيث لا يشترط أن تكون أول المحاولات أفضلها . ولقد عرفنا فعلا فى الواقع بعض معلومات تمكننا من الحصول

على نتائج أسرع وأدق . فقد جمعنا ، دون أن نلاحظ ، نسب بعض الزوايا ، ولكن ليس لدينا الآن ما يكفى لعمل جدول كامل .

والمدى الذى وصلنا إليه يمكن معرفته بالرجوع أولا إلى نوع مألوف من الجداول ، كالجدول التالى ، الذى يبين خط سير المسافرين من إدنبره :

القيام من محطة ويفرلى بادنبره (بعد الظهر)	الوصــــول الى		
	نيوكاسل	يورك	كنجزكروس
٣,٠٠	—	٥,١٥	—
٤,٣٠	٦,٠٠	—	—
٥,١٥	—	—	١١,٥٨





شكل (٥٠)

وإذا قارنت الأشكال فى شكل (٥٠) بالأشكال السفلى فى شكل (٤٤) فإنه يمكنك عمل جدول شبيه كهذا :

الزاوية ا (بالدرجات)	ظا ا	جا ا	جتا ا
٣٠	—	$\frac{1}{2}$	—
٤٥	١	—	—
٦٠	—	—	$\frac{1}{2}$

كما تلاحظ أيضاً شيئين يسهلان إعداد هذه الجداول .

(١) جا ا = جتا (٩٠° — ا) أنظر نظرية ٥ (١).

، جتا ا = جا (٩٠° — ا)

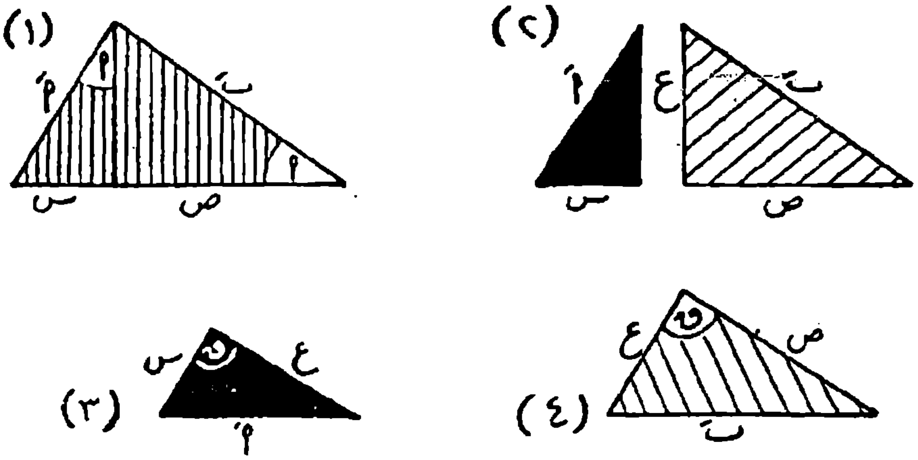
(٢) ظا ا = $\frac{\text{جا ا}}{\text{جتا ا}}$ ($\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ÷ $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

= $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ × $\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$)

تدريب ٨ :

« مربع وتر المثلث القائم الزاوية يساوى مجموع مربعى القاعدة والإرتفاع » .

يشرح التقسيم اللازم لهذا التدريب فى تدريب ٥ هـ وشكل (٤٣) . فالعمود الساقط من رأس القائمة على الوتر يقسم المثلث القائم الأصلى إلى مثلثين متشابهين ويشابه كل منهما المثلث الأصلى . وكل ما عملناه فى ش ٥١ أننا رتبنا هذه المثلثات حتى ترى من أول وهلة الزوايا المتناظرة والأضلاع المتناظرة .



شكل (٥١) ـ نظرية ٨

فى (٣) ش ٥١ $\frac{\text{أ}'}{\text{ح}'} = \frac{\text{س}}{\text{أ}'}$ تدريب ٧

∴ $\text{أ}'^{2} = \text{ح}'\text{س}$ (قاعدة القطر)

وفى (٤) ش ٥١ $\frac{\text{ب}'}{\text{ح}'} = \frac{\text{ص}}{\text{ب}'}$ لنفس السبب

∴ $\text{ب}'^{2} = \text{ح}'\text{ص}$

وبالجمع ∴ $\text{أ}'^{2} + \text{ب}'^{2} = \text{ح}'\text{س} + \text{ح}'\text{ص} = \text{ح}'(\text{س}+\text{ص})$ تدريب ٢

، ∵ $\text{ح}' = \text{س}+\text{ص}$ ∴ $\text{أ}'^{2} + \text{ب}'^{2} = \text{ح}'^{2}$

ويرى من هذا الشكل أن $\frac{\text{ع}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{ع}}$ أى أن $\text{ع}^{2} = \text{س}\,\text{ص}$

أو $\text{ع} = \sqrt{\text{س}\,\text{ص}}$

وفى العبارة الأخيرة يسمى ع الوسط الهندسى للقدارين س ، ص أو المتوسط الهندسى لهما ، فالوسط الهندسى للقدارين ٣ ، ٢٧ هو $\sqrt{٣ \times ٢٧}$ أى $\sqrt{٨١}$ أو ٩ . والوسط الحسابى أو المتوسط العادى لهما هو $\frac{١}{٢}$ (٣ + ٢٧) = ١٥

وإذا تكلم السياسيون عن متوسط ، ففى تسع وتسعين حالة من مائة حالة ، يكون هناك سبب ضعيف لأخذ أحدهما دون الآخر ، فما يجب أن نستعمله منهما يتوقف على ما نريد تنفيذه .

وهذا التدريب ذو أهمية كبرى فى تعيين نسب الزوايا . وإنك لتذكر (وإن لم تتذكر فارجع إلى ش ٤٤) أنه إذا كانت زوايا المثلث القائم الزاوية ٣٠° ، ٦٠° ، ٩٠° فإن الوتر حَ يساوى ضعف الضلع اَ المقابل للزاوية ٣٠° ، وللحصول على الضلع الثالث بَ خذ الوتر مساوياً الوحدة .

وبدلا من $حَ^٢ = اَ^٢ + بَ^٢$ أو $حَ^٢ - اَ^٢ = بَ^٢$

أكتب $اَ^٢ - (\frac{١}{٢})^٢ = بَ^٢$ أى $١ - \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤} = بَ^٢$

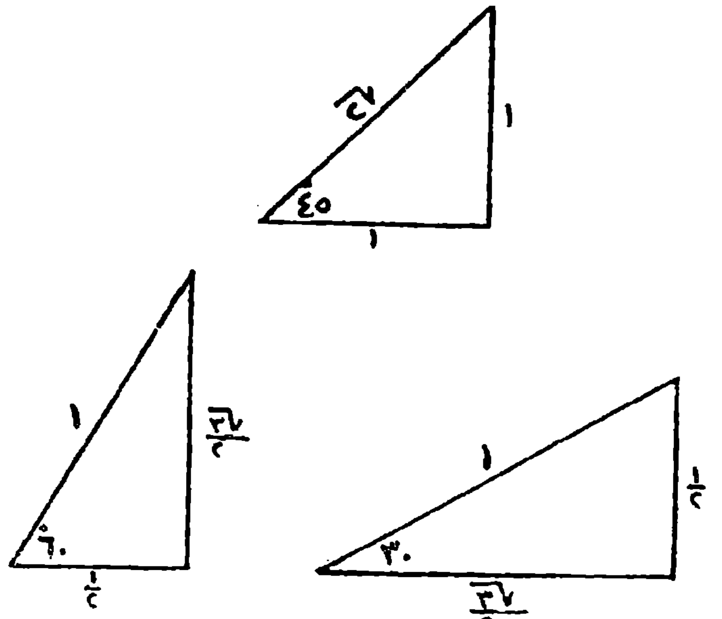
$\therefore بَ = \sqrt{\frac{٣}{٤}}$ أى $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

وفى المثلث القائم الزاوية الذى إحدى زواياه ٤٥° تتساوى القاعدة والإرتفاع وللحصول على الوتر حَ نكتب $حَ^٢ = ١^٢ + ١^٢ = ٢$ $\therefore حَ = \sqrt{٢}$

وعلى ذلك يمكننا ملء الخانات فى جداول الظلال والجيوب وجيوب التمام هكذا :

(أنظر شكل ٥٢)

الزاوية	الظل	الجيب	جيب التمام
٣٠°	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
٤٥°	١	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
٦٠°	$\sqrt{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$



شكل (٥٢)

ظا ٤٥° = ١ حا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ جتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$ حا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

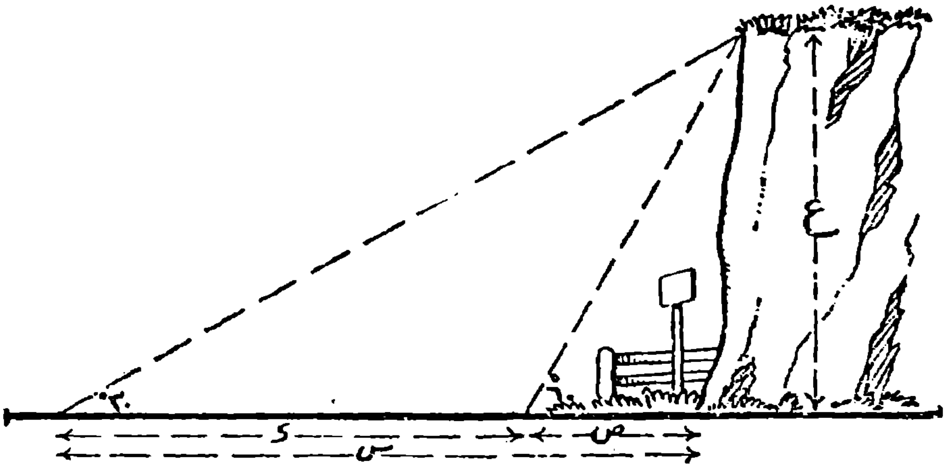
ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ حا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ولم يقم هندسيو الإغريق بخطوة عمل جدول كهذا ، أو امتداده ليكون دليلا يشمل كل درجة ، ولذلك فسنترك كيف يعمل هــذا الجدول إلى مرحلة متأخرة ، وسنلاحظ فى نفس الوقت أننا لم نعد مرتبطين بعمود الظل . وقد كان لدى هندسي الإغريق من الوسائل مايمكنهم من قياس الارتفاعات بغير استعمال عمود الظل . فلو كان لديك مزواة مبسطة (ش ١٢) فانه يمكنك أن تبتعد من الصخرة (ش ٤٥) س ياردة حتى ترى قمتها على ارتفاع ٣٠° ، ولو كان ع ارتفاع الصخرة فان $\frac{ع}{س} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

أو ع = $\frac{س}{\sqrt{٣}}$ ولو ابتعدت عن الصخرة ص ياردة حتى تكون الزاوية ٦٠° فان

$$\frac{\text{ع}}{\text{ص}} = \sqrt{٣} \quad \text{أو} \quad \text{ع} = \text{ص}\sqrt{٣}$$

ويمكنك القيام بأكثر من ذلك . ولنفرض أنه لايمكنك الوصول إلى الصخرة ، فانه يلزمك فى هذه الحالة أن تعرف المسافة ء بين نقطتين على مستقيم يتجه مباشرة نحو الصخرة حيث تكون زاويتا الرصد من النقطتين ٣٠° ، ٦٠° (أنظر ش٥٣) .



شكل (٥٣) قياس ارتفاع صخرة اذا منع المرور بالقرب من قاعدتها

لايمكنك إيجاد س أو ص ولكن يمكنك قياس ء = س − ص

$$\therefore \text{س} - \text{ء} = \text{ص}$$

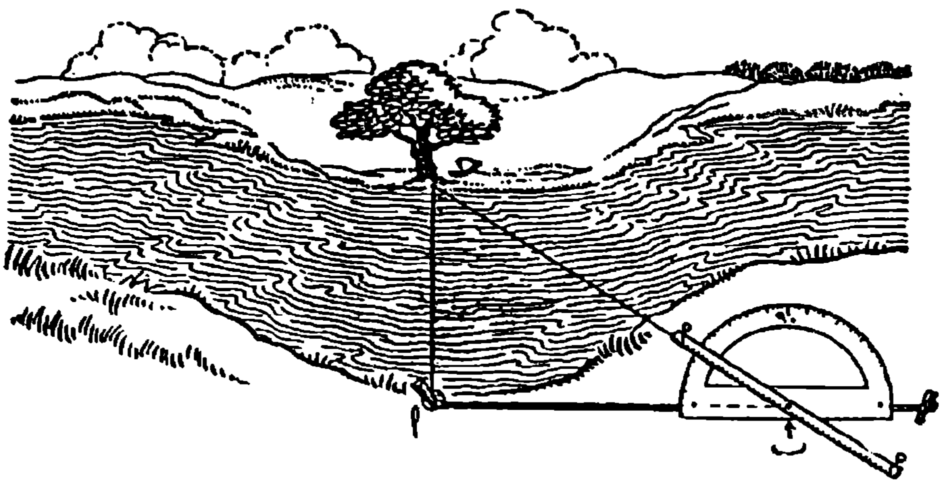
$$\therefore \frac{\text{ع}}{\text{س}} = \frac{١}{\sqrt{٣}} \quad \text{أى س} = \text{ع}\sqrt{٣} \ ، \ \frac{\text{ع}}{\text{ص}} = \sqrt{٣}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{\text{ع}}{\sqrt{٣}} \quad \therefore \text{ع}\sqrt{٣} - \text{ء} = \frac{\text{ع}}{\sqrt{٣}}$$ وبضرب كل من الطرفين

فى $\sqrt{٣}$ $\therefore ٣\text{ع} - \text{ء}\sqrt{٣} = \text{ع}$ أى $٢\text{ع} = \text{ء}\sqrt{٣}$

$$\text{أى ع} = \text{ء} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

وقياس بعد القمر عن الأرض يشابه هذا أساسيا .

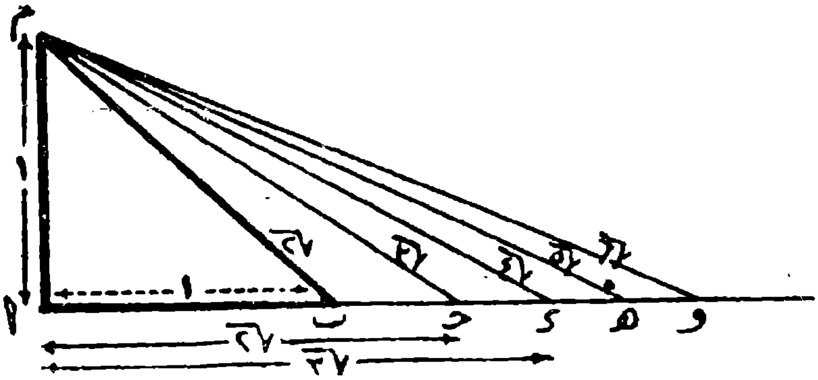


شكل (٥٤) قياس اتساع نهر

ولقياس اتساع نهر يمكنك عمل آداة بسيطة بأن تثبت فى مركز منقلة شريطا من الخشب بحيث يدور حراً . وضع فى كل من طرفى هذا الشريط وطرفى قطر المنقلة مسامير محوية تحمل عينيات للرصد . قف عند نقطة ا على أحد شاطىء النهر ، واختر شيئا وليكن الشجرة حـ على الشاطىء الآخر وتقابل تماما ا ، وبوضع الذراع المتحرك عند ٩٠° على المقياس اجعل قطر المنقلة عموديا على احـ ، وذلك بربط جزء من حبل بوتد عند ا وجمله على امتداد قطر المنقلة ، ثم سر على هذا المستقيم حتى ب حيث ترى حـ فى اتجاه يصنع مع ا ب ٣٠° تماما . قس ا ب . فيكون ا ب حـ مثلثا قائم الزاوية فيه ا حـ =

½ ب حـ ، ا ب = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ب حـ ، ويكون اتساع النهر $\frac{ا ب}{\sqrt{٣}}$

وفى نهاية هذا الباب سوف نسأل لماذا قرب الأغريق من الحصول على قاموس للزوايا دون أن يقوموا بعمله فعلا ، والنقطة التى نلاحظها هنا هى أن الرياضى قد جابهته كميات مثل $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ (١,٤١٤ ، ١,٧٣٢ تقريبا) لايمكن التعبير عنها بأعداد تحت تصرفه . ويمكن للرجل العلمى أن يحل المشكلة بكل مايمكنه بالرسم على الرمل كما فى الشكل الآتى (ش ٥٥) أو بالرسم على الرمل المبنى على الوسط الهندسى ، وسنبين ذلك فيما بعد .



شكل (٥٥) الرسم على الرمل لايجاد الجذر التربيعى

$١^٢ + ١^٢ = ٢$ ، $١^٢ + (\sqrt{٢})^٢ = ٣$ ، $١^٢ + (\sqrt{٣})^٢ = ٤$ وهكذا

أربعة تداريب لرصد النجوم

إنه لمن الضرورى أن نعلم شيئا عن الدائرة لكى نتمكن من القيام بطريقة قياس الأبعاد التى لا يمكن الوصول إليها بواسطة ماعلم من أبعاد وزوايا كما هو الحال فى إيجاد ارتفاع صخرة . وقد بدأ صناع التقاويم هندسة الدائرة ، ولا يمكننا أن نعرف بالضبط مقدار ماأخذه الإغريق منهم . وتنسب النظرية الثانية الآتى ذكرها إلى طاليس . والتداريب الثلاثة الأولى معطاة فى الجزء الثالث من أقليدس ، والتدريب الأخير فى الجزء الثانى عشر منه ، والقاعدة التى يتضمنها التدريب الأخير كانت معروفة فى الأزمنة المبكرة حينما بدأ الإنسان فى صنع عجلات المركبات التى تجرها الثيران أو عربات الركوب . وكان المصريون من كهنة وصناع على علم بها من سنة ١٥٠٠ ق. م .

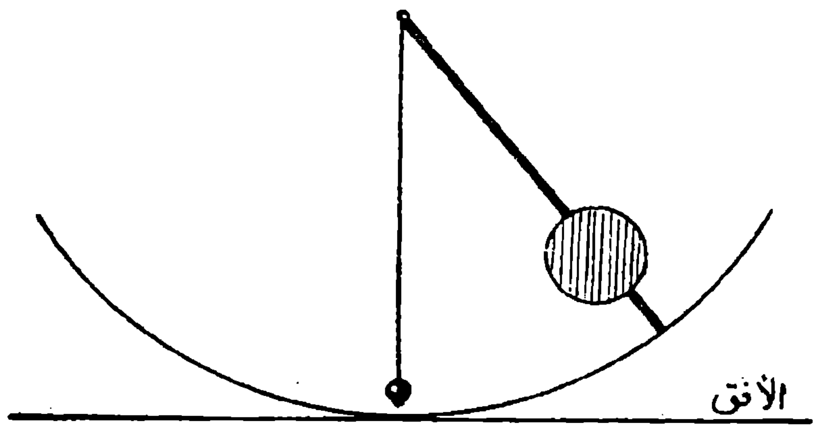
ولما كشف طاليس الفينيقى كيف يرسم مثلثا قائم الزاوية فى نصف دائرة ، قدم ثورا قربانا للآلهة . ولم يكن ذلك فى مصلحة الثور ، ولم يكن فى النهاية فى مصلحة الآلهة . وأصبحت الملاحة ممكنة فى الجهات البعيدة عن مرأى اليابسة حينما بدأ الإنسان فى الانتفاع بمسالك النجوم لتوجيه سير السفن، وجعل الفينيقيون النجم القطبى للكاهن هو النجم القطبى للبحار ، وبدأوا فى جعل التقويم عالميا ، فقاس الإنسان خطوط الطول والعرض للكرة السماوية التى تنتظم فيها النجوم قبل أن يقوم بعمل خرائط لائقة للكرة الأرضية ، وفى سبيل تنظيم قياس الدائرة وضع الاغريق الايونيون أساس الجغرافيا الاسكندرانية ، وفصلوا بين علمى التنجيم والفلك .

والإعتقاد بأن الأرض كروية قديم جدا بين البحارين ، وكان نقطة أساسية فى تعاليم فيثاغورس الفينيق ، وكان صناع التقاويم على علم بذلك لأنهم إعتادوا رؤية ظل حافة قرص الأرض المستدير عند خسوف القمر . ولم يأخذ البحارة زمنا طويلا ليروا أنه يعطى تفسيراً بسيطا لشىء يراه كل مسافر إذا ما أجهد نفسه لرؤية اليابسة أو لاحظ تقهقر الشاطىء ، وقد رأوا جبالا تبرز من الماء إذا ما اقتربوا من ميناء ، وقمم المبانى تغطس فى الماء إذا ما توغلوا فى البحر . (شكل ٥٩) .

وحينما كان الضــوء الصناعى ترفا ، فإن رحلة واحـدة عبر البحر المتوسط تترك فى خيال المسافر أثراً كافياً عن إستطالة نهار الصيف وليل الشتاء كلما توغلت السفن شمالا ، وقبل أن تذهب سفن الفينيقيين شمالا حتى بحر البلطيق وساحل ديفون وبيون بزمن طويل ، كان أحد أتباع ديموقريطس المادى يخبر تلاميـذه عن أرض لا تغرب عنها الشمس أبداً . وقد كشفت الهندسة الدائرة القطبية قبل أن تنقل أية سفينة إنسانا متمدينا ليرى شمس منتصف الليل فى المناطق القطبية . وأصبحت الهندسة الإغريقية قبل ذلك ألعوبة الطبقة الناجحة التى سخرت العبيد للقيام بأعمالهم . وقد أدى العمل العقلى والعمل اليدوى إلى تقسيم الطبقات الاجتماعية . وعندما وصلت الهندسة إلى النقطة التى أحدثت أداة جديدة تمكن الانسان بها من غزو العالم الذى يعيش فيه ، إنحلت الى مجرد لعبة . وعندما بادت الحضارة الاغريقية بدأت ثمار الهندسة الاغريقية فى الحصاد

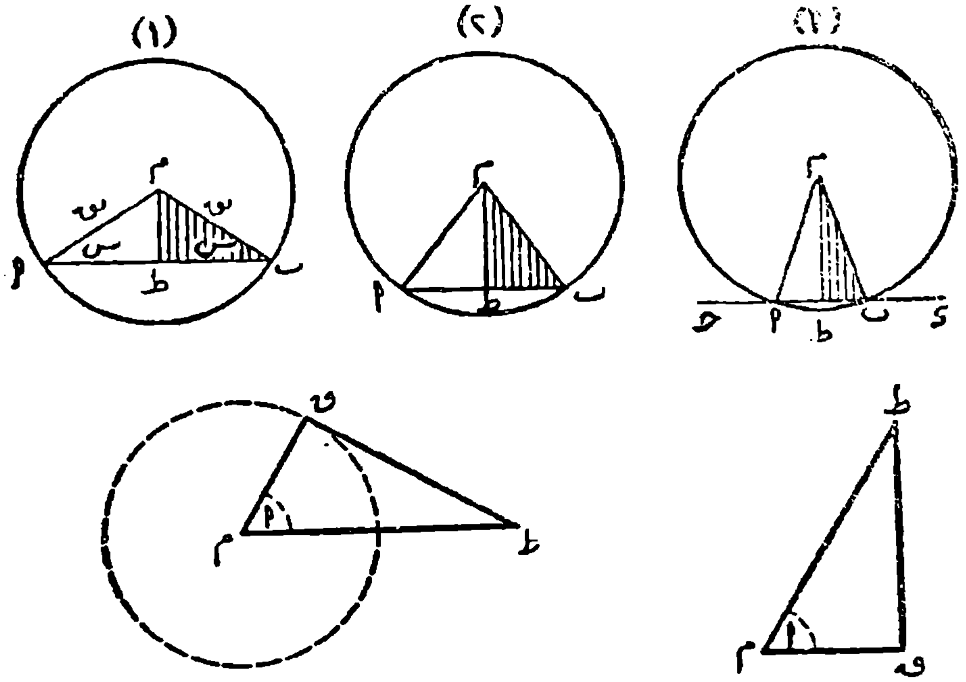
تدريب ٩

« المستقيم (المماس) الذى يمس دائرة عمودى على المستقيم الذى يصل المركز بنقطة التماس »



(شكل ٥٦) قاعدة التماس موضحة بخيط المطمار والبندول

والطريقة غير الرسمية لبيان ذلك موضحة فى شكل ٥٦ . وعنـــدما يمس خيط المطار الأفق عند السكون يكون عمودياً على هذا الأفق ، وحينما نذبذبه (أو نذبذب بندولا من نفس الطول ومعلقا من نفس النقطة) فإنه يرسم قوسا من دائرة تمس الأفق تماما . وأن شعاع العجلة يدور خـلال زاوية قائمة من الوضع الذى يمر فيه بنقطة تماس حافة العجلة مع السطح الذى تجرى عليه إلى الوضع الذى يصبح فيه موازيا لهذا السطح . وهناك إثبات رسمى معطى فى بعض كتب الهندسة الأولية وموضح فى شكل ٥٧ . وأوردناه هنا لما يستحقه . وإذا ضايقك فلا تستمر فى تحمل المضايقة . والحقيقة أن الإثبات أقل إقناعا من تجربة الحياة اليومية .



شكل (٥٧) تدريب ٩

لماذا سمى ظل الزاوية تماسا (فى اللغات اللاتينية) ؟

ظا ا = $\frac{\text{ط ن}}{\text{م ن}}$ ولو كان نصف قطر الدائرة م ن مساويا الوحدة

فإن ظا ا = ط ن

أولا : أنظر (١) من ش ٥٧ تجد أن م ط عمود ساقط من المركز على الوتر ا ب وفى

المثلثين ا م ط ، ب م ط   ا م = اق = ب م

∠ م ا ط = س = ∠ م ب ط

ومن تدريب ٦ وبمقارنة المثلثين

نجد أن : ∠ م ط ا = ٩٠° = ∠ م ط ب

م ط مشترك

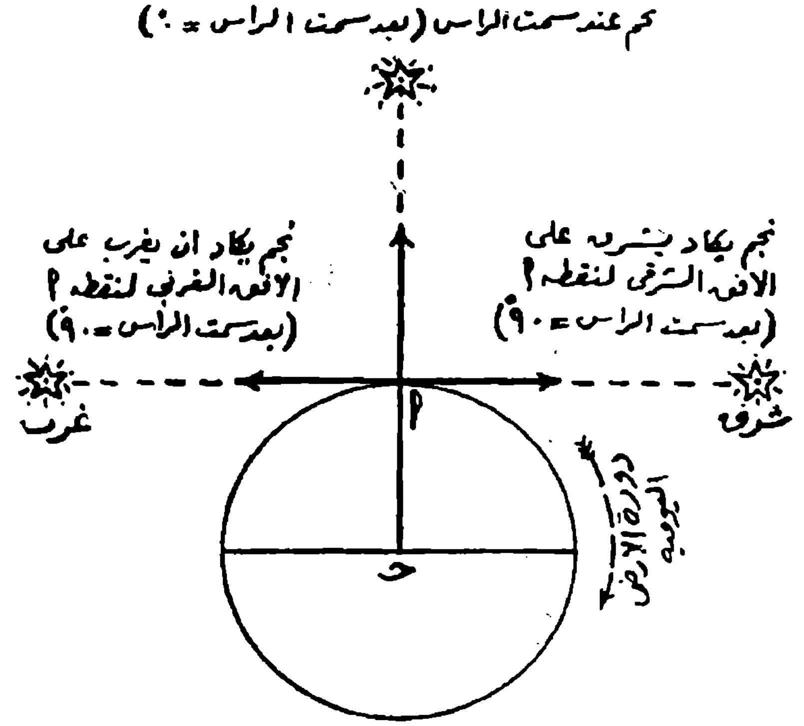
∠ ب م ط = ٩٠° — س = ∠ ا م ط

وبالقاعدة الثالثة للمثلث يتطابق المثلثان وينتج أن ا ط = ط ب

ثانيا: أنظر الجزء الثانى من الشكل (٢) تجد أن ا ب أصبح أقرب إلى المحيط وأقصر طولا ، لا يزال م ا ، م ب متساويين ولكن م ط ليس أصغر بكثير من م ا ، م ب ، وكذلك لا تزال الزاويتان م ا ط ، م ب ط متساويتين وأقرب من قائمة .

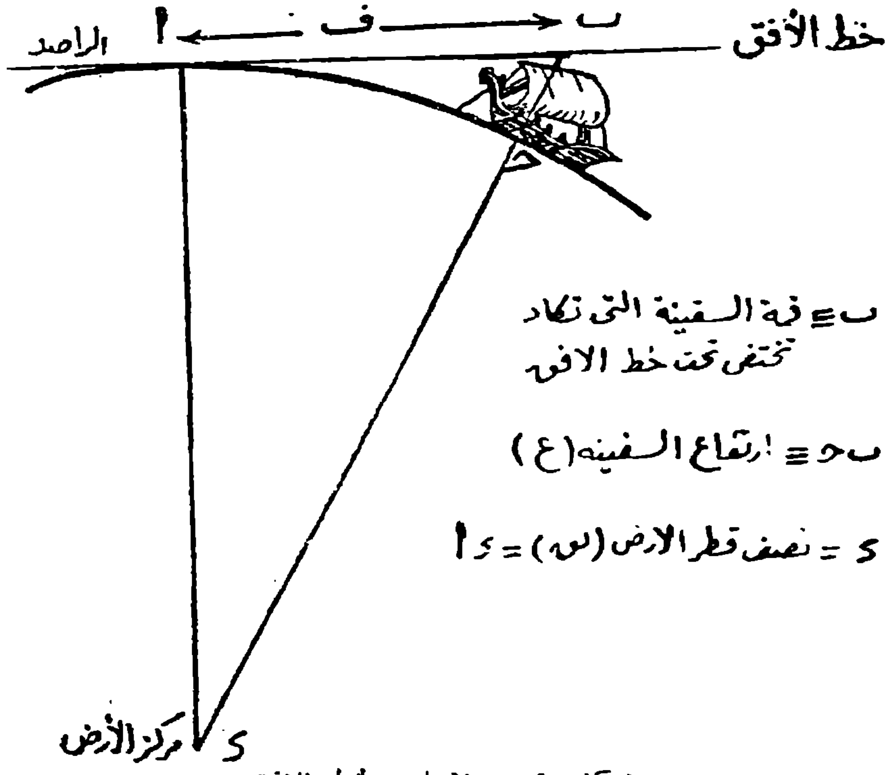
ثالثا : فى (٣) نجد أن ا قربت كثيراً من ب ، وأصبح من الصعب التمييز بين ا ، ط ، ب ، وكاد المستقيم أن يمس الدائرة ، وحينما يمس الدائرة تماما لا يمكنك أن تميز م ط من كل من م ا ، م ب ، وعلى ذلك فلا يمكن تمييز ∠ م ا ط من زاوية قائمة ، وتنصهر مع الزاوية م ط ب ، وتصبح الزاوية م ا حـ قائمة ، وكذلك تقرب ∠ م ب ط من ∠ م ط ا بنفس الطريقة ولا يمكن تمييزها من قائمة ، وعلى ذلك تكون ∠ م ط ء قائمة أيضاً .

ولهذا التدريب تطبيقات عديدة منها تطبيقان يستحقان الملاحظة بصفة خاصة ، أحدهما يتوقف على حقيقة أن الضوء يسير فى خطوط مستقيمة وهو أنه إذا كانت عين الراصد فى مستوى البحر ، فان المستقيم الذى يصل الراصد بأية نقطة على الأفق عمودى على المستقيم الذى يصل الراصد بمركز الأرض . وعلى ذلك فسمت الرأس والراصد ومركز الأرض تقع على استقامة واحدة (ش ٥٨) ولنفس السبب نجد أن خيط المطار عند كل النقط على سطح الأرض يتجه نحو مركزها .



شـــكل (٥٨)

ويمكن أن يستخدم هذا التدريب لحساب البعد الذى عنده يكاد يرى على الأفق جسم معلوم ارتفاعه ، وعلى ذلك بين أشياء أخرى يمكن تقدير بعد سفينة عن الشاطئ .



(شكل ٥٩) المماس لخط الافق

بعـد الأفق .

فى ش ٥٩ يقف الراصد عند ا حيث ينظر مرئيا بعيداً ب ح (مثل جبل أو سفينة) فلا يمكنه أن يرى غير قمته ب لأن باقيه اختفى تحت الأفق اب . وبما أن الضوء يسير فى خطوط مستقيمة فيكون المستقيم اب ماراً بالنقطة ب وماساً لمحيط الأرض عند ا . وعلى ذلك تكون ∠ ب ا ء زاوية قائمة .

وبتطبيق تدريب ٨ يكون .

$$\overline{\text{اب}}^{٢} + \overline{\text{اء}}^{٢} = \overline{\text{ءب}}^{٢} = (\text{ءح} + \text{حب})^{٢} = \overline{\text{ءح}}^{٢} + ٢\,\text{ءح} \times \text{حب} + \overline{\text{حب}}^{٢}$$

وبما ان اء ، ءح نصفا قطر الأرض أى أن اء = لق = ءح

$$\therefore\ \overline{\text{اب}}^{٢} + \overline{\text{اء}}^{٢} = \overline{\text{اء}}^{٢} + ٢\,\text{ءح} \cdot \text{حب} + \overline{\text{حب}}^{٢}$$

$$\therefore\ \overline{\text{اب}}^{٢} = ٢\,\text{ءح} \cdot \text{حب} + \overline{\text{حب}}^{٢}$$

وإذا كان اب (بعد المرئى وهو يختفى تحت الأفق) مساويا ف ، ب ح (ارتفاع المرئى إذا رؤى كاملا) مساويا ع

$$\therefore\ \text{ف}^{٢} = ٢\ \text{لق}\ \text{ع} + \text{ع}^{٢} = \text{ع}\ (٢\ \text{لق} + \text{ع})$$

وبما أن ارتفاع أعلى جبل حوالى ٥ أميال، ونصف قطر الأرض حوالى ٤٠٠٠ ميل ، فان (لق + ع) لاتختلف عن لق بأكثر من حوالى واحد فى الألف، وارتفاع السفينة ع يكون بالطبع أصغر كثيراً إذا ماقورن بنصف القطر ، وعلى ذلك يمكن اعتبار (٢ لق + ع) مساوية ٢ لق ويكون ف² = ٢ لق ع .

وهذا يبين على أى بعد يجب أن يكون جبل ارتفاعه ٢٠٠٠ قدم حينما يكاد أن يختفى تحت سطح البحر إذا كانت عين الراصد فى نفس مستوى سطح البحر .

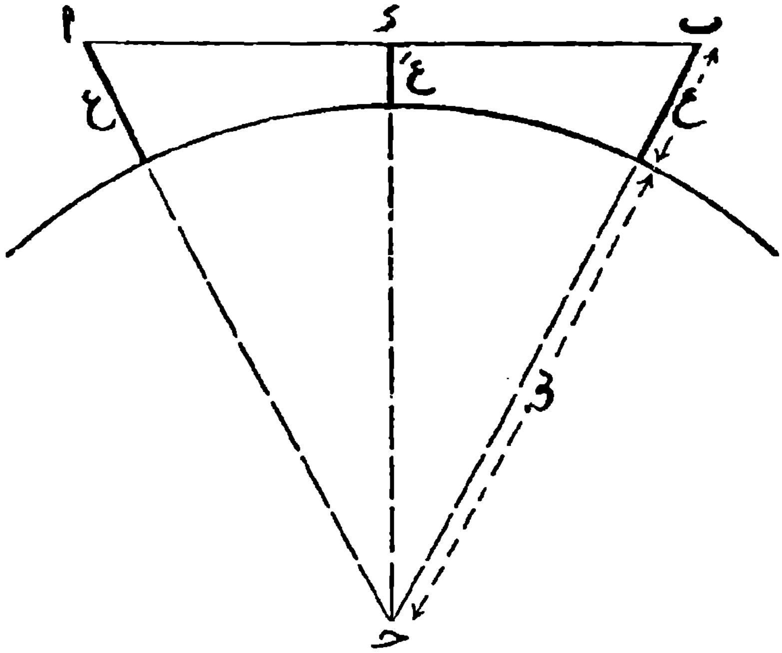
$$\text{ف}^{٢} = ٢ \times \frac{٢٠٠٠}{٥٢٨٠} \times ٤٠٠٠\ \text{ميل مربع}$$

$$= \frac{١٠٠٠٠٠}{٣٣}$$

$$\therefore \text{ف} = \sqrt{\frac{١٠٠٠٠٠}{٣٣}} = ٥٥ \text{ ميلا تقريبا.}$$

محيط الأرض :

ا . ر ولاس المصاحب لداروں فى مناظرة النشوء الكبرى ، بدأ حياته كمساح ، واقترح طريقة بسيطة جداً لقياس نصف قطر محيط الأرض ، ففى (ش ٦٠) دق



(شكل ٦٠) طريقة القناة لقياس محيط الأرض

قضيبان بحيث يكونان رأسيين وعلى ارتفاع ع من سطح الماء ، والمسافة ا ب بين طرفيهما العلويين ا ، ب قيست فى قناة مستقيمة ، وفى منتصف هذه المسافة بالضبط دق قضيب آخر بحيث يكون طرفه الأعلى ى فى نفس خط النظر مع ا ، ب . وبما أن سطح الأرض وتبعا لذلك سطح الماء فى القناة منحن فان الارتفاع عَ للنقطة ى ، عن مستوى الماء يكون أقل قليلا من ع . فلو قسنا ع ، عَ ، ب حـ بدقة ، فانه يمكننا إيجاد نصف قطر محيط الأرض بتطبيق تدريبى ٦ ، ٨ .

بما أن ا حـ = نق + ع = ب حـ فالمثلث ا ب حـ متساوى الساقين فيه ا ى = ½ ا ب = ى ب وعلى ذلك فيكون حـ ى عموديا على ا ب (تدريب ٦)

ويكون المثلث ﺀ ب ﺣ قائم الزاوية ويكون (تدريب ٨)

$$\overline{ﺀب}^2 + \overline{ﺀﺣ}^2 = \overline{بﺣ}^2$$

$$\therefore \overline{ﺀب}^2 + (ع' + لق)^2 = ع + لق^2$$

أى $\overline{ﺀب}^2 + ع'^2 + ٢ لق ع' + لق^2 = ع^2 + ٢ لق ع + لق^2$

أى $\overline{ﺀب}^2 + ع'^2 - ع^2 = ٢ لق ع - ٢ لق ع' = ٢ لق (ع - ع')$

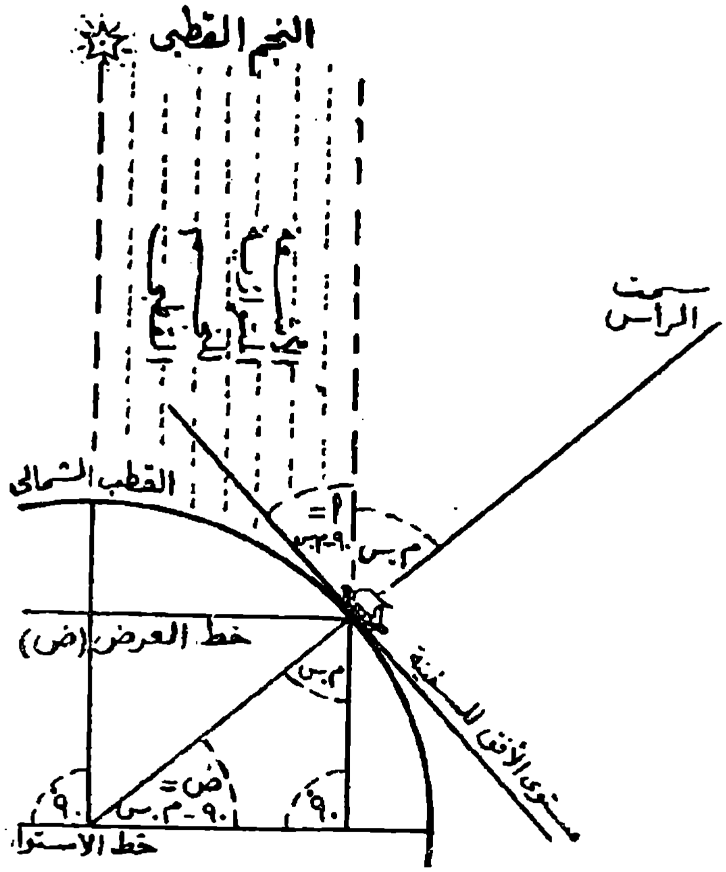
$$\therefore لق = \frac{\overline{ﺀب}^2 + ع'^2 - ع^2}{٢ (ع - ع')}$$

ولو كانت المسافة ﺀ ب كبيرة جداً بالنسبة لارتفاع كل من القضبان ، فيمكننا إهمال $(ع'^2 - ع^2)$ ويكون

$$لق = \frac{\frac{1}{2} ﺀب^2}{ع - ع'} = \frac{\frac{1}{8} اب^2}{ع - ع'}$$

إيجاد خط عرضك .

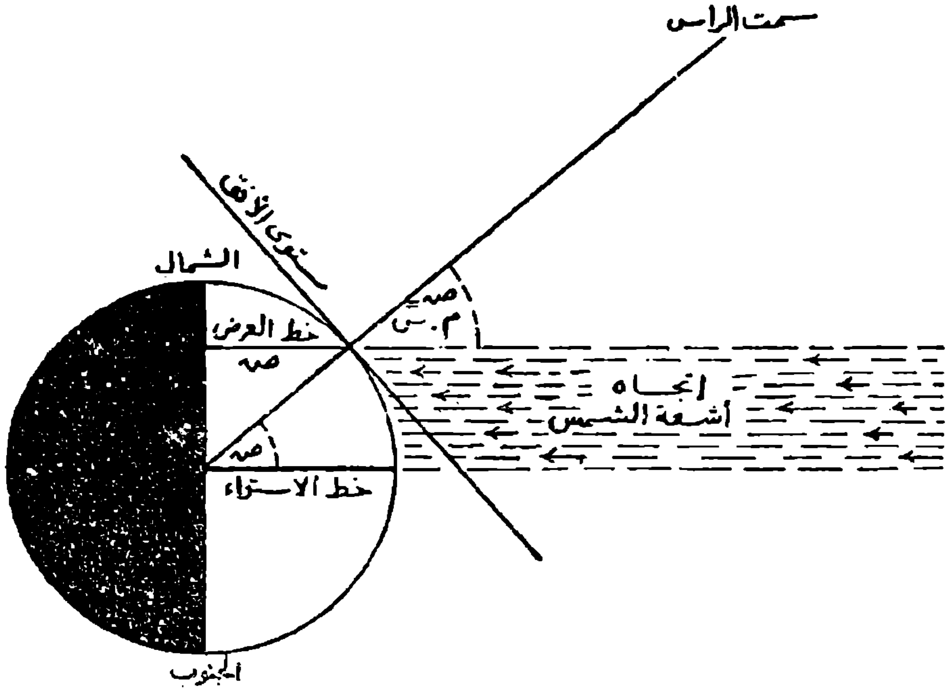
تظهر النجوم بأنها تدور فى دوائر إلى أعلى من الشرق وإلى أسفل نحو الغرب حول محور يمر بنقطة تسمى القطب السماوى . ونفسر هذا الآن بقولنا أن الارض تدور حول محور يمر بمركزها وبقطبيها وبالقطب السماوى فى اتجاه يضاد الحركة الظاهرة للأجرام السماوية ، وتغرب معظم النجوم تحت الأفق وترى فقط فى الليل فى أثناء جزء من السنة ، ولكن النجوم القريبة جداً من القطب مثل مجموعات الدب الأكبر والدب الأصغر والسلياق والتنين وذات الكرسى فى خط عرضنا لا تختفى تحت الأفق أبدا ، وترى معظم الليل تحت القطب فى بعض الفصول وفوقه فى فصول أخرى . وهناك نجم واحد هو النجم القطبى قريب جداً من القطب السماوى حتى يظهر دائماً أنه فى نفس المكان . ويكاد يقع بالضبط فى خط يصل مركز الارض بقطبها الشمالى . ولما كانت أشعة النجوم متوازية ، فالأشعة التى تصل الينا من النجم القطبى توازى محور الارض .



(شكل ٦١) خط العرض من النجم القطبى
ارتفاع (زاوية الافق) النجم القطبى هو خط عرض الراصد ، وكل يساوى
٩٠° ـ بعد سمت الرأس عن النجم القطبى

وسترى من (شكل ٦١) أن خط عرض المكان هو الزاوية (الارتفاع) التى يعملها القطب السماوى مع الأفق ، وعلى ذلك فيمكنك الحصول على خط عرض منزلك فى ليلة صافية بأن تذهب إلى الحديقة وترصد إرتفاع النجم القطبى بواسطة أسطرلاب منزلى (شكل ١٢) . ويدور النجم القطبى فى الوقت الحاضر فى دائرة تبعد عن القطب السماوى بمقدار درجة واحدة ، وعلى ذلك فزاوية إرتفاعه لا تكون أكثر من درجة واحدة أكبر من خط عرضك أو أقل منه حتى ولو لم تتمكن لسوء حظك من رصده إلا فى عبوره العالى أو الواطى على خط الزوال . ولما كان محيط الأرض ٢٥٠٠٠ ميل فإن ذلك يعطيك بعدك عن خط الاستواء بخطأ لا يزيد عن ٢٥٠٠٠ ÷ ٣٦٠ أو ٧٠ ميلا تقريباً . وإذا أردت أن تكون دقيقاً خذ متوسط

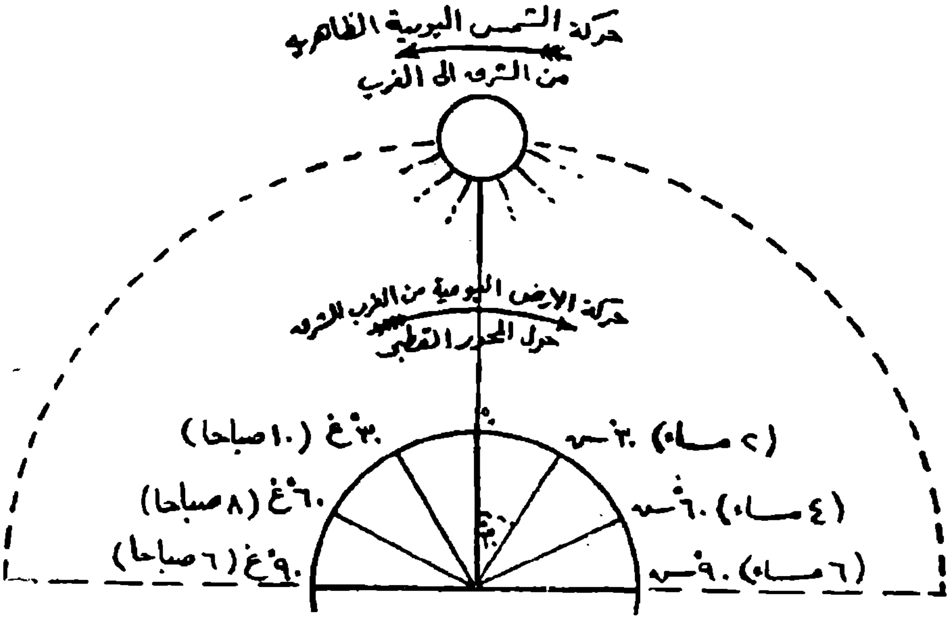
رصدين فى نفس الوقت من الليل ويفصل بينهما ستة أشهر ، أى حينما يكون النجم القطبى أعلى من القطب السماوى بنفس البعد الذى كان فيه قبلا أدنى من هذا القطب أو العكس .



(شكل ٦٢)

خط العرض عن طريق بعد سمت الرأس عن الشمس وقت الظهر فى الاعتدالين · فى ٢١ مارس ، ٢٣ سبتمبر يتساوى طولا الليل والنهار فى جميع المعمورة ، وعلى ذلك فالشمس تقع أعلى خط الاستواء · وفى الظهر تقع الشمس دائما على الخط الذى يصل نقطة الشمال ونقطة الجنوب للافق · أى خط طول الراصد · وعلى ذلك فالشمس والقطبان والراصد وسمت الرأس ومركز الارض تقع كلها فى نفس اللوح المسطح (المستوى) من الفراغ · وبما أن أشعة الشمس متوازية ، فبعد سمت الرأس عن الشمس وقت الظهر فى الاعتدالين هو خط عرض الراصد

وربما تريد فى نفس الوقت أن تعرف كيف توجد خط طولك (شكل ٦٣) .



(شكل ٦٣) ـ ايجاد خط الطول

فى الظهر تقع الشمس مباشرة فوق الخط الذى يصل نقطتى الشمال والجنوب للافق أى خط طولك . وفى الشكل تقع الشمس مباشرة على خط طول جرينتش ، وتبعا لذلك يكون ظهرا فى جرينتش . وان كنت ٣٠° شرق جرينتش فتكون الارض قد دارت خلال ٣٠° من الوقت الذى سجلت فيه مزولتك الظهر ، وعلى ذلك تكون قد دارت $\frac{1}{12}$ من دورتها البالغ قدرها ٢٤ ساعة ، وتكون الساعة ٢ مساء فى المزولة ، ولو كنت ٦٠ ° غربا فعلى الارض أن تدور خلال ٦٠° قبل أن تكون الشمس على خط زوالك أى تدور $\frac{1}{6}$ الدورة ، وتكون الساعة ٨ صباحا فى المزولة

وهذا سهل جداً فى الوقت الحاضر ، لأنه توجد فى السفن ساعات دقيقة تحافظ على وقت جرينتش لمسافة طويلة من الرحلة ، كما يمكن لمعظمنا أن يعرف وقت جرينتش بالراديو .

والظهر هو الوقت الذى تكون فيه الشمس تماما فوق الزوال فى أعلى نقطة فى السماء . فلو سجلت مزولتك الظهر بعد ساعة من ظهر جرينتش فتكون الشمس قد دارت كما يقول الأقدمون ١٥° نحو الغرب ، أو أن الأرض تدور حول محورها ١٥° شرقا بين زمنى الظهرين ، وعلى ذلك فنحن على بعد ١٥° غرب جرينتش . وقد كشف الأقدمون أن الزمن الذى تسجله ساعة الظل لا يتطابق فى الأماكن المختلفة فى رصده حينما يحدث كسوف أو حينما يمر كوكب خلف قرص القمر . وكان عند البابليين ساعات رملية تمكنهم من رصد الزمن الذى يمر بين ظهر يوم معين وبدء كسوف

أو اختفاء أو نهاية كل . وقد كانت هذه هي الطريقة المهمة الرئيسية لمعرفة خط الطول قبل كشف الكرونومترات . فلو رصد كسوف أو اختفاء فى مكان ما ، ووجد أنه بدأ بعد ٨ ساعات من الظهر المحلى ، وفى مكان آخر بعد $\frac{1}{2}$ ٩ ساعة من الظهر المحلى ، فالظهر فى المكان الثانى سبق الظهر فى المكان الأول بمقدار $\frac{1}{2}$ ١ ساعة (انظر شكل ١١٦ ا) وعلى ذلك فالمكان الثانى $\frac{1}{2}$١ × ١٥ = $\frac{1}{2}$٢٢° شرق المكان الأول . ولم يصل الإغريق إلى طريقة عمل الخرائط المبنية على خطوط الطول والعرض ، وإنما عملت هذه الخرائط حينما انتقلت الهندسة الإغريقية إلى الاسكندرية مركز السفن الأكبر للعالم الاتباعى (الكلاسيكى) .

تدريب ١٠ :

« المستقيمان اللذان يصلان نهايتى قطر نصف دائرة بأية نقطة على محيطها يحصران زاوية قائمة » .

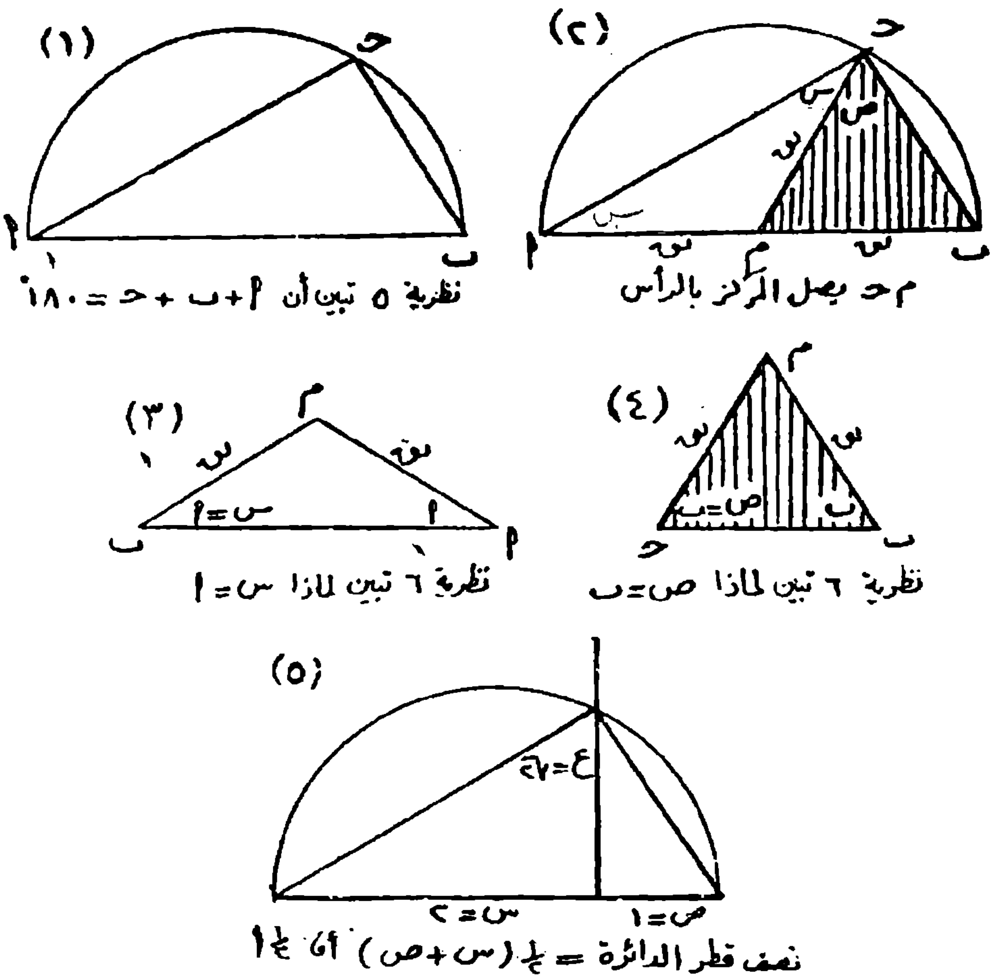
خطوات التقسيم أعطيت كلها فى (٢) ، (٣) ، (٤) من شكل ٦٤ . ونصف قطر نصف الدائرة يساوى ن من وحدات الطول . ويمكن وضعها فى جدول كالآتى :

ا + ب + حـ = ١٨٠°　　　ا + ب + (س+ص) = ١٨٠°

(س+ص)+(س+ص) = ١٨٠　　　٢حـ = ١٨٠° ∴ حـ = ٩٠°

وتبين هذه النظرية كيف نرسم على الرمل الوسط الهندسى لعددين (ش٦٤ — ٥) ويمكن استخدامها كطريقة مصورة لإيجاد الجذر التربيعى بدرجة كبيرة من الدقة عن الطريقة فى شكل ٥٥ . وفى نظرية ٨ (انظر ش ٥١) وجدنا أن ع = $\sqrt{\text{س ص}}$.

ولإيجاد $\sqrt{\text{س ص}}$ (انظر ش ٥١) نحتاج لرسم زاوية قائمة بحيث يكون الارتفاع (ع وحدة من وحدات الطول) الساقط من رأس القائمة على الوتر مقسما هذا الوتر إلى س ، ص من وحدات الطول . ولنفرض أنه أريد الحصول على $\sqrt{7}$. فإذا كان س = ٧ ، ص = ١ فإن س ص = ٧ وعلى ذلك ارسم مستقيما طوله ٨ وحدات وارسم عموداً عليه على بعد وحدة من أحد الطرفين أو ٧ وحدات من الطرف الآخر ، ثم ارسم نصف دائرة نصف قطرها ٤ وحدات ومركزها منتصف هذا المستقيم ، ثم صل بين طرفى المستقيم والنقطة التى يقطع فيها العمود نصف الدائرة فيكون عندك مثلث قائم الزاوية يعطيك قيمة ع .



شكل (٦٤) تدريب ١٠

لايجاد الوسط الهندسي بين ١ ، ٢ (أى ٢√) ارسم مثلثا قائم الزاوية في نصف دائرة نصف قطرها الوسط الحسابى أى ١½ .

ولايجاد ٦√ بهذه الطريقة اجعل س = ٣ ، ص = ٢ . نق = ٢½ .

تدريب ١١ :

« إذا كونا مثلثين قائمي الزاوية برسم عمود على قطر نصف دائرة ، ثم توصيل نقطة تقاطعه مع المحيط بالمركز و باحدى نهايتي القطر ، فان الزاوية عند المركز تساوى ضعف الزاوية عند نهاية القطر » .

خطوات هذا التدريب مشروحة تماما فى (شكل ٦٥)

لاحظ أولا أن هـ = ١٨٠ − ا

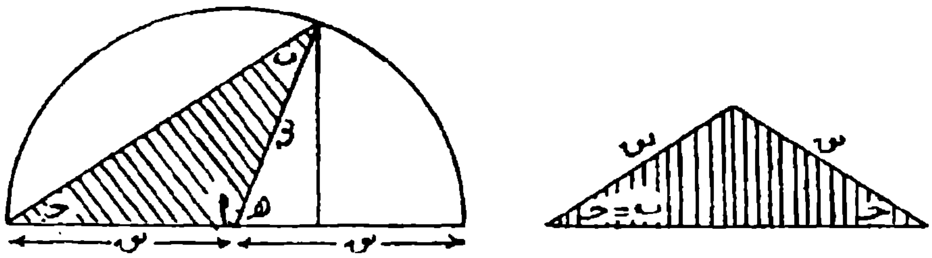
وكذلك ا + ب + حـ = ١٨٠°

∴ ب + حـ = ١٨٠° − ا

∴ ٢ حـ = ١٨٠° − ا

∴ ٢ حـ = هـ

∴ حـ = ½ هـ



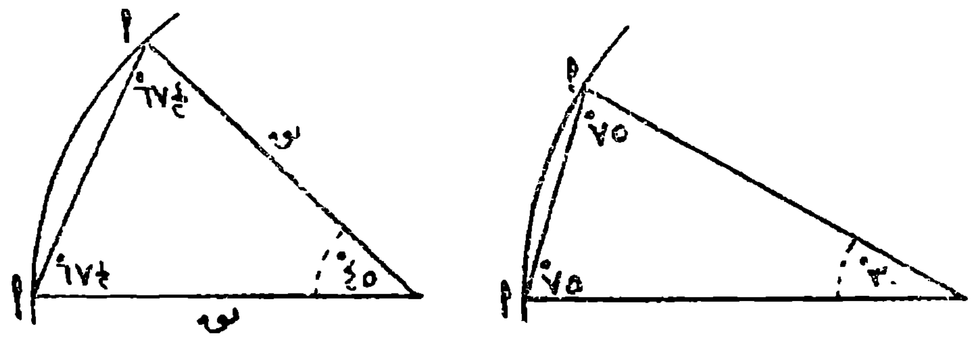
شكل (٦٥) تدريب ١١

هـ = ١٨٠ − ا (تدريب ٥) (ش ٣٣)

ب = حـ (تدريب ٦)

∴ ب + حـ = ٢ حـ

وهذاالتدريب ذو أهمية كبرى لأنه استخدم — كما سنرى فيما بعد — للحصول على القاموس الاسكندرى الأول للجيوب . ويبين لك (شكل ٦٦) كيف يمكنك رسم دوائر على لوحة عمود الظل (شكل ٤٦) لمتسلسلة كبيرة من الزوايا تبدأ بأية



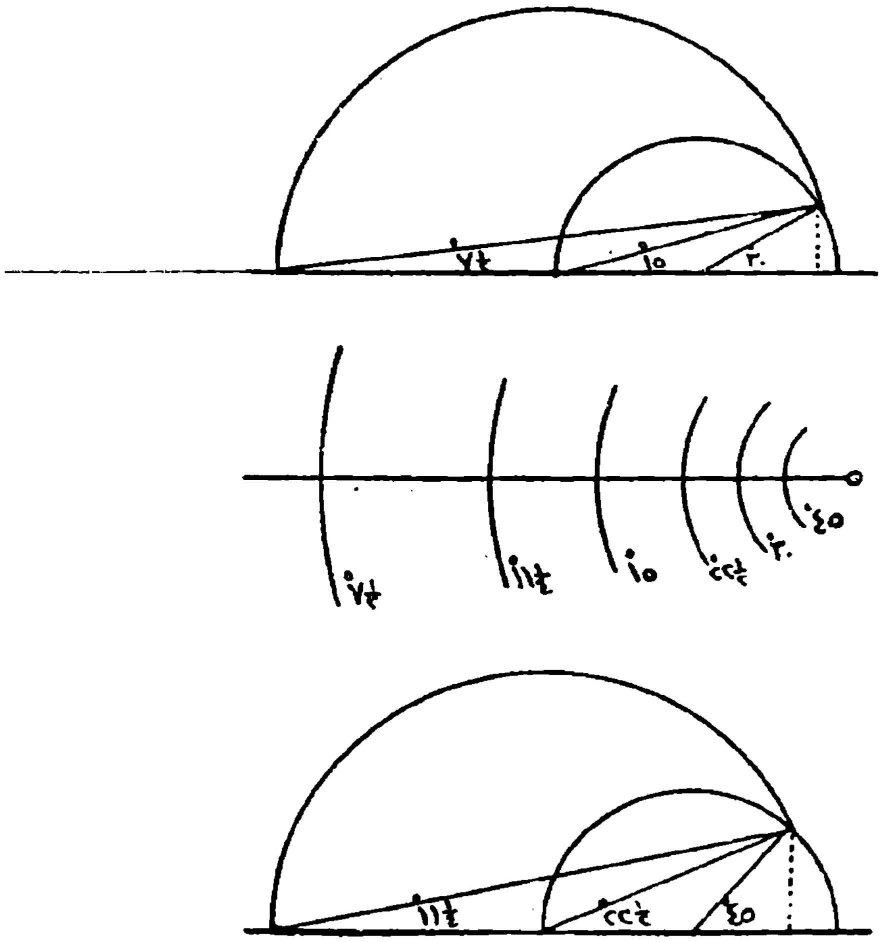
شكل (٦٥ — أ)

— كيف تحصل على الزاويتين ٦٧½° ، ٧٥° .

الزاويتان ا متساويتان فى كل من الشكلين . (تدريب ٦) .

وقيمتاهما مبينة بواسطة تدريب ٥

زاوية (مثل ٦٠° أو ٣٠° أو ٤٥°) تعرف كيف تحصل عليها . والزوايا الأخرى التى ربما تبدأ منها الحصول على متسلسلة جديدة من الدوائر لقياس زاوية الشمس بواسطة عمود الظل معطاة فى (شكل ٦٥ ا)



شكل (٦٦) معايرة عمود الظل

إذا بدأنا بالزاوية ٦٧½° ، ٧٥° كما فى (ش ٦٥ ا) يمكننا أن نحصل على ٦٧½° ، ٣٣¾° ، ٧٥° ، ٣٧½° ، ١٨¾° ... ...

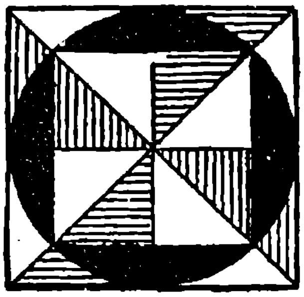
تدريب ١٢ :

« النسبة بين محيط دائرة وقطرها ثابتة لجميع الدوائر » .

وهذا يعنى نفس قولنا بأن المحيط يساوى القطر كذا من المرات مهما كان قدر الدائرة . وهذا العدد هو عدد يمتد مثل $\sqrt{2}$ إذا ما استخدم فى القياس ،ولا يمكن تمثيله بصورة مختصرة ككسر عشرى دائر ، وعلى ذلك فهو يمثل بالضمير ط . وسنرى فيما بعد أن قيمته تقع بالقرب من ٣$\frac{1}{7}$. والنظرية التى تقودنا إلى ذلك تربط قياس المثلث بقياس الدائرة ، وتبين كيف توجد حافة العجلة إذا علمنا الشعاع Spoke ، أو قدر الشعاع الذى نحتاجه لعمل حافة تدور كذا من المرات فى الميل . وهى أساس المدوار (وقد عمل أول نموذج له فى الاسكندرية حول ١٠٠ ق . م .) ومبين السرعة . وهى أساس كل المقاييس الأرضية الكبيرة وتقديرات قدر الشمس والقمر . وعندما نعرف محيط الأرض (وسيحسب بطريقة سهلة جداً فيما بعد) فاننا نحصل منه على نصف قطرها ومحيط أية دائرة من دوائر العرض . وبدون ط ما كان من الممكن وجود كولمبس ولا جورج استيفنسن .

وإنه لتخمين مغر أن نفترض أن الأشكال المضلعية والدوائر المرسومة على السطح المحدب اللين للصلصال على عجلة الخزاف — وما أسهل رسمها — قد وجهت النظر إلى قياس الدائرة . وأشكال كالأشكال المرسومة فى (ش ٦٧) التى تدل على ضوء الشمس والظل ، والشمس والقمر ، والكسوف والظهر ، والحقائق المستمرة للعمل والعبادة فى العالم القديم ، ما هى إلا تذكار للزخارف الهندسية التى تزين الأوانى القديمة مثل الزهريات القبرصية (حول ١٠٠٠ ق . م .) . وربما يكون قياس الدائرة قد كشف من خلال طريقة رسم البابليين لمسدس داخل دائرة لتقسيم المنطقة الكسوفية إلى البروج الأولية الستة .

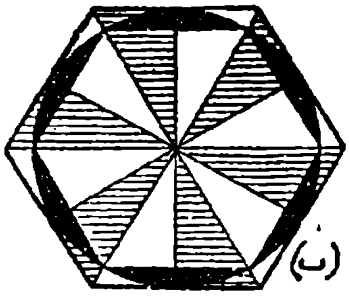
مضلع ذو أربعة أضلاع متساوية مكون من ثمانية مثلثات قائمة بزوايا مركزية مقدار كل منها $\frac{٣٦٠^\circ}{٨} = ٤٥^\circ$



(أ)

دائرة محصورة بين مربعين (مضلعين ذوى أربعة أضلاع متساوية)

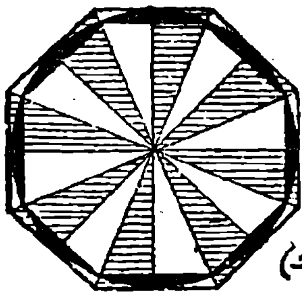
مضلع ذو ستة أضلاع متساوية مكون من اثني عشر مثلثا قائم الزاوية بزوايا مركزية مقدار كل منها $\frac{٣٦٠^\circ}{١٢} = ٣٠^\circ$



(ب)

دائرة محصورة بين مضلعين ذوى ستةأضلاع متساوية .

مضلع ذو ثمانية أضلاع متساوية مكون من ستة عشر مثلثا قائم الزاوية بزوايا مركزية مقدار كل منها $\frac{٣٦٠^\circ}{١٦} = ٢٢\frac{١}{٢}^\circ$



(ح)

دائرة محصورة بين مضلعين ذوى ثمانية أضلاع متساوية .

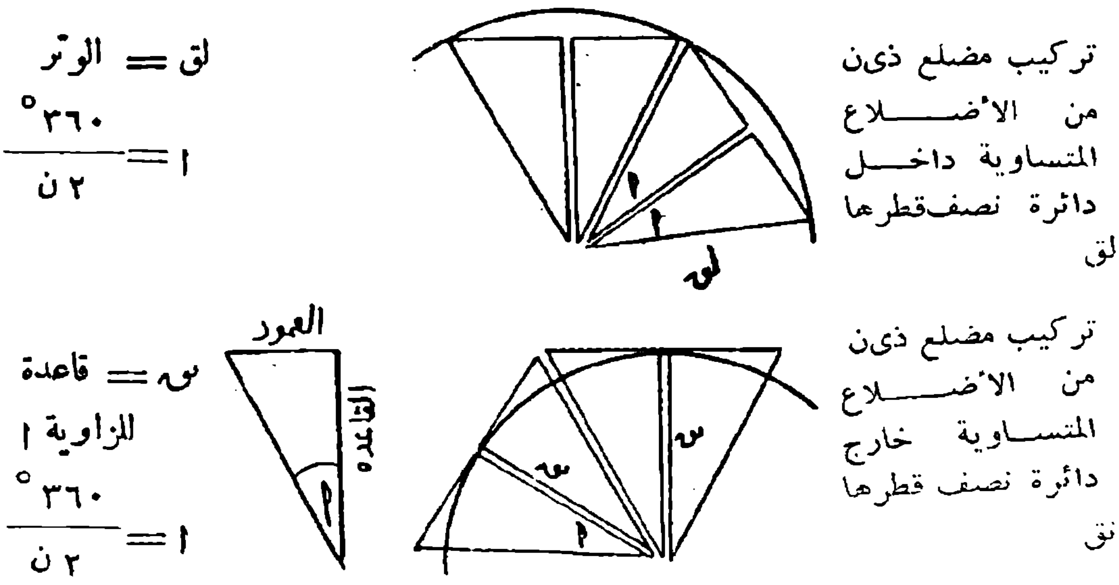
شكل ٦٧ من عجلة الخزاف الى ط

وبالاطلاع على شكل ٦٧ ترى فى الحال ثلاثة أشياء :

(ا) محيط الدائرة ومساحتها أقل من محيط المضلع المرسوم خارجها ومساحته ، وأكبر من محيط المضلع المرسوم داخلها ومساحته

(ب) المضلع الذى يحيط بالدائرة (الذى أضلاعه تمسها) أو المضلع المحوط بالدائرة (الذى رؤوسه تقع عليها) يمكن تركيبه من مثلثات قائمة الزاوية عددها يساوى ضعف عدد أضلاع المضلع .

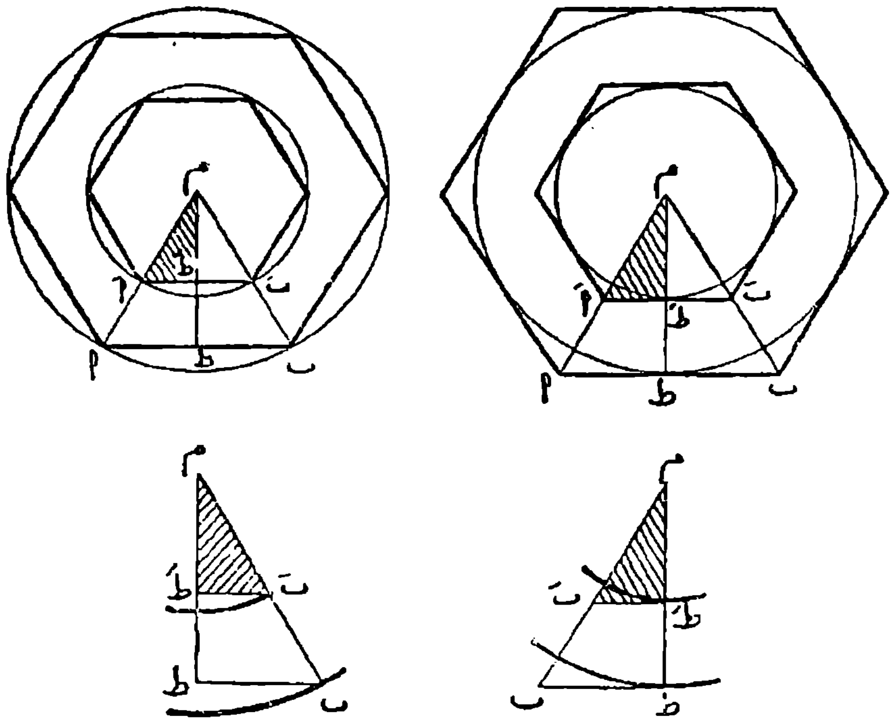
(ح) مجموع الزوايا المركزية لهذه المثلثات ٣٦٠° .



شكل (٦٨)

وبالاطلاع بعد ذلك على شكل ٦٨ ، ترى كيف ترسم مضلعاً مكونا من أى عدد من الأضلاع المتساوية (ن) يحاط بدائرة نصف قطرها لق من وحدات الطول أو يحيط بدائرة نصف قطرها نق وحده . وبذلك بجعل الزاوية ا فى المركز ، ثم وضع ٢ ن من المثلثات القائمة الزاوية المتساوية بحيث توضع بالتبادل الأوتار متلاصقة والقواعد متلاصقة (قاعدة للزاوية ا) ، حتى نرجع حيث بدأنا . ولو جمعت الزوايا المركزية إلى ٣٦٠° وهى جميعها متساوية فإن

$$\text{ا} = \frac{\text{٣٦٠}^\circ}{\text{٢ ن}}$$



شكل (٦٩)

م طَ = لق　　　　م بَ = لق

م ط = س　　　　م ب = س

لتوضيح النسبة الثابتة بين قطر الدائرة ومحيط المضلع الذي يحيط به أو يحاط بها

ولننظر الآن إلى شكل ٦٩ ، فنرى على اليسار دائرتين تحيطان بمضلعين متساويين في عدد الأضلاع . ونرى على اليمين مضلعين متساويين فى عدد الأضلاع يحيطان بدائرتين متحدتى المركز . ونرى ن = ٦ فى كل من الشكلين ، وقد رسم المضلعان الأكبر والأصغر بحيث تشترك المثلثات القائمة الاثنا عشر التى تقسم كلا منهما فى زوايا الأركان . ولما كانت جميع المثلثات القائمة المشتركة فى زاوية الركن متشابهة (تدريب ٥ حـ) ، فإن النسبة بين الأضلاع المتناظرة للمثلثات الكبيرة والصغيرة ثابتة (تدريب ٧) .

ولو كان لق نصف قطر الدائرة الصغرى ، س نصف قطر الدائرة الكبرى ،

فنرى من الشكل الذى على اليسار أن $\frac{\text{ط ب}}{\text{ط َ ب َ}} = \frac{\text{م ب}}{\text{م ب َ}}$ ∴ $\frac{\text{ط ب}}{\text{ط َ ب َ}} = \frac{\text{نق}}{\text{لق}}$

$$\therefore \frac{\text{٢ ن × ط ب}}{\text{٢ ن × ط َ ب َ}} = \frac{\text{٢ نق}}{\text{٢ لق}}$$

وبما أن هذين المضلعين المحاطين مركبان من ٢ ن من مثل المثلث المذكور ، ومحيطاهما يساويان ٢ ن × ط ب ، ٢ ن × ط َ ب َ ولو كان ح َ محيط المضلع الأكبر ، ح محيط المضلع الأصغر ، ق قطر الدائرة الكبرى ، ن قطر الدائرة الصغرى فإن

$$\frac{\text{ح َ}}{\text{ح}} = \frac{\text{ق}}{\text{ن}} \quad \text{أى} \quad \frac{\text{ح َ}}{\text{ق}} = \frac{\text{ح}}{\text{ن}}$$

أى أن النسبة بين قطر الدائرة التى تحيط بالمضلع ذى ن من الأضلاع المتساوية إلى محيط هذا المضلع دائما ثابتة ما دامت ن ثابتة

ومن الشكل الذى على اليمين نحصل على

$$\frac{\text{ط َ ا َ}}{\text{ط َ م}} = \frac{\text{ط ا}}{\text{ط م}} \quad \text{أى} \quad \frac{\text{ط م}}{\text{ط َ م}} = \frac{\text{ط ا}}{\text{ط َ ا َ}}$$

$$\therefore \frac{\text{٢ ن × ط ا}}{\text{٢ ن × ط َ ا َ}} = \frac{\text{٢ نق}}{\text{٢ لق}} = \frac{\text{ق}}{\text{ن}}$$

وعلى ذلك فلو كان ح َ ، ح َ محيطى المضلعين المحيطين الأكبر والأصغر فإن

$$\frac{\text{ح َ}}{\text{ق}} = \frac{\text{ح َ}}{\text{ن}}$$

وعلى ذلك فلا يزال صحيحا أيضا أن النسبة بين محيط المضلع ذى ن من الأضلاع المتساوية إلى قطر الدائرة التى يحيطها نسبة ثابتة لجميع الدوائر التى يمكننا أن نرسمها.

وإذا رجعنا إلى ش٦٧ فاننا نرى أنه كلما زاد عدد الأضلاع فان محيط (ومساحة) المضلع الداخلى يقرب من محيط (ومساحة) المضلع الخارجى ، وكل منهما يختلف قليلا عن محيط (ومساحة) الدائرة التى تقع بين هــذين الحدين . ولو استمررنا فى رسم مضلعات داخلة وخارجة بحيث يأخذ عدد أضلاع كل منها فى الكبر ، فاننا سنقرب شيئا فشيئا من مضلع لا يمكن تمييزه من الدائرة التى تقع بين المضلعين . ولما كانت النسبة بين محيطات المضلعات الخارجة المتشابهة إلى أقطار الدوائر التى يحيطونها نسبة ثابتة لجميع الدوائر التى يمكننا أن نرسمها ، وكانت النسبة بين محيطات المضلعات الداخلة المتشابهة إلى أقطار الدوائر التى تحيط بها نسبة ثابتة لجميع الدوائر التى يمكننا أن نرسمها ، فالنسبة بين محيط الدائرة نفسها (ح) إلى قطرها (ق) ثابتة لجميع الدوائر

وتسمى هذه النسبة ط أى أن $\frac{ح}{ق}$ = ط أو ح = ط ق = ٢ ط نق

وسنبين فيما بعد كيف نوجد قيمة لا بأس بها للمقدار ط حينما نرى كيف تستخدم، وربما تريد أن تأخذ فكرة عنها بعد ما تحملت كل هذه المشقات ، ولذلك فسنعطيك تقديرا أوليا لها . ولم يتقدم أقليدس لاستخدام هـذه النظرية ، ولو أنه فى الحقيقة قد وصل المصريون (١٥٠٠ ق . م .) إلى قيمة (٣,١٦) لا بأس بها ، وتكفى للوصول إلى درجة من الدقة تبلغ ١٪ . ولو سألت أقليدس عن الفائدة من معرفتها فانه يمنحك عملة صغيرة نظير ضيقك . وإليك هـذه العملة الصغيرة فيما يلى . فمحيط المربع الذى يحيط بدائرة قطرها ق يساوى ٤ ق . ارسمه فترى السبب فى ذلك . وإذن فمحيط الدائرة أقل من ٤ ق . والمضلع ذو الستة الأضلاع المتساوية يركب من اثنى عشر مثلثا قائم الزاوية وبكل زاوية مقــدارها °٣٠ . وقد رأينا أن العمود الذى يقابل الزاوية °٣٠ يساوى نصف الوتر (تدريب ٦) ، ونجد أن هذا الوتر يساوى نصف القطر فى المضلع المرسوم داخل دائرة نصف قطرها $\frac{١}{٢}$ ق (أنظر أعلى ش ٦٨) وعلى ذلك فالعمود الذى يقابل الزاوية المركزية = $\frac{١}{٤}$ ق ، ومحيط المضلع ذى الستة الأضلاع = ١٢ × $\frac{١}{٤}$ ق أى ٣ ق ، وعلى ذلك فمحيط الدائرة أقل من ٤ ق وأكبر من ٣ ق . أى أن ط تقع بين ٣ و٤ (ط = ٣,٥ ± ٠,٥٠) . ونظرة واحدة تكفى

للحكم على أن محيط الدائرة أقرب إلى المضلع ذى الستة الأضلاع المرسوم داخل الدائرة من المربع المرسوم خارجها ، وعلى ذلك فالمقدار ط أكبر من ٣ وأقرب إلى ٣ منه إلى ٤ ، أو بمعنى آخر إنه يقع بين ٣ ، ٣,٥

(ط = ٣,٢٥ ± ٢٥,) . وإذا عرفنا قيمة للمقدار ط فيمكننا إيجادمساحة الدائرة بدون أية صعوبة . وإذا نظرنا إلى الجزء الأسفل من (ش ٦٨) فإننا نرى أن مساحة المضلع المحيط ذى ن من الأضلاع = ٢ ن مرة قدر ½ نق × العمود (تدريب ٣) أى ½ اق مرة قدر المحيط . ولو كان ن كبيراً جداً إلى درجة لا يمكن عندها أن نميز محيط المضلع من محيط الدائرة ، فإن مساحة الدائرة (س) = ½ نق . ط ق وبما أن ق = ٢ نق .

∴ س = ط نق٢

ولو عرفنا نصف قطر الأرض ، فإن ط تساعدنا فى إيجاد حجمها . وقد أعطانا أقليدس نظرية تمكننا من ذلك ، وقد حذفنا أية إشارة إلى الهندسة الاغريقية للمجسمات فى هذا الباب لسبب بسيط ، إذ يمكننا الحصول على النتائج المطلوبة بمجهود يقل كثيراً إذا ما استخدمنا أنواعا أخرى من الرياضيات التى أعقبت الهندسة الاغريقية .

وما تعلمناه كاف ليبين لنا بدء هذه التطورات التالية ، ولو وجدنا بعد القمر بالطريقة التى أشرنا اليها وسنرجع فيما بعد لفحصها تماما ، فإنه يمكننا إيجاد نصف قطره بنفس الطريقة ، وعلى ذلك يمكننا إيجاد حجمه . وسنجد ط فى السماء بعد حين (الباب السادس) .

نهاية الهندسة الاغريقية :

بلغت الهندسة الاغريقية التى جلبها أقليدس إلى الاسكندرية ٣٠٠ ق . م . نهايتها ، وقد تضمنت كل المبادىء الضرورية التى استخدمها الاسكندريون والعرب فى استنباط قواعد بسيطة للعمليات الحسابية ، كما استنبطوا طريقة أكثر اقتصادا للمساحة سواء أكانت فلكية وجغرافية أم كانت معمارية ومنزلية . وقد فشل الاغريق فى القيام باكتشافات تستحق الذكر باتباع حدس انكساجوراس الجرىء الزاهر ، مع

المقاييس الفعلية مثل مقاييس ارستارخس وأراتستين (الباب السادس) ، ونجم هذا الفشل عن حقيقة أن الهندسة أصبحت هواية لجماعة من الأذكياء الذين فقدوا كل ميل فى الأعمال الاجتماعية للصانع والبحار ، ولما وجهوا بكميات مثل √٣ أو ط التى لا يمكن تمثيلها بالأعداد التى ورثوها اجتماعيا والتى تعد بها الأغنام والبقر ، وجدوا أنفسهم أمام أحد أمرين : إما أن يصلحوا قاموس أعدادهم حتى يكون أكثر صلاحية للواجب العملى لتمثيل نقص المعرفة البشرية — كما حاول ذلك أرخميدس فى تاريخ متأخر — وإما أن يلجأوا إلى كمال مجرد يبعد القياس عن مملكة الهندسة . فاختاروا الأمر الأخير . ولم يتكلم أقليدس عن أضلاع ومساحات أو مربعات أعداد تعبر عن الطول تقريبا كما نفعل الآن ، وإنما تكلم عن أضلاع وخطوط وأشكال . ولم يستخدم أعداداً مجردة لتعبر عن عدد وحدات القياس كما نفعل الآن ، وإنما استخدم حروفا كبطاقات للخطوط والأشكال كما استخدم تماما أعداداً فقط فى العمليات الحسابية التى تعمل على إطار العد .

ومذهب أفلاطون الذى ينص على أن المسطرة والفرجار هما الآلتان الوحيدتان اللتان يجب أن يستخدمها الهندسى لرسم الأشكال ، يطابق تماما وجهة نظره الأخرى عن الرياضيات . فالهندسة عون للكمال الروحى ، ولا يمكن أن نتوقع أن نصل إلى الكمال الروحى ونمتع أنفسنا فى نفس الوقت ، ولذلك فمن الطبيعى لهؤلاء الذين يعتمدون هذا الاعتقاد أن يجعلوا الهندسة صعبة ولا طعم لها . كما وجدها أجيال من أطفال المدارس . وكانت الهندسة أرقى رياضة عقلية لاستثمار الفراغ ، وتنتظم النكتة فى هــذه اللعبة فى وضع قواعد أكثر تعقيداً ، فالداما ، وبردج المزاد كانت طبيعة أكثر من اللازم للأذكياء المتعطلين الذين وجدت الأفلاطونية قبولا عندهم ، وقد احتاجوا الشطرنج . العقد . أما الرجال الذين قاموا بتدابير آلية لرسم أنواع جديدة من المنحنيات مثل أرخيتاس الأثينى القديم ، هؤلاء الرجال لم يجدوا قبولا ، وبذلك سد الطريق أمام اكتشافات جديدة .

وهنالك تناقض أساسى خفى عن الأعين طول الوقت . فالأشكال ماهى إلا أشياء ترسمها كائنات بشرية ناقصة بأدوات ناقصة حتى ولو سمح باثنين منها فقط ، وقد وضع أقليدس نفسه مبدأ أن أية عملية (ما نسميه تقسيما) لا يمكن استخدامها إلا إذا رسمت بهذه الأدوات الناقصة . وقد قمنا بهذا العمل فى قواعدنا الافتتاحية للتقسيم ، وأنه

لصحيح أن نقول أن الخط لايمكن تقسيمه إلى أيءدد صحيح من الأجزاء المتساوية وأنه لصحيح أيضا أن الأدوات التجريبية للهندسة الاغريقية من علامات على الورق أو خدوش على الشمع أو الرمل لم تكن ذلك النوع من الأشياء التي يمكن استخدامها لتمثيل شيئا يطابق تماما شيئا آخر .

وبعد انشاء جامعة الإسكندرية سنة ٣٢٠ «م . ق» تقدمت الرياضيات في اغريقيا قليلا .

٤	١٤	١٥	١
٩	٧	٦	١٢
٥	١١	١٠	٨
١٦	٢	٣	١٣

شكل (٧٠)

المربع الوفقي

ستجد أن مجموع أي عمود أو صف أو قطر ٣٤ ، وإذا حفر هذا المربع على لوح من الفضة في القرن السادس عشر ، فانه كان يحمي مالكه من الطاعون . ولم تكن طريقة العلاج هذه قاصرة على الأمراض البكتيرية الأصل ، بل قامت أيضا بنفس الادعاء كالتحليل النفساني ، وهناك مربع وفقي على حائط أحد نقوش البرشت ديرر الزائعة الصيت .

وآخر نظرة نلقيها على الرياضيات في أغريقيا الأم قبل أن تسقط القسطنطينية في أيدي الأتراك تظهر لنا الاعتقاد الديني في المربع الوفقي (ش ٧٠) الذي جلبه موسكوبولوس البيزنطي إلى إيطاليا في القرن الخامس عشر الميلادي . وانتهى نحو الأعداد كما بدأ بخليط من الخزعبلات وألغاز الكلمات المتصالبة ، وسنرى في الباب الآتي أنه لما ووجه الذكاء الإغريقي بأزمة في ثقافته الاجتماعية اتجه إلى ألغاز الكلمات المتصالبة قبل أن يبعد الأعداد عن مملكة الهندسة .

اكتشافات واختبارات على الباب الرابع

(١) مستقيمان متقاطعان يصنعان الزوايا الأربع ا ، ب ، حـ ، ء . إرسم أشكالا إذا كانت ا = ٣٠° ، ٦٠° ، ٤٥° . وبين على هذه الأشكال قيم الزوايا الثلاث الأخر .

(٢) ا َ ، ب َ ، حـ َ أطوال أضلاع المثلث ا ب حـ التى تقابل الزوايا ا ، ب ، حـ على الترتيب مد ا َ من جهة حـ إلى هـ ، ارسم هذا الشكل وأوجد قيمة الزاوية ا حـ هـ إذا كان :

أولا : ا = ٣٠° ، ب = ٤٥°. ثانياً : ا = ٤٥° ، ب = ٧٥°
وإذا سميت الزاوية ا حـ هـ بالزاوية الخارجة عند حـ ، فما هى القاعدة العامة التى تربط زاوية خارجة للمثلث بالزاويتين الداخلتين المقابلتين ؟

(٣) إرسم مثلثاً متساوى الأضلاع طول ضلعه وحدة واحدة . إرسم عموداً من أحد رؤوسه إلى الضلع المقابل .
عبر عن مساحة المثلث بدلالة : أولا : حا ٦٠°
ثانياً : جتا ٣٠° . ولو كان طول الضلع ا َ من الوحدات فكم تكون مساحة المثلث ؟

(٤) إرسم مثلثاً متساوى الساقين إحدى زواياه ١٢٠° . وإذا كان طول كل من ساقيه الوحدة فأوجد عبارة تدل على مساحة المثلث وكم تكون المساحة إذا كان طول كل من الساقين ا َ وحدة ؟

(٥) إرسم أشكالا لتوضيح ما يأتى :

(٢ ا + ٣ ب)^{٢} = ٤ ا^{٢} + ١٢ ا ب + ٩ ب^{٢}

(٣ ا − ٢ ب)^{٢} = ٩ ا^{٢} − ١٢ ا ب + ٤ ب^{٢}

(٢ ا + ٣ ب) (٣ ا − ٢ ب) = ٦ ا^{٢} + ٥ ا ب − ٦ ب^{٢}

(٢ ا + ٣ ب) (٢ ا − ٣ ب) = ٤ ا^{٢} − ٩ ب^{٢}

(١٥) يرتكز سلم على حائط رأسى ويصنع معه زاوية مقدارها ٣٠° ، فإذا كان موقع السلم يبعد عن الحائط بمقدار ٣ أقدام ، فما مقدار طول السلم وبعد طرفه العلوى عن الأرض ؟

(١٦) خزانة ثياب إرتفاعها خمسة أقدام وضعت فى حجرة ذات سقف ينحدر حتى يصل إلى الأرض ، فإذا كانت الخزانة على بعد قدمين من الحائط عندما تكون أقرب ما يكون منه ، فما مقدار ميل السقف ؟

(١٧) سقف مغطى يميل بزاوية ٦٠° ، ويرتفع عن الأرض بمقدار ١٥ قدما ، فلو أمكن إمتداد هذا السقف حتى يصبح على ارتفاع ٦ أقدام من الأرض ، فما مقدار هذا الامتداد ؟

(١٨) عمود تلغراف إرتفاعه ١٧ قدما . وطول ظله وقت الظهيرة ٢٠٥ من البوصات فما مقدار بعد الشمس عن سمت الرأس تقريبا ؟ (إستعمل جداول الظلال)

(١٩) فى وقت الظهر حينما كان بعد سمت الرأس عن الشمس ٣٠° ، وصل ظل عمود مصباح إلى قاعدة سلم طوله ١٢ قدما مرتكز بطرفه العلوى على الطرف العلوى لعمود المصباح . فكم يطول هذا الظل عندما يكون بعد سمت الرأس عن الشمس ٩٠° ؟ (إرسم شكلا ولا يطلب منك حسابا) .

(٢٠) طول ظل عمود إرتفاعه ٣ أقدام ، ٦ بوصات فى الساعة الرابعة بعد الظهر ٥ أقدام، وفى نفس الوقت كان ظل صخرة خلفها الشمس مباشرة ٦٠ ياردة ، فكم يكون ارتفاع هذه الصخرة ؟

(٢١) أراد مساح أن يقيس اتساع نهر لا يمكنه عبوره . وكان على الشاطىء المقابل مرئى واضح ط ، وقد وجد المساح أن الزاوية بين الشاطىء وإتجاه ط من نقطة على يساره ا على الشاطىء الواقف عنده ٣٠° ، ومن نقطة ب على يمينه على نفس الشاطىء ٤٥° ، ولما قاس ا ب وجده ٦٠ قدما ، إرسم شكلا يبين ذلك وأوجد منه إتساع النهر .

(لمحة : أوجد العلاقات بين العمود الساقط من ط على اب بدلالة جزئى ا ب ثم أضف الجزئين)

(٢٢) قطعة من ذات نصف البنس قطرها بوصة وضعت على بعد ٣ ياردات من العين فكادت تحجب قرص الشمس أو القمر ، فإذا أخذنا بعد الشمس ٩٣ مليون ميل فأوجد قطر الشمس ، وإذا أخذنا قطر القمر ٢١٦٠ ميلا فأوجد بعده .

(٢٣) إذا كان حا ا = جتا ٦٠° فما مقدار ا؟
« « حا ا = جتا ٤٥° « « ا؟
« « جتا ا = جا ١٥° « « ا؟
« « جتا ا = حا ٨° « « ا؟

(٢٤) إذا كان حاس = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وجتا س = ½ فما مقدار ظا س؟
« « حاس = ٠,٤ وجتاس = ٠,٩ « « ظا س؟
« « جتاس = ٠,٨ وحاس = ٠,٦ « « ظا س؟
« « حاس = ٠,٨ وجتاس = ٠,٦ « « ظا س؟

(٢٥) إستخدم جداول المربعات أو جداول الجذور التربيعية لايجاد الضلع الثالث في المثلث القائم الزاوية الذى ضلعاه الآخران : (ا) ١٧ قدما ، ٥ أقدام (ب) ٣ بوصات ، ٤ بوصات (حـ) ١سم ، ١٢ سم . كم قيمة مختلفة ممكنة للضلع الثالث فى كل مثلث ؟

(٢٦) إرسم بطريقتين مختلفتين رسما هندسيا بمقياس رسم يبين مربعات الأعداد الصحيحة من ١ إلى ٧

(٢٧) إرسم رسما هندسيا لايجاد الوسط الحسابي والوسط الهندسى للعددين ٢ ، ٨ ، ١ ، ٩ ، ٤ ، ١٦ .

(٢٨) كم يكون بعد سمت الرأس عن نجم يكاد يمس الأفق ؟ حينما كان على الزوال النجم سهيل النجم اللامع بعد الشعرى ، كان على بعد ½٧° من نقطة الجنوب للأفق بالقرب من الهرم الأكبر (خط عرض ٣٠°) . فكم تكون الزاوية بين سهيل والنجم القطبى ؟ وعلى فرض أن الزاوية بين نجمين عندما يكونان على خط الزوال ثابتة . فما أبعد خط عرض شمالا يمكن عنده رؤية سهيل ؟

(٢٩) إذا كانت الشمس تقع مباشرة فوق مدار السرطان (خط عرض ½٢٣° شمالا) فى ٢١ يونيو فبين برسم شكل مثل (شكل ٦١ ، شكل ٦٢) إرتفاع الشمس

وبعدها عن سمت الرأس فى نيويورك (خط عرض ٤٣° شمالا) عندما تكون على خط الزوال (أى عند الظهر) . وما أبعد خط عرض جنوبا يمكن عنده رؤية الشمس عند منتصف الليل فى هذا اليوم ؟

(٣٠) ما بعد سمت الرأس عن النجم القطبى فى نيويورك (خط عرض ٤٣° شمالا) ولندن (½٥١° شمالا) وما إرتفاع الشمس عند الظهر فى ٢٣ سبتمبر ؟

(٣١) فى قرية ديفونشير كان ظل عمود تلغراف أقصر ما يمكن عندما كان برنامج الراديو يعطى الساعة ١٢ ١٤ ق ت بعد الظهر فى أول سبتمبر ، فاخط طول هذه القرية ؟

(٣٢) بتقسيم مضلع ذى س من الأضلاع المتساوية إلى س من المثلثات المتساوية بين أن الزاوية بين أى ضلعين تساوى $\frac{٢س - ٤}{س}$ من الزاوية القائمة .

(٣٣) ما إرتفاع فنار إذا أمكن رؤية نوره على بعد ١٢ ميلا ؟

(٣٤) من قمة صارى سفينة على إرتفاع ٦٠ قدما فوق سطح البحر ، كادت ترى قمة صخرة إرتفاعها ١٠٠ قدم ، فما بعد السفينة عن الصخرة ؟

(٣٥) فى وقت الظهر فى يوم معين كان ظل عمودين رأسيين ا ، ب إرتفاع كل منهما ٥ أقدام طوله ٣ أقدام ، ٣ بوصات ، ٣ أقدام ، ١½ بوصه على الترتيب ، فإذا كان ا على بعد ٦٩ ميلا شمال ب فما مقدار نصف قطر الأرض ؟

(٣٦) إذا رسم مربع خارج دائرة نصف قطرها بوصة واحدة بحيث تمس أضلاعه هذه الدائرة . فبين أن طول محيطه ٨ ظا ٤٥° . وإذا رسم مربع داخل هذه الدائرة بحيث تقع رؤوسه على محيط الدائرة فبين أن طول محيطه ٨ حا ٤٥° . وبالمثل بين أن طول محيط المسدس المحيط ١٢ ظا ٣٠° ، طول محيط المسدس المحاط ١٢ حا ٣٠° ، وما الذى تتوقعه لطول محيط المثمن المحيط ، والمثمن المحاط ، وطول محيط ذى الاثنى عشر ضلعا المحيط ، وذى الاثنى عشر ضلعا المحاط .

(٣٧) احسب القيم العددية لطول محيط مربع ومسدس ومثمن وذى الاثنى عشر ضلعاً مرسوم داخل الدائرة وخارجها . رتب نتائجك فى جدول لتبين القيم التى تقع بينها ط ، مستخدما جداول الجيوب والظلال.

(٣٨) بين أن مساحة المربع المحيط ٤ ظا ٤٥° ومساحة المربع المحاط ٤ حا ٤٥° جتا ٤٥° لكم تكون مساحة المسدس المحيط والمسدس المحاط ؟ أوجد قانونا عاما لمساحة مضلع محيط ومضلع محاط إذا كان عدد أضلاعه ن ضلعا ، مع ملاحظة أنه فى حالة المربع المساحة = ٤ ظا $\frac{٣٦٠}{٨}$

(٣٩) بما أن مساحة الدائرة التى نصف قطرها الوحدة = ط (ط لق^{٢} = ط إذا كان لق = ١) ، فاستخدم القانون العام الذى حصلت عليه لايجاد النهايتين اللتين تقع ط بينهما متخذا ط لتقع بين مساحتى مضلع محيط ومضلع محاط إذا كان عدد أضلاع كل ١٨٠ ضلعا .

(٤٠) إذا كان نصف قطر الأرض ٣٩٦٠ ميلا فاوجد المسافة بين مكانين على خط طول واحد إذا كان الفرق بين خطى عرضيهما درجة واحدة .

(٤١) أوجد المسافة بين مكانين على خط الاستواء إذا كان الفرق بين خطى طوليهما درجة واحدة .

(٤٢) أبحرت سفينة غرباً مسافة ٢٠٠ ميل فتغير خط طولها بمقدار ٥ درجات فما خط عرضها ؟

(٤٣) فى يوم منتصف الصيف تكون الشمس مباشرة فوق مدار السرطان (٢٣ ½° شمالا) وفى يوم منتصف الشتاء تكون الشمس مباشرة فوق مدار الجدى (٢٣ ½° جنوبا) . ارسم شكلا تبين فيه زاوية ميل الشمس عن الأفق عند الظهر فى ٢١ يونيو فى لندن (٥١ ½° درجة شمالا) .

(٤٤) بين بالرسم أن الظل عند الظهر يتجه دائما نحو الشمال فى نيويورك (خط عرض ٤٣° شمالا)

(٤٥) بين ما تعنيه بملاحظة الظل عند الظهر طول السنة إذا كنت (١) شمال خط

عرض ½ ٦٦° شمالا (ب) بين خطى عرض ــ ٦٦° شمالا ، ½ ٢٣° شمالا (حـ) بين خطى عرض ½ ٢٣° شمالا وخط الاستواء (ى) عند القطب الشمالى بالضبط (هـ) على الدائرة القطبية بالضبط (و) على مدار السرطان بالضبط (ز) على خط الاستواء بالضبط .

(٤٦) على أى خط عرض يكون ظل العمود عند الظهر مساويا طول العمود؟ فى (أ) ٢١ يونيو (ب) ٢١ مارس (حـ) ٢١ ديسمبر .

(٤٧) كرونومتر سفينة فى ٢٣ سبتمبر سجل وقت جرينتش ٤٤ ق ١٠ ت صباحا حينما عبرت الشمس خط الزوال بزاوية ٥٦° فوق الأفق الشمالى . فأى ميناء تقترب منه السفينة ؟ (استخدم خريطة)

(٤٨) إذا كانت نيويورك على خط طول ٧٤° غربا وموسكو على خط طول ⅔ ٣٧° شرقا ، فكم يكون الوقت فى نيويورك وموسكو إذا كان فى لندن ٩ مساء ؟

(٤٩) باستخدام نظرية ٩ وتعريف الدائرة بأنها شكل كل نقطة على محيطه متساوية البعد من نقطة ثابتة تسمى المركز . بين أن المركز وهو أيضا النقطة التى يتلاقى عندها العمودان المرسومان على أى وترين من منتصفهما .

(٥٠) كيف تستخدم هذا إذا رغبت فى عمل قاعدة مزواة منزلية كالتى فى ش. ١٢ من القاعدة المستديرة لكرسى ذى ثلاثة أرجل مستعمل ، أو لثقب مركز صفيحة مستديرة .

أشياء للتذكر

(١) فى المثلث الذى قاعدته اَ التى تقابل ا وضلعاه بَ ، حَ اللذان يقابلان ب ، ح على الترتيب، ارتفاعه ع من ب على بَ

(ا) المساحة = ½ ع بَ (ب) ا + ب + ح = ١٨٠°

وإذا كانت ب = ٩٠°

(ا) ح = ٩٠° − ا ، ا = ٩٠° − ح (ب) بَ² = حَ² + اَ²

(ح) جا ا = $\frac{\text{اَ}}{\text{بَ}}$ = جتا ح ، جتا ا = $\frac{\text{حَ}}{\text{بَ}}$ = جا ح ،

ظا ا = $\frac{\text{اَ}}{\text{حَ}}$ = $\frac{1}{\text{ظا ح}}$

(٢) فى الدائرة التى نصف قطرها لق (وقطرها ق) المحيط = ٢ ط لق (أو ط ق) والمساحة = ط لق²

(٣) يتطابق المثلثان : (ا) إذا ساوت الأضلاع الثلاثة لأحدهما الأضلاع الثلاثة للآخر

(ب) إذا ساوى ضلعان والزاوية المحصورة بينهما لأحدهما الضلعين والزاوية المحصورة بينهما للآخر .

(ح) إذا ساوى ضلع والزاويتان اللتان يصنعهما الضلعان الآخران معه لأحدهما ضلعا والزاويتين اللتين يصنعهما الضلعان الآخران معه للآخر .

الباب الخامس

من المأزق إلى أحاجى الكلمات المتقطعة

بدء علم الحساب

إن وضع سياسة تعليمية لعصر الرخاء لأمر جد مختلف عن مجرد ترك أطفال الطبقة الوسطى أبناء ذوى الآراء التقدمية بدون أى عمل . فإتباع طريقة التعلم التى نشأت عن حاجيات الطبقة الوسطى قد أدى إلى أن تجد الأجيال المتعاقبة من تلاميذ المدارس أنفسها أمام مايسمى بقنطرة الحمير (١) فوقفوا أمامها ويئنون ويعبرونها سويا متألمين، كما يقول الرسول . فطريقة التعلم العتيقة كانت تضمن للمتعلم عملا بعد كده فى الدرس ونجاحه فى الإمتحان أما الطريقة الحديثة فتمنحه عطلة يرفه فيها عن نفسه . إن التعلم المعقول هو الذى يبين أن دراسة الهندسة من حق الجميع إذ أنها جعلتنا قادرين على وضع نظام لمجتمع يرضى فيه كل فرد بما يناله من حاجيات مشتركة . ولما كنا الآن قد تعرفنا على بعض ما أنتجه الإغريق فى الرياضة ، فإنه يمكننا أن نسترجع كلمات كبت(٢) وسنبدأ ببيان الطريقة التى يمكن أن تدرس بها الرياضة حتى تكون أداة نافعة لخير المجتمع .

إذا أنت فكرت فى هذه الطريقة ، فهل هناك وصف أنسب لهذا الدرس من « قنطرة الحمير » ففى النظرية الخامسة من الكتاب لإقليدس تكمن أعظم مأساة فى تاريخ البشر . فخرافات الكهنة التى نمت بمرور الزمن . تطلبت أن يكون لمواقع المعابد من جمال الروعة ما يتناسب مع مهابة وجلال حراسها السماويين ، ولبناء معابد فخمة مريحة تزورها الآلهة كان العبيد يكوون فوق الرمال المحرقة غير أن هذا أوجد فكرة بناء منازل صالحة لسكن الناس ولا شك أن الأدب الإغريقى هو الذى حافظ للجنس البشرى على ما وصل إليه الإغريق من معرفة . وتاريخ الفكر الإنسانى منذ ذلك العهد إن هو إلا نضال بين طريقتين للنظر إلى العالم ، إحداهما طريقة الرجل العملى الذى

---

(١) Bridge of Asses

(٢) Cobbett

يستخدم المعرفة لتغيير مظاهر الحياة والأخرى هى طريقة الرجل الخالى الذى يتأمل فى الحياة .

لقد كان من بين الإغريق الأيونيين رجال أمثال ديموقريتس(١) يعتقدون كما نعتقد نحن أن « المعرفة » حق مخول للجميع وربما كان ذلك هو السبب فى تحدثهم عن النتائج والمظاهر دون المقدمات والبراهين . أما الرياضيون الأوائل فكانوا يرغبون فى نشر ما وصلوا إليه من « معرفة » ففيثاغورس(٢) الذى أتى بعد طاليس(٣) طاف يعطى محاضرات عن الأرقام والأعداد لعدد كبير من المستمعين وذلك فى القرن الخامس قبل الميلاد وأخيراً تزوج إحدى طالباته وأسمها ثونيو(٤) . ولكن سرعان ما نلمح مبادىء تغير فى وجهة النظر هذه ، ذلك أنه وجد آخرون أمثال المشتغلين فى عصرنا هذا بمحاولة إصلاح السلالات البشرية ، والبيض من أهل جنوب إفريقيا ، وغيرهم ممن يعتبرون «المعرفة» شيئاً يجب أن تخفيه عن السود أو الفقراء .

ولقد قسم طلبة فيثاغورس أنفسهم إلى جمعيات سرية وأحاطوا الرياضة بهالة من الغموض الرهيب المخيف لازمتها من ذلك الوقت ، فكانت الإكتشافات الرياضية تنقل بمنتهى الحذر ، حتى أنه يقال أن فى القرن الرابع قبل الميلاد مات أحد أعضاء هذه الجمعيات وإسمه هيباسوس(٥) غرقاً فى حمامه بسبب إعطائه حقائق رياضية بلا مقابل . فقد أعلن على الملأ أنه أضاف مجسما منتظما ذا إثنى عشر وجها إلى القائمة المعروفة . وهناك من الأسباب القوية ما يدعو إلى الإعتقاد بأن ترتيب مبادىء هندسة إقليدس (٦) قد أخذ شكلا يؤدى إلى الرأى الآتى . عندما تسامح الفيثاغوريون فى طقوسهم السرية حتى أمكن كتابة الكتب ، فإن الهندسة ودراسة الاعداد كانت قد فقدت ربطها بالحياة ، وقد درس إفلاطون (٧) الهندسة على فيلولوس(٨) الفيثاغورى فنقل بذلك تقاليدهم إلى الأجيال من بعده .

ولو أن فيثاغورس يبدو ممن يحبون أن يشركوا الغير فيما يعرفون ، فإن ما حدث لمذهبه كان نتيجة طبيعية لتعاليمه . فقد رحل رجال أمثال طاليس وديموقريتس إلى

---

(١) Democritus — (٢) Pthagoras — (٣) Thales
(٤) Theond — (٥) Hippasus — (٦) Euclid
(٧) Plato — (٨) Philolaus

مصر حيث رأوا ماذا يفعل الكهنة هناك ، فنبذوا السحر واستخدموا الفنون كما أعرضت روسيا عن الطرق الإقتصادية الأمريكية واستعانت بمهندسيهم . ومن الحقائق المطمئنة فى تاريخ الإنسان ، أننا دائماً نحكم العقل إزاء خرافات الغير ، فاليهود يتهمون بحب الدنيا إذا وجدوا وسط المسيحيين وقلما يوجد غير أناس قلائل لهم من العزم والمقدرة ما يمكنهم من مراجعة أنفسهم وإنتقاد عقائدهم الخاصة ، ويصح هذا الأمر على الإغريق كما يصح على غيرهم فتجار مدن الولايات منهم سعوا نحو إمتلاك الضياع والعبيد ولم يتجاوزوا فكريا درجة الإعتقاد فى الخرافة الاجتماعية ، فقد ورثوا معرفة الفينيقيين بالأعداد والتى يبدوا أنها جمعت معها كمية كبيرة من ترهات خرافية عن طرق القوافل الشرقية . وكانت هذه المعرفة غير مألوفة لدى سكان المدن الذين كانوا وهم فى رخاء يتلهفون إلى تغيير يتميز به كل مجتمع سريع التطور .

ولقد كان مستمعوا فيثاغورس يطلبون الحجج فيمنحهم الحلى والجيد منها ، فكان ذلك أول خطوة نحو طقوس الصلاة الغربية التى كان يقيمها تلاميذ فيثاغورس للأعداد السحرية . ومن أمثلة ذلك ترتيلهم للعدد أربعة : « باركنا أيها العدد السماوى الذى خلق الآلهة والناس ، أنت أيها الرباعى المقدس ، الذى يضم أصل ومنبع هذا الخلق المتدفق إلى الأبد » .

ونضرب مثلا : لتعاليم فيثاغورس المثالية التى جذبت حوله عدداً كبيراً من التلاميذ ، بما كان يضفيه من صفات خلقية على الأرقام والأعداد [فكان العدد واحد لا يعتبر مجرد عدد فى ذاته بل هو مصدر كل الأعداد . فاتخذ دليلا على التعقل ، وأما العدد ٢ فكان يدل على الرأى والعدد أربعة على العدل والعدد خمسة على الزواج لأنه يتكون بجمع أول عدد مذكر وهو ثلاثة وأول عدد مؤنث وهو اثنان . وكان يظن أن أسرار الألوان تعرف من صفات العدد خمسة والبرودة من صفات العدد ستة ، وسر الصحة فى العدد سبعة وسر الحب فى العدد ثمانية الذى يتكون بإضافة ثلاثة (القدرة) إلى خمسة (الزواج) . أما سر الأرض فكان يستقر فى الجسم ذى الأوجه الستة وسر النار فى الهرم (الذى عرف فيما بعد عند الرواقيين بالضوء الذى ينير لكل إنسان) وسر السماوات فى الجسم ذى الإثنى عشر وجها ، وكانت الكرة أكمل شكل وقد افترض أن الأبعاد بين النجوم تكون متسلسلة توافقية من الأعداد مثل أطوال أوتار الآلات الموسيقية القديمة التى تصدر عنها النغمات الموسيقية المتوافقة وهكذا نشأت عبارة « موسيقى السماوات » ، وجعلوا الأعداد من

ذكور وإناث فئات ، منها البهى الكريم والكئيب المتضجر ، فهناك الأعداد التامة وهى التى تقبل القسمة على أعداد صحية يكون مجموعها مساويا للعدد التام نفسه . وأول هذه الأعداد التامة العدد ستة الذى عوامله هى ١ ، ٢ ، ٣ (١ + ٢ + ٣ = ٦) وثانيها هو العدد ٢٨ وعوامله هى ١ ، ٢ ، ٤ ، ٧ ، ١٤ (١ + ٢ + ٤ + ٧ + ١٤ = ٢٨) ، ولقد أمضى نيكوماخوس(١) الأسكندرى ، المنتمى إلى المدرسة الفيثاغورية الحديثة ، وقتا طويلا فى البحث عن العددين التامين التاليين وهما ٤٩٦ ، ٨١٢٨ وقد بذل نيكوماخوس جهداً كبيراً فى الوصول إلى العدد التام التالى وهو ٣٣,٥٥٠,٣٣٦ فلم ينجح فقال « إن الأعداد الجميلة الطيبة نادرة الوجود وهى قلة أما الأعداد القبيحة الرديئة فكثيرة جداً » . وهناك أيضا الأعداد المتحابة .

وقد سئل فيثاغورس ذات يوم عن ماهو الصديق فأجاب «صديقك من كان صورة منك مثل العددين ٢٢٠ ، ٢٨٤ » وتفسير ذلك أن الأعداد التى يقبل العدد ٢٨٤ القسمة عليها وهى ١ ، ٢ ، ٤ ، ٧١ ، ١٤٢ مجموعها ٢٢٠ وفى الوقت نفسه الأعداد التى يقبل القسمة عليها العدد ٢٢٠ وهى ١ ، ٢ ، ٤ ، ٥ ، ١٠ ، ١١ ، ٢٠ ، ٢٢ ، ٤٤ ، ٥٥ مجموعها ٢٨٤ . وقد يكون من باب التسلية لك ، كما فعل مستمعو فيثاغورس ، أن تحاول العثور على غيرها . وكذلك هناك الأعداد المثلثة (شكل ٧٦) وهى نوع من الأعداد كانت تعتبر بشيراً بالخير ، وبعد مضى عدة قرون تبين أن هذه الأعداد ذات فائدة وسنرى ذلك فيما بعد . ويتكون كل عدد من هذه الأعداد بإضافة عدد جديد إلى ما سبقه من أعداد مثلثة . فمثلا الأربعة أعداد المثلثة البسيطة الأولى هى ١ ، ٣ = (١ + ٢) ، ٦ = (١ + ٢ + ٣) ، ١٠ = (١ + ٢ + ٣ + ٤) . وفيما يلى رواية عن هذه الأعداد تدل على أن الرياضيات لم تعد فى ذلك الوقت أداة صالحة للاستعمال لدى تجار وصناع الأغريق كما كانت المعرفة فى رأى طاليس : جاء فى محاورة لوسيان(٢) أن تاجراً سأل فيثاغورس عما يمكنه أن يعلمه إياه . فأجاب فيثاغورس « سأعلمك كيف تعد » فأجابه التاجر « إنى أعرف ذلك من قبل » . فسأله الفيلسوف « كيف تعد ؟ » فبدأ التاجر قائلا : « واحد . اثنان . ثلاثة . . . . » فقاطعه فيثاغورس قائلا « قف ! ما تعتبره أربعة هو عشرة أو مثلث كامل وهذا هو رمزنا » .

---

(١) Nichomachus

(٢) Lucian

ويمكن تتبع نشأة عبارة الأرقام السحرية هذه منذ قديم الأزل ، مقترنة بطرق التجارة البرية التى كانت متفرعة من مهد الحضارة السومارية القديمة . فالهنود والعبريون كانت لهم أعدادهم التامة والمتحابة قبل عهد فيثاغورس ، والأيام الستة التى فيها خلق الكون وكذلك الثمانية والعشرين يوما التى تكون الشهر القمرى إن هى إلا دلالة على كمال التقدير الآلهى ، وقد عرف القديس سان أوجستين (١) أن الحيثيين كانوا يفضلون الأعداد التامة بدليل قوله « الله خلق الأشياء جميعها فى ستة أيام لأن هذا العدد التام » .

وقد أمكن منذ عهد بعيد تبين أثر الشرق فى تعاليم فيثاغورس ، بالنظر فى مذهبه عن تناسخ الأرواح ، بمعنى أن كل روح تستطيع التنقل من جسد إلى آخر . وهناك الأسباب ما يدعو إلى الظن بأن بعض هندسة فيثاغورس ومعها الخدع العددية أتت من مصادر صينية فى تاريخ سابق . فالمعرفة الشعبية للأعداد عند قدماء الصينيين تكشف لنا عن البداية السحرية الأولى للغة الكم التى تكون أصول علم الإحصاء الحديث . ولنعود الآن إلى الوراء خمس قرون أو أكثر لنرى كيف بدأ الناس التعرف على صفات الأعداد .

إن الطابع الذى يمتاز به علم الأعداد عند قدماء الصينيين هو أن الأعداد يمكن تمثيلها بأشكال من خطوط أودوائر أو نقط . وهذه الخاصية تلقى ضوءا على الطريقة التى تمكن بها الهنود من الاستعاضة عن أشكال العدد القديمة برموز معقولة وهذه مسألة ذات أهمية فى موضوعنا لأنها تساعدنا فى شرح بداية « المتسلسلات » وهى فرع هام من فروع علم الرياضة البحتة ، وقد مثلت الأعداد الثمانية الأولى فى الكتاب الصينى عن التباديل ، الذى كتب قبل فيثاغوس بما يقرب من خمسة قرون ، بمجموعات من الخطوط الأفقية المتصلة أو المتقطعة للدلالة على مبدأ التذكير (—) للأعداد الفردية ومبدأ التأنيث (— —) للأعداد الزوجية . وكان كل عدد يحوى سر شيء ما مثل السماء والأرض والنار (ثلاثة بطبيعة الحال) والماء والهواء والريح والجبل .

ولقد عادت هذه الخطوط الأفقية إلى الظهور بعد ذلك فى طريقة الرمز للإعداد بعيدان الكبريت والتى أوحت بالطريقة الهندية لكتابة الأعداد (= أصبحت 2

(١) St. Augustine

٦ ≡ أصبحت 3) . وكتب التقويم فى حضارة المايا ، وهو اللغة العددية الوحيدة التى بنيت على نفس الأساس الذى استعمل فى الطريقة الهندية ، باستخدام الخطوط الأفقية الموضوعة بعضها فوق بعض . وهناك طريقة أخرى لكتابة الأعداد وذلك بتمثيلها بنماذج من النقط والدوائر (الدوائر البيضاء تمثل الأعداد المذكرة والسوداء تمثل الأعداد المؤنثة) . وهذه الطريقة أكثر دلالة فى موضوعنا هذا وقد استخدمت فى أول مربع سحرى عرفه التاريخ . فالمربع السحرى الوارد فى (شكل ٧١) يرجع

٢	٩	٤
٧	٥	٣
٦	١	٨

المربع السحرى الأول
بطريقتنا للكتابة

	٩	
٧	٥	٣
	١	

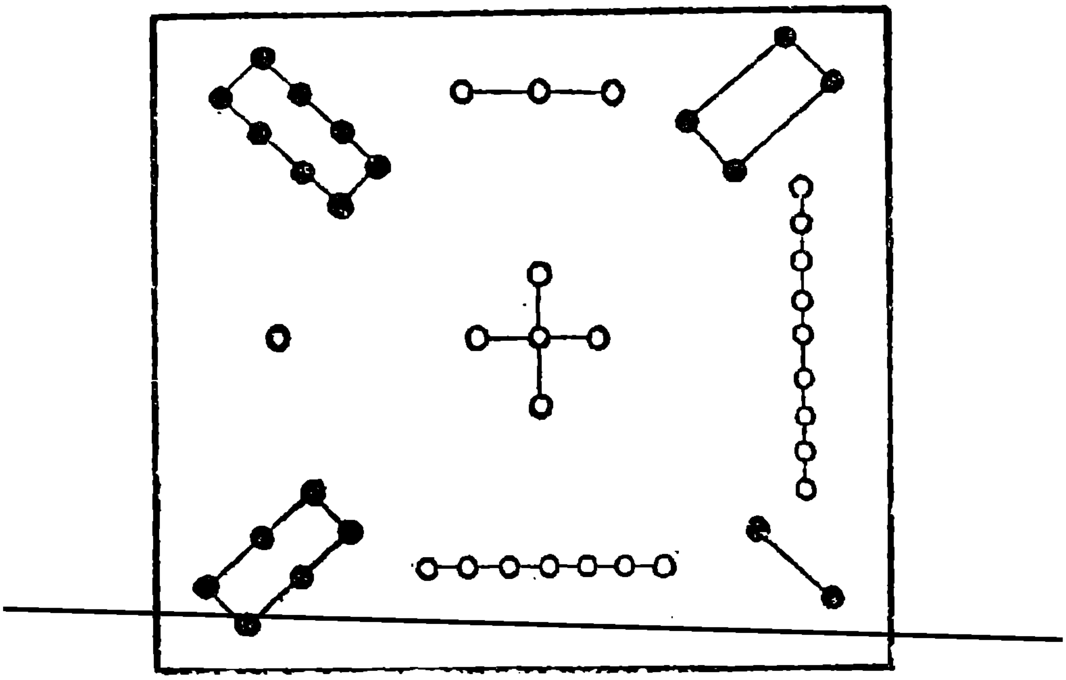
التعبير الرمزى
لاسم الله (يهوه)

شكل (٧١)

تاريخه إلى ألف عام قبل الميلاد على الأقل ولما كان هذا المربع موجوداً فعلا فى الأصل الصينى القديم فانه ولابد أن يكون مطابقا (للشكل ٧٢) حيث مثلت الأعداد الفردية أو المذكرة بدوائر بيضاء والأعداد الزوجية أو المؤنثة بدوائر سوداء .

- ولقد انتشر الإعتقاد فى المربع السحرى فى جميع أنحاء العالم القديم وربما كان لشيوعه بعد ذلك عدة علاقة بالسحر الذى يسمى « جيمتريا gematria » . وهذا بلا شك هو أساس صليب اليهود القرائيين الذى ظهر بعد ذلك. وهذا الصليب مكون من العمود الأوسط والصف الأوسط من المربع المبين فى (شكل ٧١) . وجيمتريا هو الاسم الذى يطلق على الخرافات الغير المألوفة التى نشأت مع استعمال الحروف الأبجدية للدلالة على الأعداد عند العبريين والإغريق . فى ذلك الوقت حين بدأ الناس يتعلمون استخدام الرموز للدلالة على الأعداد ، وجدوا أنفسهم فى حيرة وارتباك عند محاولتهم الأولى لاختراع رموز تشغل مساحة أصغر من التى تشغلها الرموز الهيروغليفية القديمة . ولما كان كل حرف يمثل عدداً فإن كل كلمة كانت ترمز لعدد خاص مكون من جمع الأعداد التى يمثلها كل حرف على التبادل . وكان يفسر وجود عدد

واحد لكلمتين بأنه نذير شرمستطير . ومثال ذلك ما كان يقال من أن تفوق أخيل(١) على هكتور(٢) إنما يرجع إلى أن كلمة أخيل تدل على العدد ١,٢٧٦ أما كلمة هكتور فيقابلها ١,٢٢٥ فقط . وكلمة آزر بالعبرية يقابلها العدد ٣١٨ والأقصوصة العبرية تشير إلى أن ابراهيم عليه السلام طارد ٣١٨ عبداً عندما أنقذ أبيه آزر . وفى كتب التنجيم التى كتبها المتصوفون والمنجمون فى العصور الوسطى نرى كيف ربط السحر المسمى جيمتريا بين النجوم والكواكب والتنبؤ بالشر .



شكل (٧٢)
هذا الشكل ، الذى يمثل أول مربع سحرى عرف بالتاريخ ، أنشأ لأول مرة نحو عام ١٠٠٠ قبل الميلاد

وقد ورد فى كتاب «ويك إند» "Week-End" مثل لاتينى يرى أسفل شكل ٧٣ وهو يوضح حالة مماثلة .

– أما عدد أفلاطون وهو العدد الغامض الذى كان يعتقد بأنه « المتحكم فى سعد الطالع ونحسه » فكان سببا فى أن الأفلاطونيين بذلوا مجهوداً عقليا فى غير ذى فائدة . وكذلك أعطى عدد الحيوان فى سفر الرؤيا (عن الإنجيل) فرصة طيبة للبحاثة الذين

(١) Achilles (٢) Hector

أتوا بعد ذلك لمعالجة هذا الفرع من علم الحساب ، كما أتاح سفر دانيال مثل هذه الفرصة ، هذا السفر الذى كرس له نيوتن مجهوداته العقلية فى سنواته الأخيرة . وقد كتب بيتر بانجس(١) عالم اللاهوت الكاثوليكى كتابا فى ربعمائة صفحة كى يبين أن عدد الحيوان ٦٦٦ هو رمز سرى يدل على أم مارتن لوثر(٢) وهذا بدوره رد على ذلك بأن هذا العدد الغامض إن هو إلا نبوءة لمدة الحكم البابوى الذى يقترب من نهايته المحتومة . والبروتستانت الذين تعهدوا علم الحساب التجارى الجديد كانوا أحسن من غيرهم فى مثل هذا النوع من الدعاية . فمثلا شتيفل(٣) ، أحد الذين تحولوا إلى مذهب لوثر وأول رياضى أوربى استعمل العلامات + ، − ، $\sqrt{\ }$ فى كتابه عن الجبر أرجع سبب تحوله إلى اكتشافه أن العدد ٦٦٦ يشير إلى البابا ليو العاشر(٤) إذن LEO X هى LEO DECIMVS ولما كان برهان شتيفل من السهولة بمكان فإنه جدير بالذكر هنا . رأى شتيفل أن E, O, S لاتدل على اعداد فى الكتابة الرومانية ولذا لايلتفت إليها، أما الحروف الدالة على أعداد فيمكن ترتيبها بسهولة على

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

Sator arepo tenet opera rotas

شكل (٧٣)

المربع الكلامى للعبارة اللاتينية المذكورة تحت الرسم التى تعنى « أريبو الزارع يعطل العجلات بأعماله »

(١) Peter Bungus
(٢) Martin Luther
(٣) Stifel
(٤) Leo X

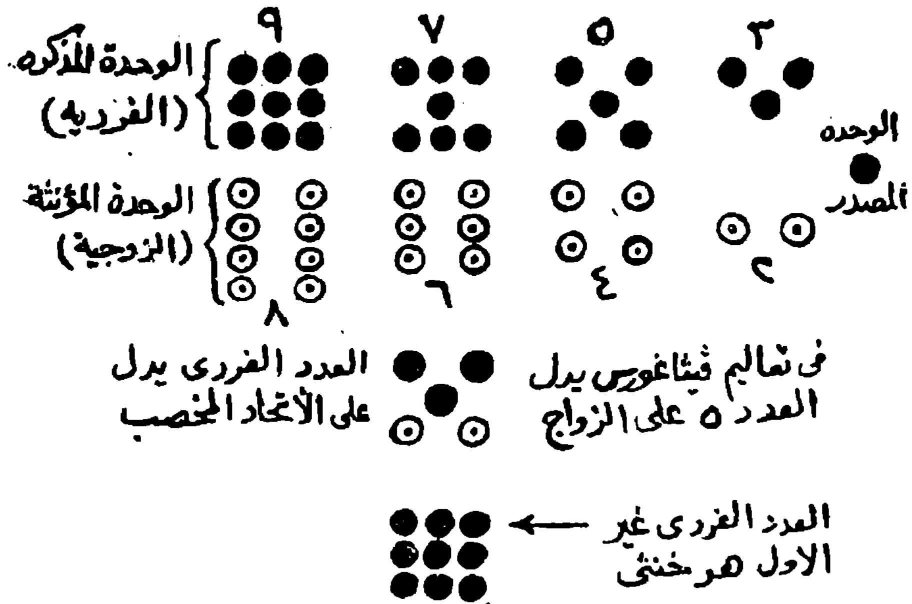
الصورة MDCLVI أى ١,٦٥٦ وهـذا هو ٩٩٠ + ٦٦٦ ثم قال شتيفل أنه من العدل أن نضيف X المرادفة لكتابة كلمة DECIMVS وبذلك نحصل على ٦٦٦ + ١٠٠٠ والحرف اللاتينى الدال على ١٠٠٠ هو M وهو الحرف الأول فى كلمة "Mysterium" وهذا يشير إلى غموض عـدد الحيوان الموجود فى سفر الرؤيا. ولا تأخذنا الدهشـــة حين نقرأ فى صحف أيام الآحد الأحاديث التى يدلى بها كبار الرياضيين المعاصرين عندما نذكر أن نابير[1] المشهور الآن بلوغاريتماته علق أهمية كبيرة على طريقة تدليله على أن البابا ضد المسيح .

– إن التفرقة بين الأعداد الفردية والزوجية عند الصينيين بإعتبار أن الأولى منها مذكرة والثانية مؤنثة ، لتذكرنا بإتتفال الرجل البدائى بخصوبة الأرض وبالماشية وكذلك بأفراد عصبيته ، والإعتقاد فى روحانية الأعداد له مايقابله تماما فى الحديث العادى ، فعندما نهزىء بالرجل الإنجليزى المستهتر الذى يخلط على الدوام بين العفة وغير العفة نرى من العـــدل أن نقر بوجود عذر مقبول له ، فلو حاول انجليزى أن يتعلم لغة حية لاختار الفرنسية ، تلك اللغة التى لكل اسم فيها صفه التذكير أو التأنيث بخلاف اللغـــة الإنجليزية الغريبة التى أهملت مبدأ التذكير والتأنيث فى قواعدها النحوية . وقد كانت معالجة الأعداد فى الكتب الصينية القديمة عن الرياضة، معالجة روحانية (شكل ٧٤) تبدو كأنها تميز فئة خاصة من الأعداد الفردية المسماة الآن بالأعداد الأولية. ولما كان العدد الأولى هو الذى لايمكن أن يساوى عدداً صحيحاً من المرات من عدد صحيح آخر ، لذا لايمكن تمثيله (شكل ٧٤) بشكل مكون من صفوف متماثلة من النقط أو الدوائر ، ومن أمثلة هذا النوع من الأعداد ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، أما الأعداد الفردية ٩ ، ١٥ ، ٢١ ، ٢٥ فهى ليست أعـــداد أولية . ولم تكن معرفة هذا النوع من الأعداد اكتشافا هاما غير أنها ســـاعدت لدرجة ما على تبسيط طريقة استخراج الجذور التربيعية وذلك قبل اكتشاف الطرق الحديثة .

والطريقة الآتية تبين لنا كيف نحصل على الأعداد الأولية المحصورة بين ١ ، ١٠٠

---

(١) Napier



شكل (٧٤)

نترك جميع الأعداد الزوجية (التى تقبل القسمة على ٢) وجميع الأعداد التى تنتهى بالعدد ٥ أو صفر (لأنها تقبل القسمة على خمسة) مع استثناء العددين ٢ ، ٥ . ويتبقى الآن :

١	٢	٣	٥	٧	٩	١١	١٣	١٧	١٩
٢١	٢٣	٢٧	٢٩	٣١	٣٣	٢٧	٣٩		
٤١	٤٣	٤٧	٤٩	٥١	٥٣	٥٧	٥٩		
٦١	٦٣	٦٧	٦٩	٧١	٧٣	٧٧	٧٩		
٨١	٨٣	٨٧	٨٩	٩١	٩٣	٩٧	٩٩		

وبعد ذلك نحذف جميع الأعداد التى تقبل القسمة على ٣ ، ٧ (ماعدا ٣ ، ٧) فيتبقى .

١	٢	٣	٥	٧	١١	١٣	١٧	١٩
٢٣	٢٩	٣١	٣٧	٤١	٤٣	٤٧		
٥٣	٥٩	٦١	٦٧	٧١	٧٣	٧٩		
٨٣	٨٩	٩٧						

ونلاحظ أننا حذفنا جميع الأعداد التى تقبل القسمة على ٩ لأنها قابلة للقسمة على ٣

وكذلك الأعداد التى تقبل القسمة على ٦ ، ٨ ، ١٠ لأنها قابلة للقسمة على ٢ . أما أى عدد يقبل القسمه على ١١ أو على أى عدد أكبر فهو ولابد أن يقبل القسمة على عدد ما من الأعداد العشرة الأولى وإلا كان هذا العدد أكبر من ١٠٠ ، وبذلك تكون الأعداد الباقية هى الأعداد الأولية المطلوبة .

أما استخدام الأعداد الأولية فى إيجاد الجذور التربيعية فهو يتوقف على قاعدة هامة نصادفها على الدوام وتوضحها الأمثلة الآتية :

$$\sqrt{٤ \times ٩} = \sqrt{٣٦} = ٦ = ٢ \times ٣ = \sqrt{٤} \times \sqrt{٩}$$

$$\sqrt{٤ \times ١٦} = \sqrt{٦٤} = ٨ = ٢ \times ٤ = \sqrt{٤} \times \sqrt{١٦}$$

$$\sqrt{٤ \times ٢٥} = \sqrt{١٠٠} = ١٠ = ٢ \times ٥ = \sqrt{٤} \times \sqrt{٢٥}$$

$$\sqrt{٩ \times ١٦} = \sqrt{١٤٤} = ١٢ = ٣ \times ٤ = \sqrt{٩} \times \sqrt{١٦}$$

$$\sqrt{٤ \times ٤٩} = \sqrt{١٩٦} = ١٤ = ٢ \times ٧ = \sqrt{٤} \times \sqrt{٤٩}$$

$$\sqrt{٩ \times ٢٥} = \sqrt{٢٢٥} = ١٥ = ٣ \times ٥ = \sqrt{٩} \times \sqrt{٢٥}$$

$$\sqrt{٩ \times ٤٩} = \sqrt{٤٤١} = ٢١ = ٣ \times ٧ = \sqrt{٩} \times \sqrt{٤٩}$$

من هذه الأمثلة تتضح القاعدة الآتية :

$$\sqrt{ا\,ب} = \sqrt{ا} \times \sqrt{ب}$$

أى أن :

$$\sqrt{٦} = \sqrt{٢} \times \sqrt{٣}$$

$$\sqrt{٨} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٢} = ٢\sqrt{٢}$$

$$\sqrt{١٢} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$$

$$\sqrt{١٨} = \sqrt{٩} \times \sqrt{٢} = ٣\sqrt{٢}$$

$$\sqrt{٢٤} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٦} = ٢\sqrt{٢}\,\sqrt{٣}$$

إذن متى علمت قيمة كل من $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ أمكن حساب الجذر التربيعى لأى عدد مكون من حاصل ضرب مضاعف من مضاعفات اثنين فى مضاعف من

مضاعفات ثلاثة/ ومثال ذلك الأعداد ٣٢ ، ٤٨ ، ٧٢ ، ٩٦ . وكذلك بمعرفة قيمة $\sqrt{٥}$ يمكن الحصول على الجذور التربيعية لجميع الأعداد المكونة من حاصل ضرب مضاعفات خمسة وثلاثة واثنين كالأعداد ١٠ ، ١٥ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٤٥ ، ٥٠ ، ٦٠ . ويمكنك أن تحقق صحة ما سبق كما يأتي :

إذا كان $\sqrt{٢} = ١,٤١٤$ ، $\sqrt{٣} = ١,٧٣٢$ فإن $\sqrt{٦}$

$$= ١,٤١٤ \times ١,٧٣٢ = ٢,٩٤٩$$

صحيحاً لثلاثة أرقام عشرية . وبإجراء عمليات الضرب الآتية نحصل على

١,٤١٤	١,٧٣٢	٢,٤٤٩
١,٤١٤	١,٧٣٢	٢,٤٤٩
١,٤١٤	١,٧٣٢	٤,٨٩٨
٠,٥٦٥٦	١,٢١٢٤	٠,٩٧٩٦
٠,٠١٤١٤	٠,٠٥١٩٦	٠,٠٩٧٩٦
٠,٠٠٥٦٥٦	٠,٠٠٣٤٦٤	٠,٠٢٢٠٤١
١,٩٩٩٣٩٦	٢,٩٩٩٨٢٤	٥,٩٩٧٦٥١

يتضح لنا مما سبق أن الخطأ في حاصل الضرب الأخير أكبر من الخطأ في حاصلي الضرب الأولين . وهذا هو ما يجب أن نتوقعه لأننا أخذنا فقط نتيجة ضرب $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ الصحيحين لثلاثة أرقام عشرية وضربنا الأخطاء في القيم المعطاة لها . وعلى ذلك يكون الخطأ في حاصل الضرب أقل من واحد في ألفين (٠,٠٠٢٤ في ٦) .

ونود أن نلفت نظر القارئ إلى أننا نستخدم القاعدة السابقة في الأبواب التالية، كما أنها صحيحة عندما تطبق على الكسور بمعنى أن

$$\sqrt{\frac{١}{ب}} = \sqrt{١ \times \frac{١}{ب}} = \sqrt{١} \times \sqrt{\frac{١}{ب}} = \frac{\sqrt{١}}{\sqrt{ب}}$$

فمثلا $\sqrt{\frac{٣}{٤}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

وكذلك $\frac{٣}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣} \cdot \sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \sqrt{٣}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

وسنرى فيما بعد أهمية هذه القاعدة فى الحصول على قيمة ط وذلك عندما تصادفنا عبارات كالعبارة الآتية :

$$\sqrt{١ - \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢}} = \sqrt{١ - \frac{٢^{٢}}{٣^{٢}}} = \sqrt{\frac{٣^{٢} - ٢^{٢}}{٣^{٢}}} = \frac{١}{٣}\sqrt{٣^{٢} - ٢^{٢}} = \frac{\sqrt{٥}}{٣}$$

إن الإعتقاد الروحانى بأن العدد الحقيقى لابد وأن يكون له صفة التذكير أو التأنيث كما للغنم أو البقر ، يذكرنا ببرهان لإقليدس (ربما كان هذا البرهان مأخوذاً عن فيثاغورس) فى كتابه العاشر عن « مبادىء هندسة » لكى يثبت أن قطر المربع الذى طول ضلعه عددا صحيحاً ، لا يمكن أن يكون طوله عدداً صحيحاً ولكى نتبع ذلك البرهان يلزمك أن تتذكر الفروض الثلاث الآتية :

ا — مربعات الأعداد الزوجية هى أعداد زوجية (مثل $٦^{٢} = ٣٦$) ومربعات الأعداد الفردية هى أعداد فردية (مثل $٧^{٢} = ٤٩$) .

ب — ضعف أى عدد هو عدد زوجى (مثل $٢ \times ٥ = ١٠$) كما أن أى عدد زوجى ضعف عدد صحيح آخر ($٢ = ٢ \times ١$ ، $٤ = ٢ \times ٢$) .

حـ — أى عددين زوجيين بينهما عامل مشترك وهو ٢ ، وعلى ذلك أى عددين ليس بينهما عامل مشترك غير الواحد ، مثل بسط ومقام كسر فى أبسط صورة ، لا يمكن أن يكون كلاهما زوجيا فلو كان أحدهما زوجيا كان الآخر فرديا .

فإذا بدأنا بهذه الفروض واعتبرنا أن أى كسر فى أبسط صورة هو النسبة بين عدد فردى وآخر زوجى أو بين عددين فرديين فإن برهان إقليدس يكون كالآتى :

نفرض أنه لدينا مربعاً طول ضلعه الوحدة . إذن حسب القضية الثانية من كتاب إقليدس فى الهندسة ينتج أن :

$$١^٢ + ١^٢ = ٢$$

أى أن طول القطر = $\sqrt{٢}$ = كسراً أكبر من الواحد وأقل من اثنين

نفرض أن هذا الكسر هو $\frac{ا}{ب}$ حيث لا يوجد أى عامل مشترك بين ا ، ب .

إذن $\frac{ا}{ب} = \sqrt{٢}$

$$\frac{ا^٢}{ب^٢} = ٢$$

$$ا^٢ = ٢ب^٢ \quad \text{.................................... (١)}$$

وبما أن $ا^٢$ هى ضعف عدد صحيح آخر ، إذن فهى عدد زوجى وعلى ذلك ا عدد زوجى . لكن $\sqrt{٢}$ كسر فى أبسط صورة ، إذن لابد من أن يكون ب عدداً فرديا . أيضا ا عدد زوجى ، فهو يساوى ضعف عدد صحيح آخر وليكن ﻫ مثلا ، أى أن

$$ا = ٢ﻫ$$

$$ا^٢ = (٢ﻫ)^٢ = ٤ﻫ^٢ \quad \text{.................................... (٢)}$$

ولكن من (١) ، (٢) نجد أن

$$٤ﻫ^٢ = ٢ب^٢$$

أى أن $٢ﻫ^٢ = ب^٢$

إذن ب عدد زوجى . لكن حسب الفرض ب عدد فردى ، إذن لا بد من وجود خطأ ما فى البرهان ، بمعنى أننا افترضنا فرضا غير صحيح . فاذا أخذنا برأى الفيثاغوريين وهو أن جميع الأعداد إما مؤنثة وإما مذكرة لاستنتجنا أن $\sqrt{٢}$ ليس بعدد على الإطلاق ولذلك نفقد الأمل فى جعل الهندسة ذات فائدة ونستبعد منها العدد والقياس

إن إتباع أفلاطون ، من ذوى اليسار الذين دأبوا على السخرية بالمدرسين الذين يرتزقون من التدريس ، فتحوا بابا واسعا للجدل بهذا الحوار البارع ولكن هذا

الحوار لن يزعجنا بقدر ما ثر على الأفلاطونيين ، كما أنه لن يجبرنا على اعتبار الهندسة غير ذات فائدة وإن هى إلا مضيعة للوقت كما فعل أفلاطون . فلكى نكون مواطنين صالحين يلزمنا أن نهتم بالعمل العقلى النافع الذى يرشدنا إلى الوسيلة لفعل الأشياء . هذا بينما تعنى الثقافة الشكلية باظهار المستحيل ، ولسوف تلاحظ أن إقليدس أو على الأرجح إيدوقس (١) هو صاحب الفرض ، البدائى ، بأن ضلع المربع يمكن تمثيله بالأعداد الصحيحة التى تناظر حبات الخرز فى لوحة العد ولكننا قد وصلنا فى النهاية إلى أن الأعداد الصحيحة التى تناظر حبات الخرز تصلح تماما لعد الأغنام التى فى كل عين فى الحظيرة ولكنها ليست بالأعداد المناسبة لتمثيل مقاييس الحائط أو لقياس أضلاع نموذج مخطط على الرمل أو مرسوم بالحبر على الورق وذلك باستخدام المسطرة والفرجار (شكل ٧٥) .

ولقد بدأت المشكلة لأن أتباع فيثاغورس صوروا الخط المستقيم بصف من النقط المتقاربة جداً كما يبدو عمود من حبات الخرز فى لوحة العد وعلى ذلك اعتبروا أن أى شكل مكون من مجموعة من مثل هذه الخطوط المرصوصة بالعرض بالقرب من بعضها ولكن النموذج المادى لم يكن تاما لأن النقطة عند فيثاغورس لم تكن ذات شكل يمكن بحثه .

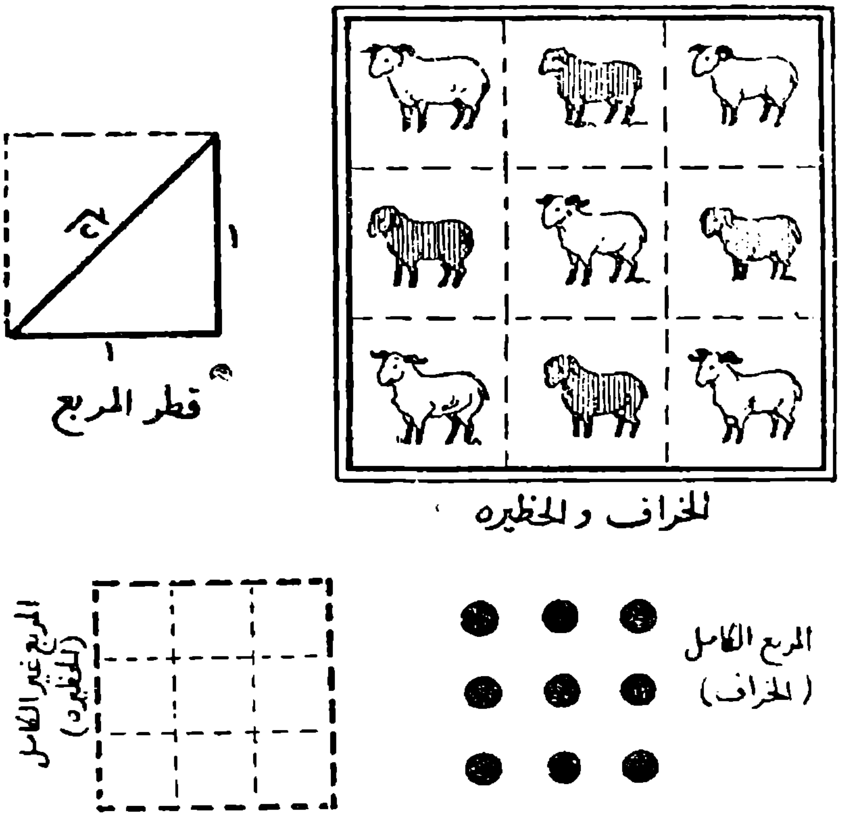
ولكى نطابق الأجسام المادية على بعضها يجب أن تكون هذه الأجسام ذات شكل خاص . فمثلا يمكننا عمل مثلث قائم الزاوية بترتيب أكبر عدد ممكن من المثلثات القائمة الزاوية المتشابهة مع بعضها . كما يمكننا عمل مستطيل بإحدى الطريقتين الآتيتين : نرتب ترتيبا مناسبا عددا كبيراً من المستطيلات الصغيرة ، النسبة بين أضلاعها واحدة أو نرتب مثلثات قائمة الزوايا تشابه المثلثين الناشئين من قسمة القطر للمستطيل الأصلى . فاذا ما تم تكوين المستطيل بإحدى هاتين الطريقتين فإننا نرى أن أى مستطيل من المستطيلات المكونة يكون فيه النسبة بين القطر وأضلاعه كالنسبة بين قطر وأضلاع المستطيل المتكون . كما أن العدد الحقيقى لأقطار المستطيلات المكونة يساوى عدد الأضلاع المتماثلة لهذه المستطيلات غير أن هذا العدد ليست له أية علاقة بالنسبة بين قطر وضلع أى مستطيل منها . أما نقاد فيثاغورس الماديين أمثال ليوكيبس (٢) وديموقريطس فلم يعرضوا أنفسهم لمثل هذه الصعوبات ، إذ لكى

(١) Eudoxus

(٢) Leucippus

يمثلوا الفضاء بمجموعة من ذرات منفصلة ، كانوا يرون أنه يجب أن يكون هناك فراغ بين هذه الذرات وبما أنه لا يمكن عمل أى شكل بوضع الذرات على أبعاد متساوية من بعضها ، فن عدد الذرات فى اتجاهات مختلفة يشير إلى اختلاف المقاييس فى هذه الاتجاهات .

وقد كان للمعضلة التى نشأت عن الخلط بين ما سميناه أعداد القطيع وأعداد الحقل نتيجة ممتعة ، اذ كان أتباع فيثاغورس يلهون بعمل مجموعة من الأشكال المكونة



شكل (٧٥)

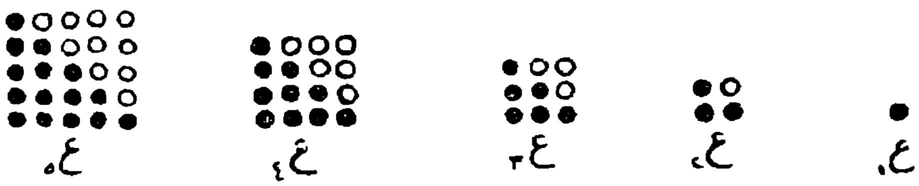
من نقط منفصلة كالمربع السحرى الصينى مثلا ، وكانت أعداد النقط فى مثل هذه الأشكال ترتب فى مجموعات وأدت دراسة تماثل المجموعات المكونة لهذه الأرقام المصورة ، والتى يظهر بعضها فى شكلى ٧٦ ، ٧٧ . إلى اكتشاف المتسلسلات . وبمضى الزمن أدى ذلك إلى معرفة أن الأعداد المناسبة للدلالة على القياسات هى تلك التى تشبه فى تكوينها المتسلسلات التى تنتهى حيث نشاء وسوف نتكلم عنها فى الباب العاشر .

إن ما يسمى الآن علم الحساب عند الأغريق ، كان معظمه دراسة هذه الأعداد التصويرية ، فلم يبحث فى ابتكار قوانين خاصة للحساب كالتى نعرفها الآن وترك هذه المهمة إلى لوحة العد ، أما فن الحساب الذى لولاه ما كان هناك علوم رياضية حديثة ، فقد كان يزدريه علماء الإغريق فى زمن أفلاطون . ولم تؤد دراسة الأعداد التصويرية



(أ) الأعداد المثلثية البسيطة

١ ، ٣ ، ٦ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢١ ، ٢٨ ، ٣٦ ، . . . الخ



(ب) الأعداد المربعة الكاملة

١ ، ٤ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٣٦ ، ٤٩ ، ٦٤ ، ٨١ ، . . . الخ

ويمكن الحصول على الأعداد المربعة الكاملة بواسطة الجمع هكذا :

	١	٣	٦	١٠	١٥	٢١	٢٨	٣٦	٠٠
١	٣	٦	١٠	١٥	٢٠	٢٨	٣٦	٠٠٠٠٠٠
	٤	٩	١٦	٢٥	٢٦	٤٩	٦٤	٠٠٠٠٠٠

شكل (٧٦)

مباشرة إلى نتائج مفيدة ولكن أهميتها ترجع إلى أنها أدت إلى دراسة التسلسلات ، تلك التى مهدت الطريق إلى المعرفة بالأعداد الناقصة . وسوف نخصص ما تبقى من هذا الفصل لدراسة كيف بدأت المعرفة بالمتسلسلات .

* تعرف المتسلسلة بأنها مجموعة من الأعداد مرتبة ترتيباً خاصاً ، بحيث أن كل حد منها يرتبط بالحد الذى يليه تبعاً لقاعدة خاصة ، والمتسلسلة المكونة من الأعداد

الطبيعية هى أبسط مثال على المتسلسلات ، إذ أنه حين ترتب الأعداد الصحيحة تبعا للترتيب العـــادى ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ... فإننا نرى فى الحال أن كل حد يزيد بمقدار الوحدة عن الحد الذى يسبقه أو ينقص بنفس القدر عن الحد الذى يليه . ويمكن مباشرة بعد ذلك تصور المتسلسلتين التاليتين وهما :

٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ ، ١٥ ، ١٧ ، ١٩ .. .. ..

٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ١٨ .. .. ..

وفى كل منها يزيد كل حد على الذى يسبقه باثنين وينقص عن الحد الذى يليـه بنفس المقدار . تسمى المتسلسلة التى فيها الفرق بين أى حدين متتالين ثابت ، المتسلسلة الحسابية أو المتوالية الحسابية . ومن أمثلة هذا النوع من المتواليات ، المتوالية

٣ ١٠ ١٧ ٢٤ ٣١ ٣٨ ٤٥ ٥٢ .. .. ..

وثمة علاقة من نوع آخر تتمثل فى المتسلسلة :

$\frac{٦}{٢}$ $\frac{٦}{٢٠}$ $\frac{٦}{٢٠٠}$ $\frac{٦}{٢٠٠٠}$ $\frac{٦}{٢٠٠٠٠}$ الخ

إذ أن كل حد منها عشر أمثال الحد الذى يليه أو عشر الحد الذى يسبقه . وهذه هى المتوالية الهندسية . أعنى تلك التى يكون فيها كل حد قدر سابقه عدداً من المرات (أو كسرا منه) سواء كانت الأعداد مرتبة ترتيبا تصاعديا حسب مقاديرها أو ترتيبا تنازلياً كما فى المتسلسلة السابقة ، والمتواليتان الحسابية والهندسية هما نوعان من الأنواع العديدة من المتسلسلات ويمكن ذكر القاعدتين اللتين تربطان حدود كل منها كالآتى :

إذا كان م هو أحد حدود المتسلسلة العددية فإن م + ب هو الحد الذى يليه وكذلك إذا كان م هو أحد حدود المتسلسلة الهندسية فان الحد الذى يليه هو م ب (قدر ب ، م من المرات) . ونلاحظ أن قيمة ب ثابتة فى كل متسلسلة ويمكن أن تكون عدداً صحيحا أو كسراً . فمثلا ب = ٢ ½ فى المتسلسلة الحسابية :

٣ ٥½ ٨ ١٠½ ١٣ ١٥½ ١٨

إن تعريف المتسلسلة سواء كانت حسابية أو هندسية بالطريقة السابقة لا يساعدنا على التمييز بين متسلسلتين يكون فيها ب له نفس القيمة . ومثال ذلك المتسلسلتان الحسابيتان

١ ٥ ٩ ١٣ ١٧ ٢١ ٢٥ ٢٩ .. ..

٣ ٧ ١١ ١٥ ١٩ ٢٣ ٢٧ ٣١ .. ..

والمتسلسلتان الهندسيتان :

,٦ ,٠٦ ,٠٠٦ ,٠٠٠٦ ,٠٠٠٠٦ .. ..

,٧ ,٠٧ ,٠٠٧ ,٠٠٠٧ ,٠٠٠٠٧ .. ..

هناك طريقة أخرى لإيجاد العلاقة التي تربط حدود المتسلسلة وذلك باعتبار أن كل متسلسلة هي نتاج المتسلسلة المكونة من الأعداد الطبيعية (أوحسب النظرية القديمة للأعداد تزاوج الأعداد المذكرة والأعداد المؤنثة) .

فلو سمينا المتسلسلة المكونة من الأعداد العادية بالمتسلسلة الأصلية ، أعني :

المتسلسلة الأصلية (الوالد) ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨

فان متسلسلة الأعداد المؤنثة (البنت) ٢ ٤ ٦ ٨ ١٠ ١٢ ١٤ ١٦

كذلك المتسلسلة الأصلية (الوالد) ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨

متسلسلة الأعداد المذكرة (الولد) ٣ ٥ ٧ ٩ ١١ ١٣ ١٥ ١٧

وفي هذه المجموعة العائلية من الأعداد كل بنت (عدد مؤنث) أقل بسنتين في العمر من أختها التي هي أكبر منها مباشرة وكذلك عمر كل ولد (عدد مذكر) يقل بسنتين عن عمر أخيه الذي يكبره مباشرة أو بمعنى آخر إذا كان م هو مقدار أي حد في إحدى المتسلسلتين فإن (م + ٢) هو الحد الذي يتلوه مباشرة . وهكذا لا يفرق وصفنا الأول للمتسلسلة بين البنين والبنات ، غير أنه يمكننا أن نفعل ذلك بتعيين تواريخ ميلادهم منذ بدأ الزواج القديم الذي كانت تحدث فيه إضافة جديدة إلى العائلة سنويا بانتظام . وبمقارنة متسلسلة الأعداد المؤنثة بالمتسلسلة الأصلية نرى أن كل حد في متسلسلة البنت مساويا ضعف الحد المناظر له في المتسلسلة الأصلية ، فإذا سمينا أي حد في المتسلسلة الأصلية ن فإن الحد المناظر له في متسلسلة البنت هو ٢ن وكذلك أي حد في متسلسلة الإبن يمكن تكوينه بإضافة واحد إلى ضعف الحـــد المقابل له في المتسلسلة الأصلية ، أو بعبارة أخرى الحد النوني هو (٢ن + ١) . فإذا أجريت نفس العملية على المتسلسله .

٧ ٩ ١١ ١٣ ١٥ ١٧ ١٩ .. ..

فإنك تجد أن الحد النونى هو (٥ + ٢ن) . ولقد أدت هذه الطريقة فى وصف المتسلسلات إلى اكتشاف خاصية عجيبة للمتسلسلات الهندسية ، وسنرى فيما بعد كيف أدت هذه الخاصية إلى اكتشاف اللوغاريتمات . وفيما يلى متسلسلة هندسية مكتوبة أسفل متسلسلة الأعداد الطبيعية (المتسلسلة الأصلية)

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	..	..
٢	٤	٨	١٦	٣٢	٦٤	١٢٨	٢٥٦	٥١٢	١٠٢٤	..	..

ويمكن كتابة ما سبق فى الصورة الآتية :

الوالد	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	..	..
النتاج	$٢^{١}$	$٢^{٢}$	$٢^{٣}$	$٢^{٤}$	$٢^{٥}$	$٢^{٦}$	$٢^{٧}$	$٢^{٨}$	$٢^{٩}$	$٢^{١٠}$	..	..

وبنفس الطريقة يمكن كتابة

الوالد	١	٢	٣	٤	٥	٦	..	..
النتاج	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠٠	..	..

فى الصورة

الوالد	١	٢	٣	٤	٥	٦
النتاج	$١٠^{١}$	$١٠^{٢}$	$١٠^{٣}$	$١٠^{٤}$	$١٠^{٥}$	$١٠^{٦}$

ولقد كانت المتسلسلة الهندسية من بين ما درسه الفيثاغوريون ، فلو كانوا قد استعملوا الأعداد فى وصفهم للعالم الواقعى لربما اكتشفوا أساس قاعدة الكسور العشرية الدائرة ولأمكن بذلك لأخيل أن يلحق بالسلحفاة . ولقد حسب الفيثاغوريون مجموع حدود المتسلسلات الهندسية مثل(*) :

٤	١٢	٣٦	١٠٨	٣٢٤	٩٧٢	٢٩١٦

* عندما يستعمل الرياضيون كلمة « مجموع متسلسلة » فإنهم يعنون قانونا بسيطا يوفر عليهم مجهودا مضنيا فى عملية جمع طويلة .

ويمكن كتابة الحدود السبعة الأولى فى هذه المتسلسلة كالآتى :

الوالد	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
النتاج	٤	$٤(٣^{١})$	$٤(٣^{٢})$	$٤(٣^{٣})$	$٤(٣^{٤})$	$٤(٣^{٥})$	$٤(٣^{٦})$

وبوضع الحد الأول فى نهاية المتسلسلة ، فإن مجموعها ح هو:

$$ح = ٤(٣^{١}) + ٤(٣^{٢}) + ٤(٣^{٣}) + ٤(٣^{٤}) + ٤(٣^{٥}) + ٤(٣^{٦}) + ٤$$

أيضا :

$$٣ح = ٤(٣^{١}) + ٤(٣^{٢}) + ٤(٣^{٣}) + ٤(٣^{٤}) + ٤(٣^{٥}) + ٤(٣^{٦}) + ٤(٣^{٧})$$

لكن ضعف مجموع المتسلسلة هو الفـــرق بين ثلاثة أمثال المجموع والمجموع نفسه ، أى أن :

$$٤(٣^{١}) + ٤(٣^{٢}) + ٤(٣^{٣}) + \cdots\cdots\cdots + ٤(٣^{٦}) + ٤(٣^{٧})$$
$$٤(٣^{١}) + ٤(٣^{٢}) + ٤(٣^{٣}) + \cdots\cdots\cdots + ٤(٣^{٦}) + \cdots + ٤$$

$$\text{الفرق} = ٢ح = ٤(٣^{٧}) - ٤$$

إذن مجموع المتسلسلة هو نصف الفرق

$$\text{أى أن } ح = \frac{٤(٣^{٧}) - ١}{٢} = ٤٣٧٢$$

وعلى ذلك باستخدام الطريقة الحديثة للكتابة المختزلة للأعداد ، يمكننا التعبير عن القاعدة المبينة بالمثال السابق كالآتى : إذا رمزنا بالرمز ن إلى عدد حدود المتسلسلة الهندسية وبالرمز ب إلى العدد الذى تضرب فيه حدودها المتتالية وبالرمز ا إلى حدها الأول ، فإن :

$$ح = \frac{ا(ب^{ن} - ١)}{ب - ١}$$

وطريقة جمع المتسلسلة الهندسية هذه ، تماثل تماما طريقة إيجاد الكسر الإعتيادى المكافىء لكسر عشرى دائرى فمثلا

أ, = ١, + ٠١, + ٠٠١, + ٠٠٠١, + ٠٠٠٠١, + ٠٠٠٠٠ وهكذا

وبالمثل

$\frac{1}{10}$ (أ,) = ٠١, + ٠٠١, + ٠٠٠١, + ٠٠٠٠١, + ٠٠٠٠٠ وهكذا

بطرح المتسلسلة الثانية من الأولى ، نحصل على

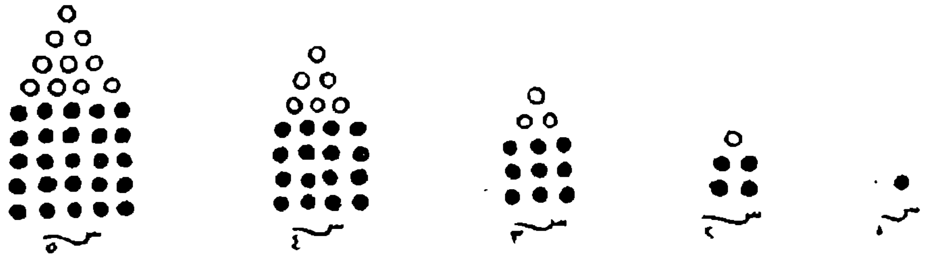
$\frac{9}{10}$ (أ,) = ١,   أى أن   أ, = $\frac{١٠ \times ١,}{٩}$ = $\frac{1}{9}$

لقد سبق أن أشرنا إلى الأعداد المثلثية

٣ ٦ ١٠ ١٥ ٢١ ٢٨ ٣٦ ٤٥ ٥٥ ٤١

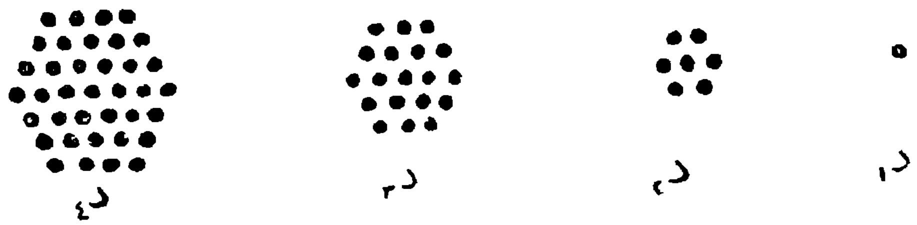
وتمثل هذه الأعداد بأشكال موضحة فى أعلى شكل (٧٦) . وهذه المتسلسة التى نسب إليها الفيثاغوريون خواص سحرية مثل المتسلسلة الهندسية ، لم تؤد إلى نتائج مفيدة على أيديهم . ولو أن الفيثاغوريين كانوا أقل إهتماما بإقامة الصلوات للأعداد التامة ووجهوا عنايتهم نحو إيجاد أعداد تناسب مشاهدات الكائنات الإنسانيه غير المنزهة عن الخطأ . لاكتشفوا الخدعة فى تناقض زينو . ولربما تقدموا أيضاً نحو بداية دراسة رياضية « للإحتمالات » . ولم تظهر أهمية الأعداد المثلثية إلا بعد ذلك بألفين من السنين عندما كان طبقة الأشراف تبدد أموالها على موائد اللعب ، وأغنياء التجار يصونون أرباحهم ويحافظون عليها تمام المحافظة ، ومن المحتمل أنه فى أوائل تاريخ علم الأعداد . كان للأعداد المثلثية دور هام فى إيجاد قواعد لتكوين وجمع حدود المتسلسلات التى تقدمت دراستها فيما بعــد وبالأخص عند الهندوس [ومن الأشياء التى قوت من الحاجة إلى الكتابة المختزلة لقوانين الأعداد أو ماتسميه الآن « الجبر الرمزى »] الولع الشديد بإيجاد مجموع المتسلسلة . وربما كان ما قام به الهندوس لإيجاد قوانين لذلك يدعو إلى الدهشة ، لولا أن الشعوب الشرقية كانت على علم بمفتاح للمسألة كثيراً ما حذف من كتب المبادىء الرياضية الأولية الأصلية .

إنك ترى من شكلى (٧٦) ، (٧٧) أن متسلسلات عديدة متنوعة مثل متسلسلة



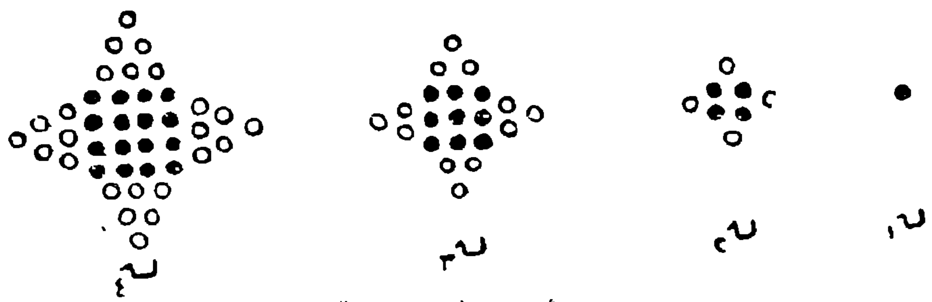
الأعداد الخماسية

١ ، ٥ ، ١٢ ، ٢٢ ، ٣٥ ، ... ألخ



الأعداد السداسية

١ ، ٧ ، ١٩ ، ٣٧ ، ... الخ



الأعداد النجمية

١ ، ٨ ، ٢١ ، ٤٠ ، ... الخ

شكل (٧٧)

الأعداد المثلثية ، يمكن تمثيلها تمثيلا رمزيا . وكما أنه فى هندسة الأغريق يمكن على الدوام تقسيم الاشكال المكونة من خطوط مستقيمة إلى مثلثات . فكذلك الأعداد ذات التمثيل الرمزى يمكن أن تنقسم إلى أعداد مثلثية / وهذا يعنى أنه إذا علمنا

كيفية تكوين متسلسلة الأعداد المثلثية ، فإنه يمكننا بسهولة أن نتعرف على القانون الذى يربط الأعداد فى أية متسلسلة ذات تمثيل رمزى ، ومن السهل أن نرى قانون تكوين الأعداد المثلثية إذا رتبت أسفل الأعداد الطبيعية كالآتى :

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
١	٣	٦	١٠	١٥	٢١	٢٨	٣٦	٤٥	٥٥

نلاحظ أولا أن جميع الحدود ذات الترتيب الفردى تقبل القسمة على العدد المناظر فى المتسلسلة الأصلية . وبكتابة الحدود ذات الترتيب الفردى

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
١ (١)	..	٣ (٢)	..	٥ (٣)	..	٧ (٤)	..	٩ (٥)	..

نرى أن كل حد ذى ترتيب فردى فى متسلسلة الأعداد المثلثية [يتكون من حاصل ضرب المناظر له فى المتسلسلة الأصلية فى نصف الحد الذى يلى الحد المناظر له مباشرة فى المتسلسلة الأصلية] وربما كانت هذه هى طريقة وصف الفيثاغوريين لقانون متسلسلة الأعداد المثلثية لو كانوا قد وصفوه ، أما بطريقتنا المختزلة فيمكن كتابة قانون المتسلسلة كالآتى : إذا كان ن أى حد فى المتسلسلة الاصلية ، فإن الحد المناظر (أو الحد النونى) فى متسلسلة الأعداد المثلثية البسيطة هو

$$\text{م}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}\,(\text{ن} + ١)}{٢}$$

ويمكنك أن ترى بسهولة أن هذا القانون صحيح للحدود ذات الترتيب الزوجى .

وعليه يجب أن يكون الحد الثامن هو $\frac{٨\,(٨ + ١)}{٢} = \frac{٨\,(٩)}{٢} = ٣٦$

لقد استخدمنا لأول مرة فى القانون العام السابق ناحية جديدة للشرح أعنى الوصف الرياضى / ولكى نبين ذلك ، نفرض أن ه يدل على أى عدد مثلثى ، فيكون الرمز ن المكتوب أسفله مباشرة وعلى اليسار يشير إلى أى حد نتحدث عنه ، أعنى الحد المناظر للعدد ن فى المتسلسلة الاصلية (الوالد) أو كما نقول غالباً العدد المثلثى النونى ولو كتبنا $\text{م}_{\text{ن}-١}$ فإن ذلك يعنى العدد المثلثى الذى ترتيبه (ن — ١) أو بمعنى آخر العدد المثلثى الذى هو قبل العدد المثلثى النونى مباشرة وعلى ذلك فهو :—

$$\frac{(\text{ن} - ١)\,[(\text{ن} - ١) + ١]}{٢} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{ن}\,(\text{ن} - ١)}{٣}$$

وإذن فالعدد المثلثي السابع أو العدد المثلثي الذي ترتيبه (٨ — ١) هو

$$\frac{٧ \times ٨}{٢} = \frac{٨ \times ٧}{٢} = ٢٨$$

أما كيفية استخدام الأعداد المثلثية فى إيجاد قانون أى متسلسلة فتتضح بسهولة جدا من شكل (٧٦) الذى يبين متسلسلة الأعداد المربعة أعنى

الوالد	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	..	..	الخ
النتاج	١	٤	٩	١٦	٢٥	٣٦	٤٩	٦٤	٨١	١٠٠	..	..	الخ

ففى هذه الحالة نرى أن قانون تكوين متسلسلة البنين والبنات من المتسلسلة الأصلية ، ما هو إلا حدها النونى (ع$_ن$) أى ن^٢ . وإذا كنا لم نستطع معرفة هذا القانون مباشرة فإنه كان من الممكن أن نتعرف عليه من التمثيل الرمزى للمتسلسلة، إذ أن العدد المربع مكون من العدد المثلثى المناظر والعدد المثلثى الذى قبله مباشرة أى أن

$$ع_{ن} = م_{ن} + م_{ن-١} = \frac{ن(ن+١)}{٢} + \frac{ن(ن-١)}{٢}$$

أى أن

$$\frac{ن}{٢}(ن+١+ن-١) = \frac{ن}{٢}(٢ن) = ن^{٢}$$

وبالمثل يمكن اعتبار الأعداد الخمسة (شكل ٧٧) بنفس الطريقة . إذ أن

المتسلسلة الأصلية	١	٢	٣	٤	٥	٦	..	..	..
المتسلسلة الفرعية	١	٥	١٢	٢٢	٣٥	٥١	..	..	..

ومن الشكل يتضح أن

$$س_{ن} = م_{ن-١} + ن^{٢}$$

$$= \frac{ن(ن-١)}{٢} + ن^{٢} = \frac{ن(ن-١)}{٢} + \frac{ن(٢ن)}{٢}$$

$$= \frac{ن}{٢}(٣ن - ١)$$

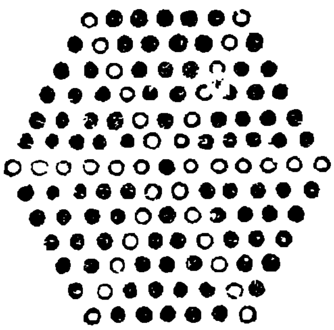
وهكذا يمكنك أن تجد التسلية فى إيجاد القوانين المماثلة لتكوين متسلسلة الأعداد المسدسة (أنظر مثال ٢٢)

١ ٧ ١٩ ٣٧ ٦١ ٩١ .. ..

أو متسلسلة الأعداد النجمية فى شكل ٧٧

١ ٨ ٢١ ٤٠ ٦٥ ٩٦ .. ..

ويمكنك أن تجد كثيراً من اللهو إذا كان لديك بعض البلى واستخدمته فى تكوين متسلسلات عددية ذات تمثيل رمزى للأجسام الصلبة التى أوجهها مكونة من نقط تشبه الذرات فى النظرية الحديثة للتركيب البلورى/ فهناك ثلاثة أنواع عامة يمكن تمييزها وهى : ا — الأهرامات ب — المنشورات حـ — الاشكال المنتظمة ذات الاوجه المتعددة والتى يمكن رسم كرة خارجها أو داخلها / فأما نوع الاهرام فيتكون من اضافة طبقات متتالية بحيث أن الطبقة التى تلى الطبقة النونية هى الحد (ن — ١) من المتسلسله العددية ذات التمثيل الشكلى لهذا النوع والتى حدها النونى صيغته العامة هى (فن + فن-١ + ... + ١) . وعلى ذلك فالهرم الثلاثى يتكون بإضافة طبقات متتالية مكونة من أعداد مثلثية تتناقص على الدوام ويكون الحد الرابع من المتسلسله العددية التى تمثله هو ٢٠ = (١٠ + ٦ + ٣ + ١) . وبالمثل من الاعداد المربعة يمكن أن نحصل على هرم رباعى ويكون الحد الرابع من المتسلسله العددية



شكل (٧٨)

العدد السداسى السابع

٦ (م٥) + ٦ (٦) + ١ أو ٦ (من-٢) + ٦ (ن — ١) + ١

ذات التمثيل الشكلى للهرم الرباعى هو ٣٠ = (١٦ + ٩ + ٤ + ١) / أما المنشورات فتتكون من م من الطبقات مثلا ، وكل طبقة يمثلها عدد واحد طبق معين وليكن ف ن فإذا رمزنا للحد العام فى المتسلسلة العددية ذات التمثيل الشكلى للمنشور بالرمز [م] فإنما نعنى «مجموع م من الطبقات يمثل كل واحد منها مسلة» . اذن اذا كانت المتسلسلة الاصلية هى متسلسلة الاعداد المربعة فإن الجسم شبه مكعب ، أما اذا كانت م = ن فهو مكعب/ واذا كانت المتسلسلة الاصلية هى متسلسلة الاعداد المثلثية فإن الجسم منشور ثلاثى . أما الاجســـام ذات الاوجه المتعددة فهى تتكون من أهرامات موضوعة أوجهها بعضها فوق بعض وضعا مناسبا ، كما تتكون الاعداد ذات التمثيل الشكلى من الاعداد المثلثية بترتيب مناسب ويمكنك أن تحاول وتركب بعضها بنفسك اذا كان لديك بعض الاسلاك والخرز .

لقد درس الفيثاغوريون هذا النوع من المتسلسلات ذى الصفة الزخرفية وحصروا انتباههم فى الغالب نحو الاعداد الصحيحة وأعطوا قليلا جداً من العناية نحو المتسلسلات ذات الحدود الكسرية التى تتناقص باستمرار ، ومثال ذلك :

المتسلسلة الاصلية: ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠

المتسلسلة الفرعية: ١ $\frac{١}{٢}$ $\frac{١}{٣}$ $\frac{١}{٤}$ $\frac{١}{٥}$ $\frac{١}{٦}$ $\frac{١}{٧}$ $\frac{١}{٨}$ $\frac{١}{٩}$ $\frac{١}{١٠}$

سبق أن رأينا انه فى بعض الاحيان يكون لامثال هذه المتسلسلة نهاية ولو ان هذه المتسلسلة بالذات ليست كذلك . فلو كان الامر هكذا فإن هذه المتسلسلات لا يمكن ان تزيد على كمية خاصة مهما كان عدد حدودها . ويعبر الرياضيون عن ذلك بقولهم ان المجموع يؤول الى «قيمة نهائية» مثل مجموع المتسلسلة التى تمثل ٦ و ، اعنى

$$\frac{٦}{١٠} + \frac{٦}{١٠٠} + \frac{٦}{١٠٠٠} + \frac{٦}{١٠٠٠٠} \quad \text{الخ}$$

وإذن فى تلك الحالات يكون من السهل أن نرى بين أى مقدارين تقع القيمة الكسرية النهائية ولو كنا لانستطيع أن نعرفها . ونرى من المثال الثانى أن القيمة النهائية هى بطبيعة الحال $\frac{٦}{٩}$ أو $\frac{٢}{٣}$ فإذا لم نستطع معرفة هذه القيمة فإنه يمكن القول بأنها واقعة بين ٦ , و ٧ , أو ٦٦ , و ٦٧ , أو ٦٦٦ , و ٦٦٧ , وهكذا .

اى أنه يمكننا أن نقف عند أى حد يناسب الدقة التى نود أن نتوخاها / إذن

هذا النوع من المتسلسلات إن هو إلا نوع الأعداد التى نحتاج اليها فى قياس الأشياء فهى تمثل الطريقة التى يعبر بها الرياضيون الحديثون عن الكميات مثل ط ، $\sqrt{2}$ التى حيرت وأربكت أصحاب العقول الراجحة من الإغريق الذين فقدوا الأمل فى إيجاد معنى لهذه الكميات ولو أنه كانت لديهم المقدرة الفكرية التى تمكنهم من الإحاطة بكنهها غير أن ثقافتهم الإجتماعية هى التى وقفت فى سبيل أى تقدم .

ربما يتساءل قارىء مهمل بعد الذى قيل حتى الآن عما إذا كانت الأعداد العادية أى الأعداد الطبيعية لها أية فائدة على الاطلاق . لاشك أن لها فائدة بشرط أنها تستعمل لعد الأشياء التى تشير اليها بطبيعتها ، فأول مااستخدمت الأعداد فى الطبيعة كانت لعد الاغنام أو الماشية أو ما يماثلها وعلى ذلك فهى النوع المناسب من الأعداد اللازمة لإحصاء سكان بلد ما ومعظم الأسئلة الجدلية فى علم الرياضة الحديثة تنشأ من دراسة الإحصاء المبنى على ذلك النوع من المتسلسلات ذات الفائدة الكبرى فى وصف المقاييس ، فكما أن الاغريق اهتموا بالأعداد التى تصلح لعد الماشية دون الأعداد المناسبة لقياس الحوائط ، كذلك يرى العكس بعض علماء الإحصاء باهتمامهم بهذا النوع الأخير دون النوع الأول من الأعداد . وقد سبق أن أشرنا إلى أن الأعداد المثلثية تلعب دوراً هاماً فى القواعد الأساسية لهذا النوع من علوم الرياضة ، ويبدو أن الصينيين كانت لهم فكرة ماعن المعنى الخاص للأعداد المثلثية فى النظرية الحديثة للإحتمالات .

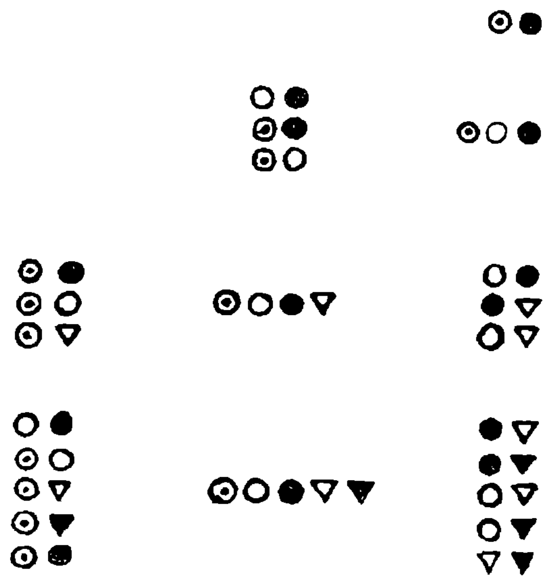
سنستعين بورق اللعب لنبين وجهة نظرهم فى هذه الناحية . والاستعانة بورق اللعب ليست غير مناسبة إذ أن دراسة الاحتمال الرياضى ظهرت وسط الألغاز الصينية وأوراق اللعب كما أن بعض الحيل الرياضية المستخدمة فيه لها صلة كبيرة بالمربع السحرى ونغم الكلمات المتقطعة / وربما يعتقد أحفادنا أن الاحتمال الرياضى فى عصرنا هذا لم يخرج عن الطور البدائى المتمثل فى المربع السحرى / ومن المألوف اعتبار المسألة الآتية :

ماهى نسبة احتمال اختيار آس البستونى وآس الكوبة إذا أخذنا ورقتين من مجموعة الآسات الأربعة . يجيب الرياضيون عن هذا السؤال بالطريقة الآتية : هناك ست طرق لأخذ ورقتين من مجموعة الآسات وهى :

(ا) البستونى والكوبة	(ب) البستونى والدينارى
(حـ) البستونى والإسباتى	(ى) الكوبة والدينارى
(هـ) الكوبة والإسباتى	(و) الدينارى والإسباتى

وأحد هذه الاختيارات هو المنصوص عنه سابقاً ، أما الخمس السابقة فتمثل الفشل فى الوصول إلى النتيجة المطلوبة . فترجيح الفشل بالنسبة إلى النجاح هو خمسة إلى واحد وسنعتبر ذلك فى الوقت الحالى تعبيراً لغوياً بحتا يستخدمه الرياضيون حين يتحدثون إلى بعضهم عن ترجيح النتائج بعضها إلى بعض وليس من الضرورى أن يكون معنى ذلك هو القول بأن عدد مرات الحصول على الاختيار المطلوب هو سدس عدد مرات المحاولات التى يتكرر إجراؤها مرات عديدة وعدد مرات الفشل فى الحصول على ذلك الاختيار هو خمسة أسداس عدد المحاولات تقريبا/ إذ أن مثل هذا القول يعنى معرفة أشياء أخرى عن العالم الحقيقى ، فمثلا كيف خلطت أوراق اللعب وهل هى مصنوعة بطريقة مخصوصة أعنى أن أية ورقة فى حزمة ما لها نفس احتمال الظهور كأية ورقة أخرى فى نفس الحزمة أو أن أى إنسان إذا حاول الحصول على ورقة معينة لا يستطيع تمييزها عن غيرها بميزة خاصة فى طبعها أو نسيجها أو سمكها . هذا بجانب معلومات عملية أخرى ليس لها علاقة مباشرة بعلم الرياضة/ ولما نتحدث عن نظرية الاحتمالات فيما بعد فإننا سنفرق تفريقا تاما بين الاحتمال الرياضى الذى يختص بعدد مرات حدوث شىء ما متى تحققت شروط معينة والاحتمال الفعلى الذى يتأثر بكيفية سلوكنا عندما نجهل ما إذا كانت الشروط جميعها محققة أم لا .

- حين نذكر مرات الاختيار من مجموعة من الأشياء المنفصلة كأوراق اللعب أو الأفراد. يقابلنا نوعان من الاعداد بناظران نوعين من طرق الاختيار . فالنوع الأول يسمى بالتوافيق وهذه تستخدم عندما نعتبر فقط صفات الأشياء المختارة ، فمثلا فى المثال السابق كنا نختار آس البستونى وآس الكوبى وعلى ذلك ، فالتوافيق ، هى أعداد تدلنا على عدد الأشياء المختلفة التى يمكن أخذها من مجموعة ذات عدد معين عندما نختار عدداً معينا منها فى كل مرة . ويرمز للتوافيق بالرمز ق مكتوبا فوقه فى الركن الأيمن رقما يدل على عدد وحدات المجموعة وآخر أسفله فى الركن الأيسر ويدل على عدد الوحدات التى نختارها من بين المجموعة فى كل مرة . وعلى ذلك فإن $^{٥}ق_{٢}$ تدل على عدد الطرق التى نختار بها شيئين كل مرة من بين خمسة أشياء مختلفة . وبالنظر إلى شكل (٧٩) فإنك



شكل (٧٩)

الأعداد المثلثية كتوافيق

عدد طرق إختيار شيئين من بين شيئين : ٢ $ق_{٢}$ = ١ = $م_{١}$
« « « « « « « ثلاثة أشياء : ٣ $ق_{٢}$ = ٣ = $م_{٢}$
« « « « « « « أربعة « : ٤ $ق_{٢}$ = ٦ = $م_{٣}$
« « « « « « « خمسة « : ٥ $ق_{٢}$ = ١٠ = $م_{٤}$

لا تجد أية صعوبة فى تكملة متسلسلة الأعداد التى تمثل توافيق ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ . . . . أشياء مختلفة مأخوذة مثنى فى كل مرة وبذلك تحصل على النتيجة الآتية :

$^{١}ق_{٢}$	$^{٢}ق_{٢}$	$^{٣}ق_{٢}$	$^{٤}ق_{٢}$	$^{٥}ق_{٢}$	$^{٦}ق_{٢}$	$^{٧}ق_{٢}$	$^{٨}ق_{٢}$	... ...
صفر	١	٣	٦	١٠	١٥	٢١	٢٨	... ...

وعلى ذلك من السهل أن ترى أن

$$^{ن}ق_{٢} = م_{ن-١} = \frac{١}{٢} ن (ن - ١)$$

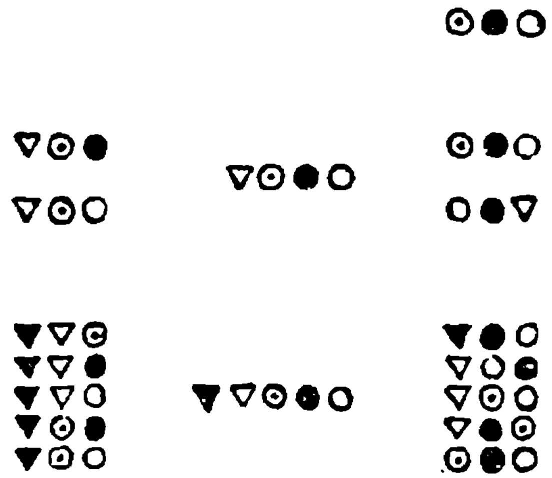
أى أن عد طرق أخذ ورقتين مختلفتين فى كل مرة من مجموعة أوراق اللعب عددها

٥٢ ورقة هو ½ (٥٢) (٥١) = ١٣٢٦ وعلى ذلك فنسبة احتمال أخـذ ورقتين معينتين مثل البنت البستونى والأعرج الدينارى هى واحد إلى ١٣٢٥

وإذا أردنا اختيار ثلاثة ورقات فإنه يلزمنا معرفه قاعدة المتسلسلة

٣ق٣ ، ٤ق٣ ، ٥ق٣ ، ٦ق٣ ، .. .. الخ

ومن السهل أن تعرف ما يساويه كل من الحدود الأولى من هذه المتسلسلة باستعمال



توافيق وأعداد مثلثية أكبر

عدد طرق اختيار ثلاثة أشياء من بين ثلاثة أشياء = ٣ق٣ = ١

« « « « « « « أربعة « = ٤ق٣ = ٤

« « « « « « « خمسة « = ٥ق٣ = ١٠

شكل (٨٠)

رسم تمثيلى كما فى شكل ٨٠ أو باستخدام الحروف ، فمثلا إذا أخذنا ثلاثه حروف كل مرة من بين الحروف الخمسة ا ب حـ د هـ فإننا نحصل على :

ا ب حـ ، ا ب د ، ا ب هـ ، ا حـ د ، ا حـ هـ ، ا د هـ ، ب حـ د ، ب حـ هـ ، ب د هـ ، حـ د هـ

وعلى ذلك فالمتسلسلة هى :

$ن^{٣}_{م}$	$ن^{٤}_{م}$	$ن^{٥}_{م}$	$ن^{٦}_{م}$	$ن^{٧}_{م}$	$ن^{٨}_{م}$	$ن^{٩}_{م}$	...
١	٤	١٠	٢٠	٣٥	٥٦	٨٤	...

وهذه المتسلسلة يمكن الحصول عليها من الأعداد المثلثية البسيطة بنفس الطريقة التى تتكون بها الأعداد المثلثية البسيطة من الأعداد الطبيعية ، وفى الحقيقة يمكن أن تتكون الأعداد الطبيعية بنفس الطريقة من الواحد الصحيح (الذى يدل على السبب كما كان يقول الفيثاغوريون) ، أى أصل الأعداد جميعها كالآتى :

١	١	١	١	١
١	(١+١)	(١+١+١)	(١+١+١+١)	(١+١+١+١+١)
١	٢	٣	٤	٥

وبنفس الطريقة يمكن تكوين الأعداد المثلثية البسيطة كالآتى :

١	٢	٣	٤	٥
١	(١+٢)	(١+٢+٣)	(١+٢+٣+٤)	(١+٢+٣+٤+٥)
١	٣	٦	١٠	١٥

وعلى ذلك فالمتسلسلة التى نبحثها تتكون كالآتى :

١	٣	٦	١٠	١٥
١	(١+٣)	(١١+٣+٦)	(١+٣+٦+١٠)	(١+٣+٦+١٠+١٥)
١	٤	١٠	٢٠	٣٥

سوف نسمى هذه الاعداد ، الاعداد المثلثية من الرتبة الثانية ، (٢ م) . وكما بينا سابقاً فإن هذه الاعداد تمثل الأجسام الصلبة أعنى الهرم الثلاثى (هرم له قاعدة مثلثية الشكل) . ويمكن التعرف على قاعدة تكوينها إذا كتبت فى الصورة الآتية

١ ٢ ٣ ٤ ٥ (المتسلسلة الاصلية)

١ ٤ ١٠ ٢٠ ٣٥

$\frac{۳}{۲}$ (١) $\frac{۴}{۳}$ (٣) $\frac{۵}{۳}$ (٦) $\frac{۶}{۳}$ (١٠) $\frac{۷}{۳}$ (١٥)

ونذلك نحصل على القاعدة البسيطة الآتية :

$$م^{۲}_{ن} = \frac{(ن + ۲)}{۳} م^{۱}_{ن} = \frac{(ن + ۲)(ن + ۱) \cdot ن}{۲ \cdot ۳}$$

مع ملاحظة ان العدد ن المكتوب اسفل م من الجهة اليسرى يدل على العدد المناظر له فى المتسلسلة الاصلية (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، .. ..)

وهكذا فإننا نرى أن

$$^{ن}ق_{۳} = م^{۲}_{ن-۲}$$

ونحصل على $م^{۲}_{ن-۲}$ بوضع (ن — ٢) بدلا من ن فى القاعدة السابقة أى أن

$$^{ن}ق_{۳} = \frac{ن (ن - ۱)(ن - ۲)}{۲ \cdot ۳}$$

وعلى ذلك فان عددطرق أخذ ثلاثة ورقات مختلفة فى كل مرة من مجموعة الورقهو

$$\frac{۵۲ \times ۵۱ \times ۵۰}{۲ \cdot ۳} = ۲۲۱۰۰$$

أى أن نسبة احتمال اختيار ثلاثة ورقات مكونة من آس البستونى وآس الكوبة وآس الديناری هى ١ إلى ٢٢٠٩٩

ويمكن الآن أن تكون أعداد مثلثية ذات رتبة أعلا بنفس الطريقة السابقة كما تبين المثلثات الآتية :

الأعداد الطبيعية

١ = ١
٢ = ١ ١
٣ = ١ ١ ١
٤ = ١ ١ ١ ١
٥ = ١ ١ ١ ١ ١
٦ = ١ ١ ١ ١ ١ ١
٧ = ١ ١ ١ ١ ١ ١ ١

الأعداد المثلثية البسيطة

١ = ١
٣ = ٢ ١
٦ = ٣ ٢ ١
١٠ = ٤ ٣ ٢ ١
١٥ = ٥ ٤ ٣ ٢ ١
٢١ = ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١
٢٨ = ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١

الأعداد المثلثية ذات الرتبة الثانية

١ = ١
٤ = ٣ ١
١٠ = ٦ ٣ ١
٢٠ = ١٠ ٦ ٣ ١
٣٥ = ١٥ ١٠ ٦ ٣ ١
٥٦ = ٢١ ١٥ ١٠ ٦ ٣ ١
٨٤ = ٢٨ ٢١ ١٥ ١٠ ٦ ٣ ١

الأعداد المثلثية ذات الرتبة الثالثة

١ = ١
٥ = ٤ ١
١٥ = ١٠ ٤ ١
٣٥ = ٢٠ ١٠ ٤ ١
٧٠ = ٣٥ ٢٠ ١٠ ٤ ١
١٢٦ = ٥٦ ٣٥ ٢٠ ١٠ ٤ ١
٢١٠ = ٨٤ ٥٦ ٣٥ ٢٠ ١٠ ٤ ١

الأعداد المثلثية ذات الرتبة الرابعة

١ = ١
٦ = ٥ ١
٢١ = ١٥ ٥ ١
٥٦ = ٣٥ ١٥ ٥ ١
١٢٦ = ٧٠ ٣٥ ١٥ ٥ ١

الأعداد المثلثية ذات الرتبة الخامسة

١ = ١
٧ = ٦ ١
٢٨ = ٢١ ٦ ١
٨٤ = ٥٦ ٢١ ٦ ١
٢١٠ = ١٢٦ ٥٦ ٢١ ٦ ١

ومن هذه الأعداد المثلثية نحصل على :

$$\text{ق}^{\text{ن}}_{١} = \text{ن}$$

$$\text{ق}^{\text{ن}}_{٢} = \frac{\text{ن}\,(\text{ن} - ١)}{١ \cdot ٢}$$

$$\text{ق}^{\text{ن}}_{٣} = \frac{\text{ن}\,(\text{ن} - ١)\,(\text{ن} - ٢)}{١ \cdot ٢ \cdot ٣}$$

$$\text{ق}^{\text{ن}}_{٤} = \frac{\text{ن}\,(\text{ن} - ١)\,(\text{ن} - ٢)\,(\text{ن} - ٣)}{١ \cdot ٢ \cdot ٣ \cdot ٤}$$

$$\text{ق}^{\text{ن}}_{٥} = \frac{\text{ن}\,(\text{ن} - ١)(\text{ن} - ٢)(\text{ن} - ٣)(\text{ن} - ٤)}{١ \cdot ٢ \cdot ٣ \cdot ٤ \cdot ٥}$$

والآن يصادفنا متسلسلة لها أهمية كبيرة فى الإحصاء ، وكان أقليدس على معرفة بها واستخدمها لكى يحصل على نتائج غير ذات قيمة عن الأعداد الأولية . وهذه المتسلسلة هى :

١ ٢ ٦ ٢٤ ١٢٠ ٧٢٠ ٥٠٤٠

وتسمى متسلسلة المضروبات ، ومنشأها كالآتى :

المتسلسلة الأصلية	١	٢	٣	٤	٥
	١	١٠٢	١٠٢٠٣	١٠٢٠٣٠٤	١٠٢٠٣٠٤٠٥
	١	٢	٦	٢٤	١٢٠

وعلى ذلك يتكون كل حد من حدود هذه المتسلسلة بضرب العدد المناظر له فى المتسلسلة الأصلية فى جميع الأعداد التى قبله ، ويكتب الحد النونى غالبا فى الصورة ن ! وعلامة التعجب هذه ليست للإعتراض الذى لا وجود له فى الرياضة بل هى

الفعل الذى يدل على « إضرب كل عدد فى جميع الأعداد الصحيحة التى تسبقه حتى الواحد الصحيح »

ومضروبات الأعداد تمثل طريقة أخرى للإختيار على أساس الترتيب أو النظام وعدد الطرق التى يتم بها هذا الاختيار تسمى تباديل بسيطة وتكتب فى الصورة نلن وتعنى عدد ترتيبات ن من الأشياء إذا أخذت جميعها . فمثلا هناك ست تباديل للحروف الثلاثة ابح أى ابح ، احب ، باح ، بحا ، حاب ، حبا وقاعدة إيجاد التباديل البسيطة هى :

نلن = ن !

ولكى نشرح هذه القاعدة نذكر المثال الآتى : إذا كان هناك أربعة أشياء مختلفة فانه يمكن وضع أى واحد منها فى المكان الأول وهذا يعطى أربعة ترتيبات مختلفة نبدأ بها . وبوضع أحد هذه الأشياء فى المكان الأول فانه يمكن وضع أحد الثلاثة الباقية فى المكان الثانى وبذلك يمكن تكوين كل من الترتيبات الأربعة الأولى بثلاث طرق مختلفة فيكون مجموعها جميعا ٤ × ٣ . ولما كنا قد شغلنا المكان الأول والثانى فى كل واحد من الـ ٣٠٤ ترتيب فانه يمكننا أن نشغل المكان الثالث بأحد الشيئين الباقيين بطريقتين مختلفتين وبذلك يكون لدينا ٢٠٣٠٤ ترتيبا لشغل الامكنة الثلاثة الاولى وفى كل منها يمكن شغل المكان الرابع بطريقة وعلى ذلك فإن

٤ل٤ = ١٠٢٠٣٠٤ أى ٤ !

والمثال الآتى يساعدك على تكوين أمثلة أخرى توضح الطريقة للأعداد التى تزيد على ثلاثة

ابح

المكان الاول	المكان الثانى	المكان الثالث
ا	اب	ابح
	اح	احب
ب	با	باح
	بح	بحا
ح	حا	حاب
	حب	حبا
(ثلاثة طرق)	(طريقتان لكل)	(طريقة واحدة لكل)

وعدد الطرق التي يمكن بها ترتيب مجموعة كاملة من أوراق اللعب هي ٥٢ ! وهذا عدد كبير لا داعي لكتابة هنا فهو ٨٠ وعلى يمينها ستة وستون رقما . وهذا العدد يعطي عدد الاميال التي يقطعها الضوء في مدة ١٣,٧ × (١,٠٠٠,٠٠٠)^{٩} من السنين بسرعة ١٨٦٠٠٠ ميل في الثانية . فاذا كان هذا يشجعك على الأمل بمعرفة جميع الطرق المختلفة لترتيب مجموعة ورق اللعب فاني أنصحك أن تترك لعب الورق جانبا وتدرس علم الأحياء إذ أن عدد الانسجة العصبية في المخ البشري هو حوالى ثلاث آلاف مليون.

سنطلق على جميع الترتيبات الممكنة باختيار جميع أعداد مجموعة في كل مرة اسم التباديل البسيطة ويرمز لها بالرمز $^{ن}ل_{ن}$ حيث ن هو عـــدد أفراد المجموعة . أما الترتيبات المكونة باختيار ر من أفراد المجموعة في كل مرة فيرمز لها بالرمز $^{ن}ل_{ر}$ وعلى ذلك فإن $^{٤}ل_{٣}$ تدل على عدد الترتيبات المختلفة لمجموعة مكونة من أربعة أفراد عندما نختار ثلاثة منها في كل مرة . ولكي نحصل على قاعدة هذه الأعداد ، نعود إلى متسلسلة التوافيق . نعلم مما سبق أن :

$$^{ن}ق_{٥} = \frac{ن\,(ن-١)\,(ن-٢)\,(ن-٣)\,(ن-٤)}{٥\,!}$$

وعلى ذلك :

$$^{ن}ق_{ر} = \frac{ن\,(ن-١)\,(ن-٢)\cdots\cdots(ن-ر+١)}{ر\,!}$$

أي أنه إذا أردنا ترتيب ر من الأشياء المختلفة بجميع الطرق الممكنة فإنه يوجد ر ! من الترتيبات قدر عدد التوافيق ، أعني

$$^{ن}ل_{ر} = ر\,! \times \frac{ن\,(ن-١)\,(ن-٢)\cdots\cdots(ن-ر+١)}{ر\,!}$$

$$= ن\,(ن-١)\,(ن-٢)\cdots\cdots\cdots(ن-ر+١)$$

ولتوضيح ذلك ، نفرض أن الكلمة المراد تركيبها هي كلمة RED . إذن عدد الطرق المحتملة لتركيبها هو ٢٦^{٣} أو ١٧٥٧٦ ، فإذا استبعدنا من ذلك عدد مرات تكرار الحروف أصبح عدد الطرق $^{٢٦}ل_{٣}$ أي ٢٦ × ٢٥ × ٢٤ أو ١٥٦٠٠ .

أما إذا كنت على معرفة بالكلمة المطلوب تركيبها فإنه فى الإمكان اختصار عدد الطرق المحتملة ، ويمكنك اختصار الوقت بتعلم مبادىء فقه اللغة .

وبينما تتعلم تركيب هذه الأعداد التى تمثل التوافيق ، يلزمك أن تلاحظ أن التعبير عن عدد احتمالات التقاط الآسات الأربعة من مجموعة الورق يخالف التعبير عن عدد احتمالات التقاط آس البستونى أولا ثم آس الديناري ثانيا ، ثم آس الكربة ثالثا ، ثم آس السباتى رابعا ، ففى الحالة الأولى نحتاج إلى العدد ٥٢ق٤ أى

$$٢٧٠٧٢٥ = \frac{٤٩ \times ٥٠ \times ٥١ \times ٥٢}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤}$$

فيكون الاحتمال ١ فى كل ٢٧٠٧٢٤ . أما فى الحالة الثانية فلدينا ترتيبا خاصا . ويكون العدد ٥٢ل٤ أى :

$$٦٤٩٧٤٠٠ = ٤٩ \times ٥٠ \times ٥١ \times ٥٢$$

فيكون الاحتمال ١ فى كل ٦٤٩٧٣٩٩

وقبل أن نترك الفترة التى كان فيها تطور استخدام الأعداد مرتبطا بالسحر يلزمنا أن نشير إلى نوع آخر من الأعداد المثلثية ، وهى التى لم يصبح لها شأن فى علم الرياضة حتى ظهر نيوتن . ومن المحتمل جداً أنها كانت معروفة لدى أهل الشرق الذين ابتكروا العدد «صفر» حوالى مائة سنة قبل الميلاد . وقبل أن تكون معروفة لدى الأوروبيين بزمن كبير . لقد تتبعنا مصدر بعض المتسلسلات العددية مبتدئين بمتسلسلة الأعداد الطبيعية التى هى الأصل . وجميع المتسلسلات التى تكون بطريقة تكوين الأعداد المثلثية ، يمكن نسبتها إلى مثلث قمته مكونة من أصفار ، وهذه المثلثات تسمى مثلثات متلاشية ، وأبسطها ما يمكن تمثيله كالآتى :

صفر
صفر صفر
صفر صفر صفر
١ ١ ١ ١
٢ ٣ ٤ ٥ ٦
١ ٣ ٦ ١٠ ١٥ ٢١

أو

صفر
١ ١
٢ ٣ ٤
١ ٣ ٦ ١٠

[وتكون هذه المثلثات بأن نكتب أولا عدداً من حدود متسلسلة ما على الترتيب عند قاعدة المثلث ، أما السطر الذى يعلوها فيتكون بطرح كل حد من الحد الذى يليه] وتكون السطر الذى يليه بنفس الطريقة ، ونستمر هكذا حتى نحصل على أصفار ، ويمكن تبين سبب انعدام المتسلسلات المثلثية بسهولة ، إذ أن المتسلسلات المتالية للأعداد المثلثية مبنية على جمع الحدود المجاورة فى المتسلسلة الأصلية على بعضها ، فجميعها ذات أصل واحدة . فالمتسلسلة الأصلية التى من المرتبة الثانية الأعداد المثلثية هى المتسلسلة التى حدودها هى الأعداد المثلثية البسيطة والتى متسلسلتها الأصلية هى متسلسلة الأعداد الطبيعية وهى التى يمكن اعتبارها ناتجة عن الوحدات المتتابعة ، ومن الواضح أن الفرق بين أى حدين متتاليين فى متسلسلة كل من حدودها الوحدة هو الصفر . ونذكر الآن مثلثاً متلاشيا من المرتبة الثانية للأعداد المثلثية ، لتوضيح أصل هذه المتسلسلات توضيحا تاما

صفر

١ ١

٣ ٤ ٥

٣ ٦ ١٠ ١٥

١ ٤ ١٠ ٢٠ ٣٥

وترتيب الأعداد فى شكل مثلثات يؤدى إلى حيلة فى منتهى البساطة تساعد على اكتشاف الطريقة التى تستخدم فى تكوين بعض المتسلسلات ، وسنشرح هذا بالتفصيل فى باب قادم ، أما المبدأ الذى بنيت عليه هذه الطريقة فهو أن عدداً كبيراً من المتسلسلات أو جميع المتسلسلات التى يمكن تمثيلها بأرقام يمكن اعتبارها مكونة من متسلسلة الأعداد المثلثية ، وحيث أنه يمكن تمثيل الأصل فى الأخيرة بمثلث متلاش ، فإنه يمكننا تكوين مثلث متلاش لأى متسلسلة للأعداد/ ويمكنك تجربة ذلك لأى متسلسلة للأعداد الموجودة فى شكلى ٧٦ و ٧٧ . فمثلا نجد أن المثلث المتلاشى لمتسلسلة مربعات الأعداد الطبيعية هو :

صفر

٢ ٢

٣ ٥ ٧

١ ٤ ٩ ١٦

وها هي متسلسلة جديدة تدل على أصلها بسرعة ولو أن الأعداد كما هي قد لا توحي إليك بشيء.

١	٢	٣	٤	٥	٦	..	..
١	٥	١٤	٣٠	٥٥	٩١	..	..

والمثلث المتلاشي الآتي يؤدي بك مباشرة إلى متسلسلة مربعات الأعداد الطبيعية

صفر

٢ ٢

٩ ٧ ٥

٢٥ ١٦ ٩ ٤

٥٥ ٣٠ ١٤ ٥ ١

أي أن المتسلسلة هي :

$١^٢$ $(١^٢+٢^٢)$ $(١^٢+٢^٢+٣^٢)$ $(١^٢+٢^٢+٣^٢+٤^٢)$ الخ.

ومن السهل أن ترى أن الفروق بين أي حدين متتاليين لهذه المتسلسلة ، تكون متسلسلة الأعداد المربعة وذلك يتضح من السطر الثاني للمثلث المتلاشي/ أما القانون البسيط الذي يربط المثلث المتلاشي بخواص المتسلسلة فنشرحه حين نعالج منشأ العدد « صفر » . أما إشارتنا إلى هذا الموضوع هنا فهو نتيجة تسليمنا بحل الأزمة التالية في الرياضة ، ومذكور هنا لأن اكتشافه كان وليد نفس العلاقة الاجتماعية مثل

الأعداد الرمزية فى الطقوس الفيثاغوريه ، إذ أن تمثيل أصل المتسلسلة بمثلث متلاش كان دليلا على بلوغ تجارب الأعداد ، الناشئة بطبيعة الحال من فن البحث فى الحضارة الذين هم فى عزلة يفكرون ويعيشون فى مجموعات عائلية موقرة ، أوج عظمتها .

وعندما ننظر إلى هذه المجتمعات البدائية التى كانت تحاول جاهدة وهى بعد فى مدارج الحضارة الأولى أن تنطق بلغة الأعداد ، نتساءل فى شىء من الشك عما إذا كنا أنفسنا قد خرجنا الآن من تأثير السحر ، والأمر يدعو إلى أشد الحذر فى هذا الاعتبار وخاصة إذا تذكرنا أن رجالا عظماء مثل باسكال ونيوتن ممن شاركوا بنصيب كبير فى خلق الرياضيات الحديثة التى طبقت بنجاح فى حل مسائل كثيرة فى عصرنا الآلى ، مثل هؤلاء الرجال قد شغفوا إلى حد كبير بمسائل صوفية دينية غريبة . فالأعداد ذات الصفات السحرية فى الحضارات الاوربية أهمها ٧ ، ٣ فقد ورثنا عن الدين الشمعادانات السبعة الذهبية والأرواح الشريرة السبعة التى أخرجت من مريم المجدلية والأحزان السبعة والخطايا السبعة القاتلة والفضائل السبعة (القتالة) والدعوات السبعة المباركة ولم يهمل رجال الدين غير الرسميين (الذين يعرفون باسم الفلاسفة) أمر العدد سبعة ، ففى السنة التى كشف فيها بيانزى عن الكوكب الصغير سيرس كانت الكواكب المعروفة سبعة : عطارد ، الزهرة ، الأرض ، المريخ ، المشترى ، زحل ، أورانس . وفى نفس السنة كتب الفيلسوف البروسى هيجل يؤنب العلماء لإهمالهم الفلسفة مدللا على ذلك بما يضيعه علماء الفلك من وقت فى التطلع إلى السماء بحثاً عن كوكب جديد بينما تقرر الفلسفة بوضوح أن عدد الكواكب لا يمكن أن يكون غير السبعة . ومن ذلك الحين اكتشفت كواكب أخرى فعرف الكوكب نبتيون سنة ١٨٤٦ ثم الكوكب بلوتو سنة ١٩٣٠ وذلك لأن الفلكيين ماديون ما داموا يتابعون أرصادهم العلمية فى مراصدهم الفلكية .

أما الخصائص السحرية للعدد ٣ وهى التى كانت لها منزلة التقديس فى الثقافة الأوربية فتبدو أنها من أصل سامى ، وربما ترجع عبارة الأعداد المثلثية وما ينسب إلى المثلث ذاته من خصائص صوفية فى الثقافة الفيثاغورية إلى الرمز المثلث عند الحيثيين القدماء والذى أصبح الآن رمزاً صهيونية على شكل مثلثين / ولا زال الإعتقاد سائدا إلى وقتنا هذا بالارتباط الجنسى لعدد ثلاثة كما فى زهرة ليس وكما نجده فى المشتقات الغربية للعدد ذاته / فعلاوة على المثلثات الأولية التى سبق ذكرها فى الباب الأول ، فقد قرر أفلاطون عقيدة التثليث / الأولى العالم الحقيقى والثانية عالمنا

الواقعى وهو الفال والثالثة «الكلمة»(١) وهى الروح التى ينفخها الله فى العالم وقد تحدث الرواقيون عن كلمة المنى والضوء الذى ينير لكل فرد والنار الالهية/ وفى السنوات الأولى لانتشار الكتاب المقدس كان فيلو كبير يهود الاسكندرية قد أدخل المبادىء الأفلاطونية فى اليهودية الأصلية مدعياً أن المسيح هو «الكلمة» عند أفلاطون. وكانت فكرة التثليث أخذت تتبلور فى الاسكندرية التى كانت أكبر مصنع لديانات العالم عندما كان اليهود يأملون فى ظهور المنقذ المنتظر / وربما كان من إنتاج المرتدين عن الافلاطونية واتباع الفيثاغورية الجديدة فى الشعوب المختلفة فى الإمبراطورية الرومانية. تلك الحسابات السماوية الدقيقة التى أدت إلى زندقة الكثيرين وحرمانهم من الكنيسة وإعدام عدد كبير منهم ربما فاق عدد الذين لاقوا حتفهم فى ملاعب الرومان الوحشية/ وعندما أصبح لمنطق أرسطو الأفلاطونى منزلة الشرف إلى جوار نصوص الديانة الكاثوليكية، أدخل علماء السربون خصائص العدد ثلاثة السحرية فى علم النفس مبتدئين بثالوث الفكرة والإرادة والشعور ثم هم يقسمون كل منها أقساما ثلاثة مما لا زال يوجد فى صفحات علم النفس المعاصرة.

أما أكثر نتائج هذه المعتقدات شذوذا وفضولا حدث فى وقت أكثر تأخراً / ففى أواخر القرن الثامن عشر أضعف الاعتقاد بوجود الله احترام الجماهير لخصائص العدد ثلاثة الخفية. فحان الحين بذلك للفلاسفة وهم رجال الدين غير الرسميين أن يرجعوا للعدد ثلاثة صفاته السحرية السابقة/ ويجب أن يعزى الفضل فى ذلك إلى هيجل، فتعاليمه تقتضى. كما كان الأمر عند الفيثاغوريين/ أن العقل أو الوحدة هى مصدر كل شىء وبذلك فسر الكون يعرف عن طريق بحث كيفية عمل العقـــل. فلم يضع هيجل وقته مثل الفلكيين الذين يرصدون النجوم والكواكب والمذنبات آلاف المرات أو مثل أصحاب علم النفس الحديث الذين يثبتون آلاف المشاهدات على الاطفال فى المدارس ومرضى العقول وسجلات شركات الإعلان. أما هيجل فقد وجد الحقيقة فى طبيعته هو إذ أن العقل يعمل هكذا فى رأيه وما التحدث والمباحثة إلا كمداولات المحلفين التى يقتضى عليهم الاجتماع وراء أبواب مغلقة حتى يتوصلوا إلى الحكم فى صالح المنطق والوحدة التى هى مصدر كل شىء ويطول اجتماعهم حتى يفسد الهواء وتضيق الصدور ويشتد الجدل وتتعارض الآراء حتى لا يبقى سوى الوحدة التى هى مصدر كل شىء.

---

(١) اللوجس

فى الفلسفة يعرف رأس هذا المثلث بأنه « المطلق » فى الاستعمال السياسى يعرف باسم (الدولة البروسية) (التى هى الآن الفوهرر) وفى الدين باسم (الالة) وفى كل التدليلات التى تؤدى تباعا إلى المطلق نجد الثلاثيات فمثلا الخطوة الأولى التى لم ينجح هيجل قط فى اتخاذها هو تقرير الموضوع ويسميها هيجل الرسالة . والخطوة الثانية هى مايعبر عنه عادة فى اللغة الانجليزية (النفى أو المعارضة) ومن سوء الحظ يختفى هذا النقص فى اللغة الانجليزية المعنى الواسع الكامن فى عبارة هيجل بأقل بلاغة مما تفعل طريقة شكسبير الذى يبدأ بالاعتراض المؤدب وينتهى بالأكذوبة الصريحة ثم فى النهاية يأتى نفى النفى جامعاً الحقيقة العليا فى الخطوتين السابقتين والكلمة الانجليزية الوحيدة التى تمثل الخطوة الثالثة هى التوفيق بين الآراء المتعارضة الذى كثيرا مايكون فى ذاته بداية نقاش جديد .

ولما كان المطلق (أو المعبود أو أوامر الزعيم كيفما كانت الحال) هو أيضاالعقل أو الوحدة أى مصدر كل شىء فإن التاريخ نفسه لايمكن أن يكون سوى تتابع لتدليلات ثالوثية متوالية ، فالخواص الوراثية للتسلسلات المتتابعة تفسر مايحدث إذ تنقسم الحضارة انقساما طبيعياً إلى مرحلة شرقية (الرسالة) ومرحلة كلاسيكية (معارضة الرسالة) مما يؤدى إلى الاستخلاص الثالث وهو الحضارة التوتيونية التى تعرف الآن باسم النوردية (أهل الشمال) وهى الحضارة التى تجمع مزايا المرحلتين السابقتين . والأحداث الأخيرة إذا اعتبرت بدقة تؤيد هذا التدليل . إذ تكشف عن وجود عنصر من حضارات الشرق البدائية فى تلك الخلاصة الأخيرة المدنية . وكان رجال السياسة والدين الذين كانوا قد أتقنوا طرق الجدل على استعداد لأن يكيفوا أنفسهم لكل حالة تطرأ عليهم ، فالجدل يجمع فى استخلاص الاخير كل مزايا ماسبقه من أنواع السحر والخفاء . فهى تقدم العذر للتهرب من العمل الشاق مثلما كان يفعل الفيثاغوريون فى قولهم بسحرية الأعداد وذلك بدلا من استغلال العقل الإنسانى فى التوصل إلى نتائج إيجابية . وإذا أمكنك أن تقنع نفسك أن الكون كله يحيط به المطلق أو العقل او الوحدة التى هى أصل كل شىء . سهل عليك الاعتقاد بأن كل مااقترفته من أخطاء مقدر ولامناص منه . وأن كل شىء ستكون له نهاية سعيدة على الرغم من الجهود المضنية التى يبذلها سكان هذا الكون .

وليس من اليسير أن يقتنع العلماء بمثل هذا النوع من سحرية الأعداد كما هو الحال

مع رجال الدين والسياسة . فالعلماء أقرب إلى الشك منهم إلى اليقين عندما يتصفحون كتابات الفيثاغوريين التى تبحث عن سر الكون كامنا فى الاعداد ، فمثلا كثيراً ما يقال أن [الرياضيات هى أجرومية العلم وهذا القول وخاصة لأن مصدر الخطأ فيه غير واضح للعيان] ذلك أن القول بأن الرياضيات هى اجرومية العلم يقتضى اعتبار أن العلم معنى نقط بالعد والقياس . أما الحقيقة الواضحة فهى أن مهمة العلم الاولى هى التعرف على الانواع المختلفة من الاشياء التى توجد فى العالم . وقد وجد من المناسب إخفاء هذه الحقيقة الواضحة الأولية لسبب قريب وهو أن إخفاءها يساعد الناس على تناسى أن الطبيعه البشرية مثل العالم الخارجى مما يمكن دراسته علميا فلم نستعمل الرياضيات فى علوم الحياة والنفس وهى العلوم الحديثة الاكثر اتصـــالا بالتقاليد والمعتقدات اللهم إلا فى العصر الحديث . وقد وصل هذان العلمان الآن إلى بدء مرحلة تفهم أنواع القياسات ذات الفائدة لها بالاستعانة بالطرق الرياضية وإذا رجعنا إلى التاريخ نجد أن الإنسان البدائى قد قضى العشرين ألف سنة الاخيرة فى مجهود متواصل للتعرف على أنواع النجوم فى السماء وذلك قبل أن يتمكن من قياس مواضعها فى الفضاء أو التعبير عدديا عن أوقات شروقها وغروبها . ثم لما وجدت الحضارات الاولى ذات التقاويم الفلكية انقضت فترة أخرى تقدر بثلاثة آلاف عام قبل أن تستعمل الطرق الرياضية التى سنشير إليها فى الباب التالى فى الدراسات الفلكية . فالأساس المتين الذى يقوم عليه بناء العلم هو التعرف على ما هو موجود ولا يمكن أن يوجد سوى التوهم والتخبط إذا استعملت الرياضيات قبل أن نتعرف بوضوح على الاشياء التى نعالجها أو القياسات المفيدة التى ينبغى عملها . وإذا تم هذا التعرف يمكن حينئذ تقرير نوع الرياضيات التى تستعمل كأداة نافعة فى زيادة المعرفة وأن النجاح العظيم الذى حدث بتطبيق الرياضيات فى دراسة أشياء تم التعرف عليها قد أوجد تقديسا أعمى أدى إلى أزمة حقيقية فى ثقافتنا الحاضرة وخاصة فى مجال علم النفس حيث فى موضوع اختبارات الذكاء حسابات عويصة ومعقدة لا تتناسب مطلقا مع الحقائق المعروفة المؤكدة مما يدل على أننا لم نتخلص تماما بعد من اعتبار سحرية الأعداد ولم يمكننا بعد النظر إلى الإعداد بأنها مجرد أداة غير ذات صفات سحرية .

تمارين على الباب الخامس

(١) إذا علم أن

√٢ = ١,٤١٤٢

√٣ = ١,٧٣٢١

√٥ = ٢,٢٣٦١

فأوجد √٢٧ ، √١٨ ، √١٢ ، √٢٤ ، √١٠ ، √٣٠ صحيحة لثلاثة أرقام عشرية .

(٢) إذا كان طول الوتر فى مثلث قائم الزاوية هو الوحدة فأوجد طول الضلع الثالث إذا كان طول الضلع الثانى ٣/٥ ، ٢/٣ ، ٤/٥ .

(٣) كون متسلسلة حسابية عدد حدودها خمسة وأرمز لمجموعها بالرمز حـ . أكتب أسفل هذه المتسلسلة المتسلسلة المكونة من المتسلسلة السابقة كالآتى : إجعل الحد الأخير الحد الأول والحد قبل الأخير الحد الثانى وهكذا . وعلى ذلك يكون الحد الأخير فى المتسلسلة الأولى مكتوبا أسفل الحد الأول فيها وهكذا . وبجمع المتسلسلتين تحصل على ٢حـ . أثبت حسابيا أن مجموع متسلسلة حسابية عددحدودها ن وحدها الأول ا وحدها الأخير ل هو ن/٢ (ا + ل) .

(٤) كرر العملية السابقة مستخدما متسلسلة حسابية أخرى .

(٥) اكتب المتسلسلة ا ، ا + ى ، ا + ٢ى ، الخ حيث ا ، ى رموز جبرية .

إذا كان عدد حدود هذه المتسلسلة هو ن فاكتب ل بدلالة ا ، ن ، ى . وعبر عن ا بدلالة ن ، ل ، ى . ثم أكتب الحد الذى قبل الأخير بحدين بدلالة

(١) ن ، ا ، ى   (٢) ن ، ل ، ى .

وبهذه الطريقة كون القانون العام بدون استعمال الأعداد .

٦ — أوجد الحد الخامس والحد العاشر ومجموع عشرة حدود لكل من المتسلسلات الآتية :

١ ، ٣ ، ٥ ،	−٦ ، −٢ ، +٢ .. ..
١ ، ٤ ، ٧ ،	١ ، ٠ ، −١ ، −١٢ .. ..
٥ ، ١٠ ، ١٥ ،	٣ ، +٤/٣ ، −١/٣ .. ..
١/٢ ، ١ ، ١ ١/٢	

(استخدم أولا القوانين التي سبق إيجادها ثم حقق النتائج التي تحصل عليها بكتابة الحدود العشرة الأولى ثم جمعها) .

٧ — أوجد الحد النوني ومجموع ن من الحدود لكل من المتسلسلات العددية السابقة . أوجد الحد الأول والفرق بين كل حدين متتاليين في المتسلسلة الحسابية التي حدها السادس ١٣ وحدها الثاني عشر ٢٥ .

٨ — أوجد مجموع المتسلسلة ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + ن . (متسلسلة الأعداد الطبيعية)

٩ — إذا كان ٦ الحد الأول ، ١٥ الحد الأخير في متسلسلة حسابية عدد حدودها ستة فما هي الحدود الاربعة الباقية .

١٠ — إذا كان واحد الحد الاول ، ٣ الحد الأخير في متسلسلة حسابية عدد حدودها خمسة فما هي الحدود الثلاثة الباقية .

١١ — بين كيف يمكن تكوين متسلسلة حسابية عدد حدودها (ن+٢) بحيث يكون حدها الأول أ وحدها الأخير ل ، تسمى هذه العملية أحيانا عملية إدخال ن من الأوساط الحسابية بين أ ، ل : وهذه التسمية يشوبها بعض الغباء . إلا أنه من المفيد أن نعرفها فهي مثلا تمكننا من إيجاد عدد معين من النقط على خط مستقيم بحيث تكون على أبعاد متساوية من بعضها .

١٢ — كون الصيغة العامة لمجموع متسلسلة هندسية عدد حدودها ن وحدها الأول أ وحدها الثاني أ ر والثالث أ $ر^{٢}$ وهكذا . ثم أثبت أنه يساوي

$$\frac{أ(ر^{ن}-١)}{(ر-١)}$$

١٣ — أوجد الحد الخامس ومجموع الحدود الخمسة الاولى لكل من المتسلسلات الآتية:

$1 \text{ ، } 2 \text{ ، } 4 \text{ ، } \cdots \cdots$

$0,9 \text{ ، } 0,81 \text{ ، } 0,729 \text{ ، } \cdots \cdots$

$\frac{3}{4} \text{ ، } \frac{3}{8} \text{ ، } \frac{3}{16} \text{ ، } \cdots \cdots$

$س^5 \text{ ، } ا س^4 \text{ ، } ا^2 س^3 \text{ ، } \cdots \cdots$

$1 \text{ ، } 3 \text{ ، } 3^2 \text{ ، } \cdots \cdots$

ثم حقق النتائج التى تحصل عليها بالجمع العادى .

١٤ — أوجد الحد النونى ومجموع ن من الحدود لكل من المتسلسلات الهندسية السابقة.

١٥ — أدخل عددين بين ٥ ، ٦٢٥ بحيث تكون الاعداد الأربعة متسلسلة هندسية . تسمى هذه العملية أحيانا عملية إدخال وسطين هندسيين بين ٥ ، ٦٢٥ .

١٦ — أدخل ثلاثة أوساط هندسية بين $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{162}$.

١٧ — أوجد الصيغة التى تستعمل لإدخال ن من الاوساط الهندسية بين عددين أولهما ا وثانيهما ل .

١٨ — كون متسلسلة هندسية حدها الاول ا وفيها ر (المذكورة فى صيغة تمرين ١٢) كسر أقل من الواحد . أكتب عشرة حدود للتسلسلة . ماذا تتوقع أن يكون الحد الأخير للمتسلسلة إذا استمررت فى كتابة حدودها ؟

١٩ — اذا علم أنه اذا أمكن جعل كمية ما صغيرة صغراً كافيا فإنه يمكن اهمالها بجانب كميات لها قيم ثابتة . هل يمكن باختبار الصيغة الموجودة فى تمرين (١٢) البرهنة على أن مجموع متسلسلة هندسية متناقصة . ذات عدد لانهائى من الحدود، لا يمكن أن يزيد على $\frac{ا}{1 - ر}$ (ا الحد الاول ، ر أساس المتسلسلة)

٢٠ — يمكنك أن تكتب أى كسر دائرى بالطريقة الآتية

$0,666 \cdots \cdots = 0,6 + 0,06 + 0,006 + \cdots \cdots$

استخدم هذه النتيجة لكتابة الكسور الدائرية الآتية بدلالة كسور صحيحة

$\dot{٠,٦}$

٠,٢٥٢٥٢٥ ..

٠,٧٩١ ٧٩١ ٧٩١ .. ..

٢١ — إذا كان $\frac{ا}{١ - ر}$ هو مجموع متسلسلة هندسية متناقصة ا ، ا ر ، ا $ر^{٢}$ ، .. .. إلى ما لا نهاية ، لأنه مهما جمعنا أى عدد من حدود المتسلسلة فأنه يقترب من $\frac{ا}{١ - ر}$ ولا يمكن أن يزيد عليه ، فأوجد مجموع المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إلى ما لا نهاية :

$١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤}$

$١ + \frac{٢}{١٠} + \frac{٤}{١٠٠} + \frac{٨}{١٠٠٠} + ...$

٢٢ — أوجد الحد النونى :

ا — فى متسلسة الأعداد المسدسة .

ب — فى متسلسة الأعداد النجمية (شكل ٧٧) .

٢٣ — أوجد بالتجربة (الرسم) والقانون عدد الترتيبات المختلفة للأربعة آسات فى حزمة ورق اللعب . الأربعة آسات والأربع باشات ، وجميع ورق الأنواع الثلاث للصور ، وجميع الأوراق التى أقل من ٦ (باستثناء الآسات) .

٢٤ — أوجد عدد الطرق المختلفة للاختيار من حزمة كاملة من أوراق اللعب دون النظر إلى الترتيب (أعنى توافيق من أوراق اللعب) ، وذلك بأخذ :

ا — ثلاثة أوراق يمكن أن يكون من بينها باش أو بنت .

ب — أربعة أوراق يمكن أن يكون من بينها باش أو بنت أو أعرج .

حـ ــ خمسة أوراق يمكن أن يكون من بينها باش أو بنت أو أعرج أو آس .
مستخدما الرسم لتحقيق القانون .

٢٥ ــ ماهى عدد الدقات المختلفة التى يمكن الحصول عليها باستخدام ستة أجراس جميعها مختلفة ؟

٢٦ ــ ماهى عدد الإصابات التى يمكن الحصول عليها من :

ا ــ ثلاث رميات لزهر .　　　ب ــ خمس رميات لزهر .

٢٧ ــ جمعية مكونة من رئيس وسكرتير وأمين صندوق وأربعة أعضاء . ماهى عدد الطرق المختلفة التى يمكن أن يجلسوا بها بجانب دائرة على الرصيف وبشرط أن يكونوا خلف المتكلم ومع العلم بأنه :

ا ــ لاتوجد أماكن محجوزة　　　ب ــ المكان المتوسط محجوز للرئيس .

حـ ــ يجب أن يجلس السكرتير وأمين الصندوق على جانبي الرئيس الذى يشغل المكان الاوسط .

ء ــ يجلس السكرتير على يمين الرئيس الذى يشغل المكان الاوسط وأمين الصندوق على يساره .

٢٨ ــ تحتوى حقيبة على ست كراسات ملونة ومختلفة . ما هى عدد الأزواج المختلفة من لونين التى يمكن سحبها بحيث أن :

ا ــ كل زوج يحل محله آخر　　　ب ــ كل زوج يترك متى سحب ؟

بعض الصيغ الهامة

١ ــ مجموع متسلسلة حسابية عدد حدودها ن حدها الأول ا وحدها الأخير ل يساوى $\frac{ن}{٢}$ (ا + ل)

إذا كان ء يساوى الفرق بين أى حدين متتاليين فإن المجموع يساوى

$$\frac{ن}{٢}\left\{ ٢ا + (ن - ١) ء \right\}$$

٢ ــ مجموع متسلسلة هندسية حدها الأول ا وأساسها ر وعدد حدودها ن يساوى $\frac{ا(ر^{ن} - ١)}{(ر - ١)}$.

إذا كان ر كسراً موجباً أقل من الواحد فإن مجموع المتسلسلة إلى ما لا نهاية يساوى $\frac{ا}{١ - ر}$

٣ ــ عدد توافيق ن من الأشياء مأخوذة ر كل مرة هو

$$\frac{ن(ن - ١)(ن - ٢) \cdots \cdots (ن - ر + ١)}{ر!} \quad \text{أو} \quad \frac{ن!}{(ن - ر)!\, ر!}$$

٤ ــ عدد تباديل ن من الأشياء مأخوذة ر كل مرة هو $\frac{ن!}{(ن - ر)!}$

تذييل :

اعتبر المتسلسلة $١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥} + \cdots \cdots \cdots \cdots$

هذه المتسلسلة ليس لها نهاية لأنه مهما أخذنا أى عدد من الحدود فإننا نجد على الدوام عدداً من الحدود مجموعها أكبر من $\frac{١}{٢}$.

نفرض أنه أمكن جمع ن من الحدود . نعلم أن الحدود التي عددها ن وتلى الحدود النونية الأولى هى :

$$\frac{١}{\text{ن} + ١} + \frac{١}{\text{ن} + ٢} + \cdots + \frac{١}{٢\text{ن}}$$

وأصغر هذه الحدود هو $\frac{١}{٢\text{ن}}$ وعلى ذلك فمجموع المتسلسلة أكبر من

$$\text{ن} \times \frac{١}{٢\text{ن}} = \frac{١}{٢}$$

أى أن مجموع المتسلسلة أكبر من $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + \ldots$ إلى ما لا نهاية .

أى أن المتسلسلة ليس لها نهاية .

أما أن متسلسلة لها نهاية فمجموع أى عدد من حدودها بعد حد خاص يصغر على الدوام حتى فى النهاية يمكن إهمال مجموعها .

الباب السادس

«سعة الكون»

أو

«ما نستفيده من حساب المثلثات»

فى سنة ٣٣٢ ق م . استسلمت مصر إلى الاسكندر الأكبر وبنيت الاسكندرية حيث يصب النهر المقدس فى البحر الأبيض المتوسط تخليداً لذكرى هذا الفاتح . ثم نزح إلى الاسكندرية جمهرة من المصريين والإغريق واليهود وأقاموا بها وتركزت فيها علوم العالم القديم بأسرها وفنون الطب والصباغة والآلات والملاحة .

وتوفى الاسكندر سنة ٣٢٣ ق . م . فاصبحت مصر دولة مستقلة تحت حكم الجنرال الاسكندرى «بطليموس» الذى ظلت عائلته متربعة على عرش مصر حتى افتتحها الرومان . وقد خلد هذا الأخير «بطليموس» ذكراه بأن أنشأ أول مركز نظامى للمعرفة الدنوية الضرورية يحوى المتحف والمكتبة والجامعة .

وشهدت الثلثمائة سنة التى انقضت قبل أن تحرق مكتبة الإسكندرية الأولى عند مجىء جيوش قيصر أزدهاراً عقليا ربما كان أكثر النهضات العلمية فى التاريخ دعوة إلى الدهشة والإعجاب ، ولا يدانيه فى ذلك إلا الاربعمائة سنة التى انقضت من سنة ١٥٤٣ عندما ذاعت مؤلفات كوبيرنيكوس وفيساليوس وسنة ١٩٣٣ عندما أحرق الرخستاغ .

وظلت الاسكندرية مركز الثقافة العقلية للعالم المتحضر خلال حكم الرومان ، كما بقيت كما هى من حيث كونها المركز الكبير للحرف والميناء الهام على البحر الأبيض المتوسط . كما شيدت بها مكتبة ثانية . وقد طرأت نوبة نشاط وجيزة فى الرياضيات والطب فى القرنين الثانى والثالث بعد الميلاد قبل أن تصبح المسيحية الديانة الرسمية .

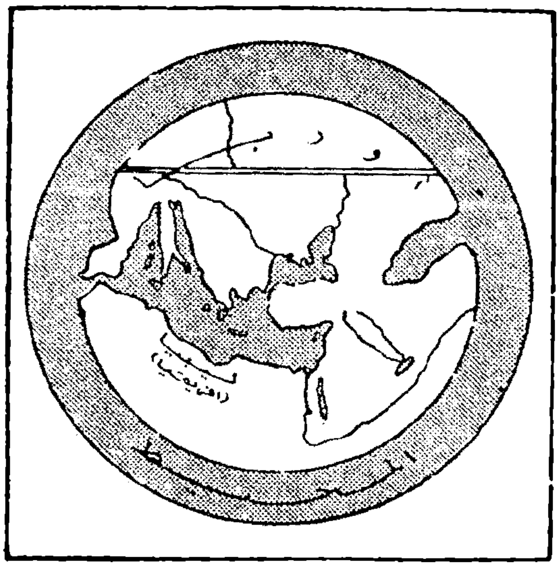
واستأصل رجال « سنت سيريل » مدارس العلم الوثنية وجردوا المكتبة الثانية من محتوياتها القيمة وحشدوا فيها نفاية من كتب الخرافة التى بقيت حتى أبادها الفاتحون المسلمون فى القرن السادس الميلادى ، وقد ظلت ثقافة الاسكندرية فى جميع مراحلها متميزة عن الثقافات الإغريقية والرومانية وقد كانت الاسكندرية فى الواقع وطنا شائعا رفيعاً للجميع إذ كانت تستمد اشخاصها من ممالك وأجناس مختلفة كل الاختلاف .

وقد كان إحراق المكتبة الأولى للاسكندرية كارثة محققة ولكن انهيار الطور الثانى من ثقافة الاسكندرية يجب ألا ننظر إليه على الضوء السابق ، فقد كانت هذه الثقافة قد بلغت أقصى ما يمكن أن تصل إليه فى حدود مجتمعها ، وكان أى تقدم آخر متوقفا على توحيد جديد ، وقد كان الانفجار الإسلامى الآلة اللازمة لذلك . فقد جاءت الثقافة العربية بتوحيد مجرى المعرفة الإنسانية ، لغة الأرقام الشرقية مع الرياضيات الكلاسيكية الغربية .

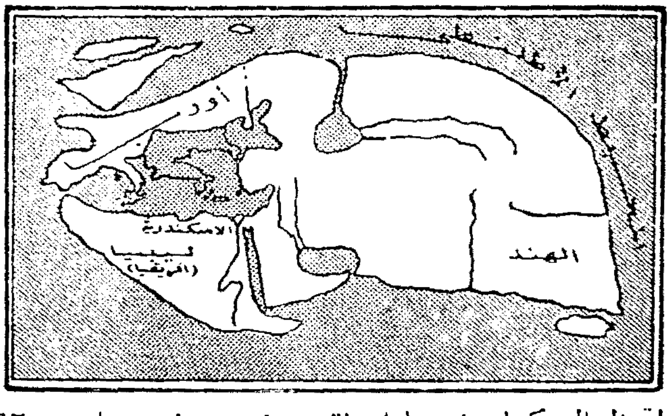
وقد تميز الطور الأول من أطوار ثقافة الاسكندرية باختراع حساب المثلثات الذى رد إلى الهندسة القياس والعد/ وكان الطور الثانى نتيجة طبيعية للأول فقد كان الناس يستعملون الأعداد فى نطاق واسع ، فإلى جانب القياسات الفلكية كانت فتوحات الاسكندر والمبالغ الطائلة التى صرفت فى تشييد مقبرة هيفايستثون قد زالت عنها هيبتها ، حتى صار لاغنى عن نوع جديد من الحساب . وعندما يسدل الستار على الطور الأخير من أطوار ثقافة الاسكندرية نجد الرياضة منهمكة فى مسألة « الحساب » تتلمس طرقا جديدة ولكنها لاتزال مكبلة بالكتابات القديمة التى حالت دون التقدم الحقيقى

والسر فى كلا حركتى التقدم أن الرياضة كانت فى اتصال حيوى مع الأعمال اليومية . وقد اشتهر فى بداية جامعة الاسكندرية ارسترخس من ساموس (٣١٠ — ٢٥٠ ق . م .) وارشميدس من سيراكوز (٢٨٧ — ٢١٢ ق . م .) وقد كان ارسترخس أول من قدر النسبة بين بعدى الشمس والقمر عن الأرض . أما ارشميدس فإنه أول من بين كيف تحسب قيمة النسبة التقريبية « ط » بدرجة الدقه التى نحتاج اليها ، وقد كان اهتمامه بالميكانيكا بوجه خاص . ويجب الا يغرب عن بالنا قاعدة الرافعة وقاعدة الاجسام الطافية التى وضعها ، وفى بيانه العلاقة بين الوزن والبعد عن محور

الارتكاز لم يكن منغمساً فى الأمانى الأفلاطونية للكمال الروحى وتهذيب العقل بل كان يستعمل معلوماته فى تصميم المنجنيقات التى استعملت ضـــد الجيوش الرومانية — واستعمل مثلها الجنود الرومان — كما استعمل معلوماته عن الـكشافة فى التعرف على درجة نقاء المعادن الثمينة . وقد ساير حساب قيمة ط ادخال الآلات التى تستعمل



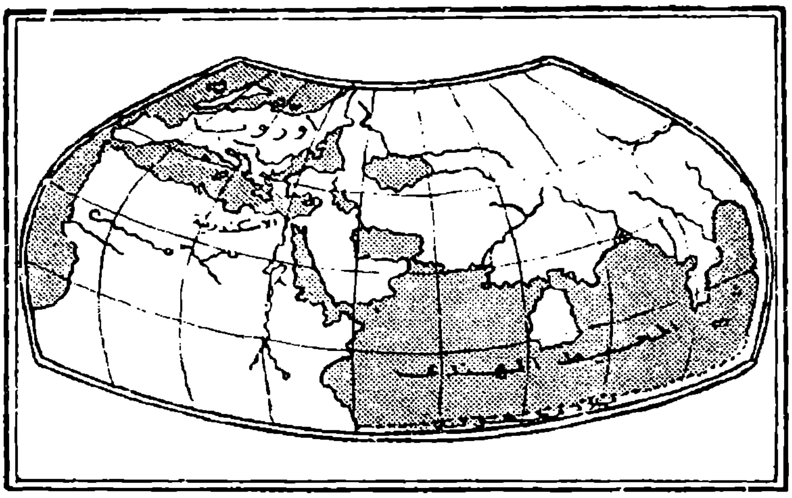
خريطة العالم كما وضعها هيكاتابوس عام ٥١٧ق.م
وترينا الآراء البدائية التى سادت فى عصر فيثاغورس



خريطة العالم كما وضعها ايراتوستينس نحو عام ٢٥٠ق.م
شكل (٨١) : بداءة رسم الخرائط

فيها العجلة . وقد ساعد ارشميدس على انزال المراكب إلى الماء بأن اقترح استعمال التروس كما ابتكر آلة للرى تعتمد على دوران بريمة الطنبور وقليل جداً منا من يدرك علو المستوى الذى بلغه فن الميكانيكا فى العالم الاسكندرى . وفى حوالى عام ١٠٠

ق . م . ألف هيرو الاسكندرى كتابا وصف فيه القواعد التى يستند عليها تركيب حوالى مائة آلة كان من بينها سيكلومتر و ثيودوليت ومضخة مزدوجه وأول نموذج للآلة البخارية ، ولم يكن الصانع النابه وقتئذ مقيـــداً بالفلسفة التى تقول بتحطيم الالآت ، تلك الفلسفة التى تحجب الآن ثقافة غرب أوروبا ، فقد كان كل اختراع يلاقى الترحيب اللائق .



خريطة العالم كما وضعها بطليموس نحو عام ٢٠٠ بعد الميلاد
شكل (٨١) أ : بداءة رسم الخرائط

والحلقة الجوهرية التى تربط رياضيات الإسكندرية بالعالم الحقيقى واضحة لو علمنا أن هيباركس وضع قائمة بها ١٠٨٠ من النجوم الثابتةوأن أرشميدس صنعأول نموذج معروف يتمثل فيه دوران الكرة السماوية وتغير مواضع النجوم بواسطة دوران عجلة . ومن المحتمل أن يكون قد استعملت فى بادىء الأمر جداول للزوايا شبيهة بالجدول الذى ورد بالباب الرابع . كما وضع هيباركس الفلكى الذى عاش بعد ذلك بمائة سنة (حوالى ١٥٠ ق . م .) جدولا لجيوب الزوايا استعمله فى إيجاد بعد القمر عن الأرض . وعندما أصبحت الإسكندرية جزءاً من الإمبراطورية الرومانية كانت أبعاد الشمس والقمر عن الأرض وكذلك محيط و نصف قطر كل من الأرض والشمس والقمر كلها قد تحددت ولا تختلف القيمة الحقيقية لمحيط الأرض عن تلك القيمة التى عينها إيراتوسثينس (٢٧٥ — ١٩٤ ق . م .) وبوسيدونيوس (حوالى ١٠٠ ق . م .) إلا بنحو من خمسين ميلا . وقد عمل هيباركس (أنظر الباب

الثامن) خرائط للنجوم استخدم فيها خطوط الطول وخطوط العرض. كما بدأ مارينوس، من صور (حوالى ١٥٠ بعد الميلاد) إنشاء خرائط مبينا عليها خطوط الطول وخطوط العرض على سطح الارض . ويمكن للقارىء أن يرى صورة جلية للعلاقة الشديدة بين التقدم السريع فى علم الفلك والتقدم العملى فى الملاحة ومسح الأراضى خلال هذه الفترة إذا أمعن النظر فى خرائط الأرض الثلاث فى شكل ٨١ ، ١٨١ فالأولى تمثل الدنيا كما عرفها الإغريق ، والثانية تبين الأرض كما عرفت فى حوالى سنة ٢٠٠ ق.م. وذلك عندما قاس ايراتوستينس محيط الارض ، وأما الثالثة فهى التى رسمها بطليموس (حوالى ١٥٠ ب . م .) الذى عاش فى الطور الثانى للثقافة الإسكندرية . وأعمال بطليموس الرئيسية هى جمع وتنسيق مبنى على أعمال هيباركس ومعاصريه .

ولو رجعنا الى شكل ٥٣ وتذكرنا كيف نقيس ارتفاع صخرة دون أن نقترب من قاعدتها لرأينا أن قياس أبعاد الأجسام السماوية أمر ممكن مادام يمكننا تقدير زاويتين بواسطة الاسترولاب والبعد بين مكانى الرصد ، والواقع أنه ليس من الضرورى أن نقيس هذه المسافة اذا كنا نعرف نصف قطر الأرض وخطى طول وعرض كل من المكانين . وقد ربطت قياسات الأرض التى وضعها ايراتوستينس قواعد الهندسة بالجغرافية والفلك، والغريب فى هذا الربط هو بساطته فهو لا يحتاج الا إلى أربع اعتبارات بسيطة هى :

(أ) إن الاشعة الضوئية الآتية من مصدر بعيد تظهر متوازية وقد كان هذا أمراً مألوفا فى الأيام القديمة كما لاحظنا سابقاً .

(ب) أنه اذا عبر خط خطين متوازيين فإن الزوايا المتناظرة تكون متساوية

(حـ) : أنه اذا وقع جسم سماوى فوق رأس الراصد مباشرة (أى كان فى سمت الرأس) فإن الخط الذى يصل ذلك الجسم بالراصد يمر بمركز الارض (أنظر شكل ٥٨)

(د) : أنه عند الظهر تقع الشمس فوق إحدى نقط خط الطول الذى عليه الراصد (شكلا ٦٢ ، ٦٣) .

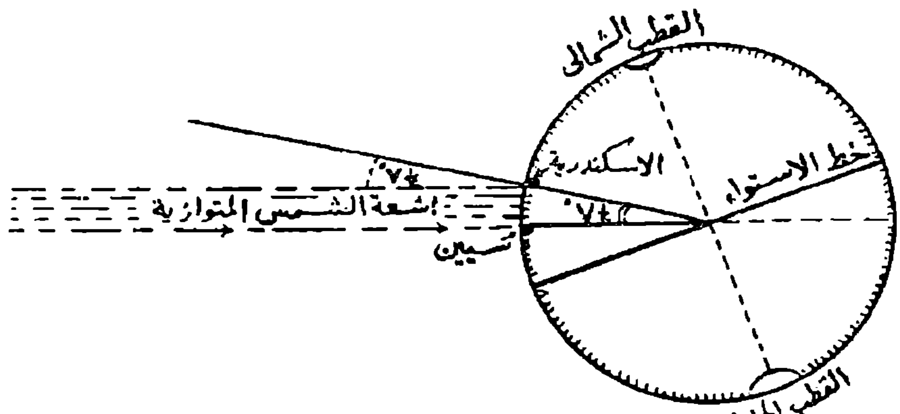
وكان ايراتوستينس أميناً لمكتبة الإسكندرية فتمكن بحكم منصبه من الوصول إلى سجلات الحوادث الهامة المتعلقة بالأعياد وتقويمها ومن ثم علم أن أشعة الشمس

تعكس عند ظهر يوم معين من أيام السنة من بئر عميق بجانب سيين (واسمها الحالى أسوان) عند الشلال الأول للنيـــل ، وهى تقع عند نهاية المنطقة الاستوائية ، ولذا يختفى الظل فى وقت معين من السنة عندما تكون الشمس فى سمت الرأس عند الظهر ، ويبين انعكاس الأشعة من البئر الوقت الذى تكون فيه الشمس عمودية تماما على الأفق بينما يبين ظل عمود فى الظهيرة وفى نفس اليوم فى الاسكندرية أن الشمس جنوب الرأسى بقدر ٧½° . وتقع الأسكندرية شمال سيين بقدر خمسمائة ميل . فإذا كانت أشعة الشمس متوازية فإن هذا يدل على أن قوسا من دائرة طوله ٥٠٠ ميل يقبل عند مركزها ٧½° . ولما كانت ٣٦٠° تحوى ٧½° خمسين مرة تقريبا نستنتج أن محيط الأرض خمسون ضعفا من ٥٠٠ ميل أى ٢٥٠٠٠ ميلا . ومن ثم يمكننا استنتاج نصف قطر الأرض إذا استخدمنا القيمة المقربة للنسبة التقريبية ط التى أعطاها أرشميدس وذلك بقسمة محيط الدائرة على ٢ ط . فإذا اعتبرنا ط = ٣⅐ لكان

$$\text{نصف القطر نق} = \frac{٧ \times ٢٥٠٠٠}{٢٢ \times ٢} = \frac{١٧٥٠٠٠}{٤٤}$$

وهذا يقرب من ٤٠٠٠ ميلا .

(أ) ايراتوستينس



تبعد سيين عن الاسكندرية بمقدارة ٥٠٠ ميلا

(كل من الزاوية بين الاسكندرية وسيين والزاوية بين الاسكندرية وردوس فى الشكل الثانى قد كبرت للتوضيح فقط)

(ب) باستخدام النجم القطبى

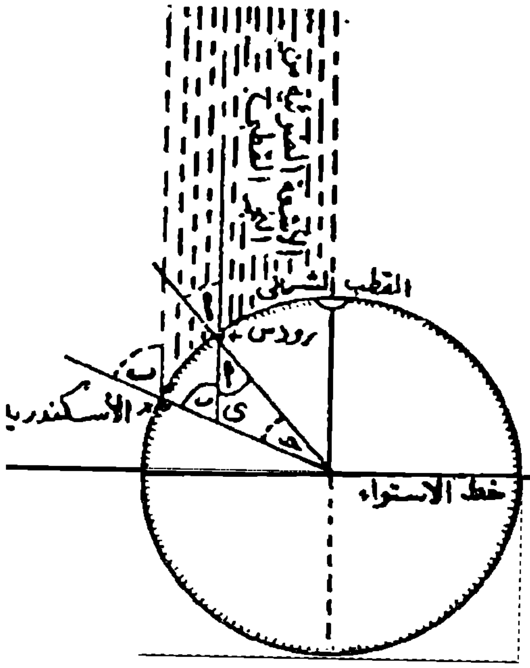
ا + ى + ح = ١٨٠°

∴ ا + ح = ١٨٠ — ى = ب

∴ ا + ح = ب

أو ح = ب — ا

واذن فالقوس الذى يقع طرفاه عند الاسكندرية وردوس (أو أى مكانين يقع أحدهما ٥٠٠ ميلا شمال الآخر) يقابل عند مركز الأرض زاوية تساوى الفرق بين البعدين السمتيين للنجم القطبى عند هذين المكانين . فاذا كانت ف المسافة مقيسة نحو الشمال فان محيط الأرض يساوى (ف × ٣٦٠) / ح



شكل (٨٢) : قياس أبعاد الأرض (أنظر أيضا شكل ١٠٧)

وقد استخدم بوسيدونيوس حقيقة كون النجم سهيل على الأفق عند بلده رودس فى نفس الوقت الذى يكون فيه فوق الأفق بقدر سبع درجات و نصف عند الإسكندرية. وهذه الطريقة فى جوهرها هى نفس الطريقة التى اتبعها فلكيو العرب الذين عينوا محيط الأرض بقياسهم زاوية ارتفاع النجم القطبى ولم تختلف نتائج هذه الحسابات عن نتائج ايراتوسثينس إلا بقدر صغير جداً . وبذلك استطاع الإنسان بتطبيقه علم الهندسة على الكرة الأرضية أن يعرف مقدار ما بقى من سطح الأرض لإكتشافه .

ويداخلنا بعض الشك فى ما تعنيه لفظه « ستاديا » ، وهى المقياس الذى قاس به ايراتوسثينس المسافة بين الاسكندرية وسيين إذ لا ندرى أهى تعنى القياس الذى استخدم فى الاولمبيات أم المقياس المصرى المسمى « ستاديوم » ، والأرجح أنها تعنى

الأخير ، فإذا صح ذلك لما كان فى تقديره خطأ سوى خمسين ميلا . وقد أدى الاهتمام بالنظريات عند الرجوع إلى عقيدة ارسترخس أو فى الحقيقة فيثاغورس عندما اكتشف كوبير نيكوس وكبلر اكتشافات جديدة عن حركات الكواكب ، أدى ذلك الاهتمام بالعلم النظرى إلى حجب القيمة العملية الهائلة لفلك بطليموس عن الأبعاد وكان ذلك يدرس يومئذ فى جامعات المور فى قرطبة وسيفيل وتوليدو كما استخدمه الفلكيون اليهود الذين بقوا فى البرتغال واسبانيا بعدما طرد المور من أوربا إذ نجده الأساس الذى بنيت عليه الجداول الفلكية التى أعدها اليهود لاستعمالها فى سفن هنرى الملاح وفى رحلات كولمبس .

وقياس محيط الأرض يعتمد على استعمال غاية فى البساطة لمبادىء الهندسة . وهو يستلزم كوننا نستطيع أن نقيس البعد بين مكانين على سطح الأرض . وعندما نحاول أن نقيس بعد الشمس أو القمر عن أرضنا نبدأ بمثلث أحد أضلاعه مسافة نحددها على سطح الأرض ثم نحسب النسبة بين طول كل من الضلعين الآخرين والبعد الذى حددناه . وهذا نستطيع عمله باستخدام عمليتى ٧ ، ٨ بشرط أن نستطيع قياس زاويتين من زوايا المثلث وتكفى زاوية واحدة إذا كان المثلث قائم الزاوية . وعندما تحقق الناس أن ذلك فى الإمكان وشرعوا فى اجرائه صارت الخطوة التى لم يقدم عليها الإغريق محتمة عليهم . فشرع الاسكندريون فى عمل جداول تعطى نسب الأضلاع فى المثلثات القائمة الزاوية . وعلى ذلك استخدم الاسكندريون ما عمله الاغريق من نظريات هندسية استخداما عمرانيا عندما أدخلوا « القياس العددى » عليها فانتجوا حساب المثلثات . وسنترك هنا موضوع قياس الأبعاد السماوية ريثما نشرح كيف عملت أول جداول لحساب المثلثات من الجيوب وغيرها .

كيف حسب أول جدول للجيوب :

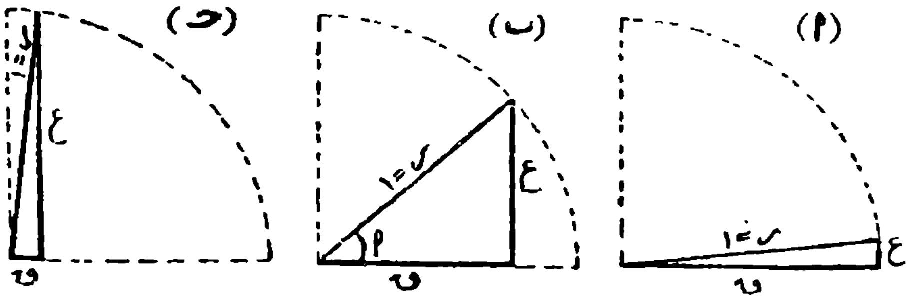
بالرجوع إلى شكلى ٤٢ ، ٥٠ نذكر أن

جا ا = جتا (٩٠° — ا) .

جتا ا = جا (٩٠° — ا) .

وباستخدام هذين القانونين يمكننا الحصول بسهولة على النسب المثلثية للزوايا

القريبة من الصفر أو ٩٠°. لذلك نرسم مثلثا قائم الزاوية زاويته ا عند مركز دائرة نصف قطرها هو وتر المثلث وطوله الوحدة (أنظر شكل ٨٣) فيكون



شكل (٨٣) : النسب المثلثية للزوايا الصغيرة . ألخ

نصف قطر الدائرة هو وتر المثلث ر ويساوى الوحدة

وإذن جا ا $=\frac{ع}{ر}=$ ع ، جتا ا $=\frac{ن}{ر}=$ ن .

جا ا = ع ،

جتا ا = ن ،

فإذا صغرت الزاوية المركزية ا تدريجيا إلى أن قربت جداً من الصفر (كما فى شكل ٨٣ ا) فإن ن تكبر تدريجيا . إلى أن تقرب جداً من ر ، وإذن عندما ا = صفراً فإن ن = ١ ونحصل على

جتا صفر = ١

وفى نفس الوقت تنعدم ع وإذن

جا صفر = صفراً

وإذا كبرت الزاوية المركزية ا تدريجياً (كما فى شكل ٨٣ حـ) حتى أصبحت قريبة جدا من ٩٠° فإن ع تكبر تدريجيا حتى تصبح قريبة جدا من ر ، وإذن عندما ا = ٩٠° فإن ع = ١ ونحصل على

جا ٩٠° = ١

وفى نفس الوقت تصغر ن تدريجياً إلى أن تنعدم ، وإذن

جتا ٩٠° = صفراً .

ولقد يدهش القارىء إذ نتكلم عن النسبة بين أضلاع مثلث إحدى زواياه تساوى صفرا أو فيه زاويتان قائمتان لأن مثل هذا المثلث ليس مثلثا بالمعنى المفهوم ولكن تزول دهشة القارىء إذا اقتنع أن المثلثات ليس من صفاتها الكمال وإذا لم يغرب عن باله أنه يستخدم أدوات غير معصومة من الخطأ فى قياس حاجيات دنيا مملوءة بالنقائص . ونحن لا يعنينا أن ندرس العدم المطلق وإنما يهمنا أن ندرس الحالة التى تكون فيها إحدى الزوايا صغيرة صغراً يجعلنا لا نستطيع قياسها بأدواتنا المعتادة أو الحالة التى فيها تقرب الزاوية من ٩٠° قربا يجعل الفرق بينها وبين ٩٠° لا يمكن قياسه بتلك الأدوات . ويدرك القارىء أن هذه العبارات ليست خاطئة إذا أخذ بالحقيقة الواقعة وهى أن جيب تمام الزاوية ا يكون قريبا جدا من القيمة ١ عندما تكون ا صغيرة جدا . وبما أن جا (٩٠°—ا) = جتا ا ، إذن جا (٩٠°—ا) تكون قريبة جدا من القيمة ١ عندما تكون ٩٠° — ا قريبة جدا من ٩٠° أى عندما تكون ا صغيرة جداً . وبالعكس إذا كانت جا ا قريبة جداً من القيمة ١ عندما تكون ا قريبة جداً من ٩٠° فإن جتا ا يجب أن تكون قريبة جداً من القيمة ١ عندما تكون ا صغيرة جداً وذلك لأن جتا ا = جا (٩٠° — ا) .

وظل الزاوية ا هو $\frac{ع}{ن}$ وحيث أن ع تصغر تدريجيا كلما تقرب ا من الصفر فإن

طا صفر = صفرا .

وعندما تقرب ا من ٩٠° تكبر ع وتتناقص ن حتى تصبح النسبة $\frac{ع}{ن}$ أكبر من أى كمية محدودة فإذا كنا نعبر عن الكمية التى هى أكبر من أى كمية محدودة بالرمز ∞ فإن :

طا ٩٠° = ∞ .

وهاتان النتيجتان يمكن الحصول عليهما أيضا من القانون

$$طا\ ا = \frac{جا\ ا}{جتا\ ا}$$

لأنه إذا كانت ا تساوى صفرا فإن طا ا تساوى صفرا مقسوماً على ١ أى تساوى صفرا ، أما إذا كانت ا تساوى ٩٠° فإن طا ا = ١ مقسوما على صفر أى مقسوما على كمية صغيرة صفراً يجعلنا لا نستطيع قياسها ، فهذه الكمية الصغيرة يجب أن تضرب فى كمية كبيرة جداً لا نستطيع قياسها حتى يصبح حاصل الضرب ١ . ويمكننا الآن أن نكتب الجدول المعطى من قبل بعد إضافة النسب المثلثية الخاصة بالزاويتين صفر ، ٩٠° هكذا :

الزاوية ا°	جا ا	جتا ا	طا ا
٩٠	١	صفر	∞
٦٠	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$
٤٥	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	١
٣٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
صفر	صفر	١	صفر

ويحسن بنا أن نضع هذه الأعداد على الصورة العشرية المتداولة الاستعمال ، فمن جدول الجذور التربيعية للأعداد نجد أن $\sqrt{٢}$ = ١,٤١٤ مقربة إلى ثلاثة أرقام عشرية أى مايعادل استخدام آلة لايتجاوز الخطأ فيها عن واحد فى الألف . بالمثل نجد $\sqrt{٣}$ = ١,٧٣٢ ويأخذ الجدول الصورة الآتية :

الزاوية ا°	جا ا	جتا ا	طا ا
٩٠	١,٠٠٠	٠,٠٠٠	∞
٦٠	٠,٨٦٦	٠,٥٠٠	١,٧٣٢
٤٥	٠,٧٠٧	٠,٧٠٧	١,٠٠٠
٣٠	٠,٥٠٠	٠,٨٦٦	٠,٥٧٧
صفر	٠,٠٠٠	١,٠٠٠	٠,٠٠٠

ولكى نضيف إلى هذا الجدول النسب المثلثية لبعض الزوايا الأخرى نتبع

نفس الطريقة التى استخدمناها فى تدريج الظل (شكل ٦٦) والتى تعتمد على عملية ١١ . ففى شكل ٨٤

$$\text{جا } ٣٠° = \frac{\text{اب}}{\text{اجـ}} \text{ ، جا } ١٥° = \frac{\text{اب}}{\text{اء}}$$

وإذن $$\frac{\text{جا } ١٥°}{\text{جا } ٣٠°} = \frac{\text{اجـ}}{\text{اء}}$$

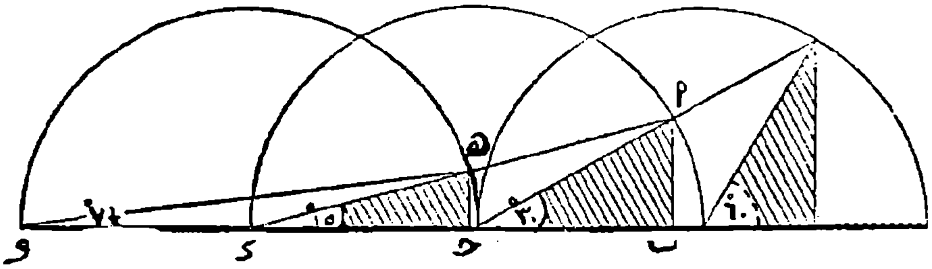
وبما أن $$\text{جا } ٣٠° = \frac{١}{٢}$$

فإن $$\text{جا } ١٥° = \frac{\frac{١}{٢} \text{ اب}}{\text{اء}}$$

وفى الرسم الأصلى لشكل (٨٤) كانت الأبعاد هكذا : اجـ = ٦,٢ سم ، اء = ١٢,٢ سم ومنها جا ١٥° = ٠,٢٥٨ . بالمثل

$$\text{جا } ٧\frac{١}{٢}° = \frac{\text{٢٥٨, هـ ء}}{\text{هـ و}}$$

وقد كانت الأبعاد فى الرسم الأصلى هى : هـ و = ١٢,٤ سم ، هـ ء = ٦,٣ سم ومنها جا $٧\frac{١}{٢}°$ = ٠,١٣١

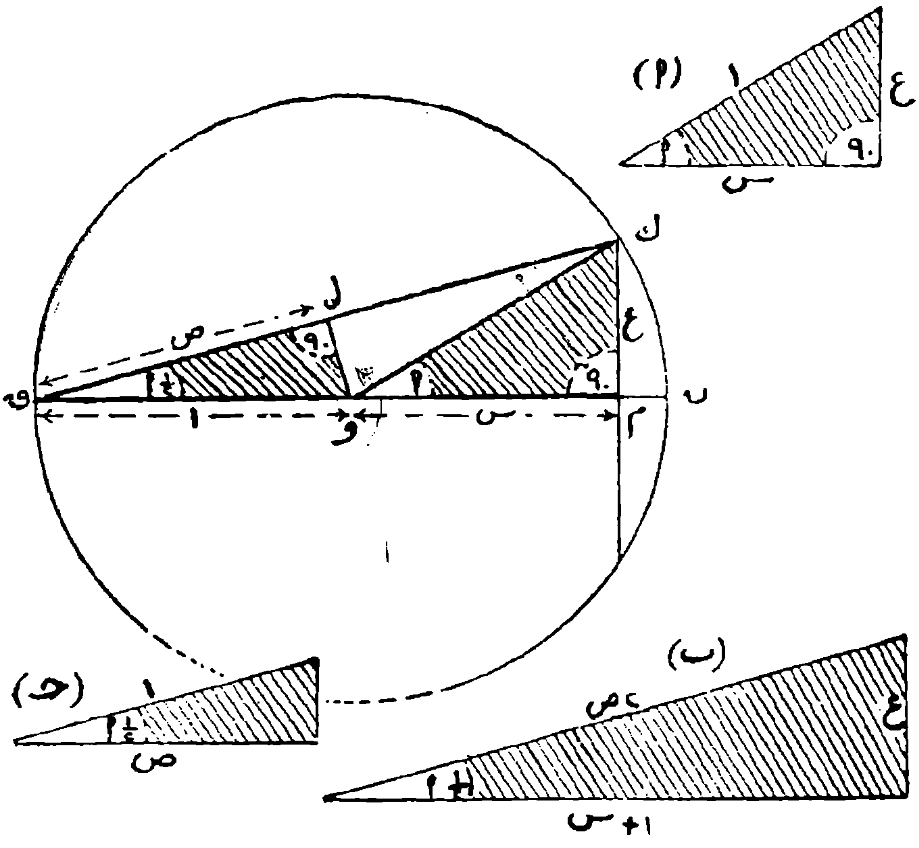


شكل (٨٤) ايجاد جيوب الزوايا بواسطة الرسم

وأفضل طريقة يمكن للقارىء أن يدرس بواسطتها الجيوب وجيوب التمام والظلال هى أن يعمل بنفسه جدولا يتضمن هذه النسبة المثلثية لجميع الزوايا المشار إليها فى

شكلى ٦٥ ، ٦٦ بالباب الرابع . وعند إتمام هذا الجدول يصبح القارىء على أهبة تامة لتقدير الخطوة القادمة ، فبإمعان النظر فى شكل ٨٤ يمكننا أن نستنتج طريقة مبسطة — لا نضطر فيها إلى رسم مثل هذا الشكل — لحساب قيم جيوب الزوايا ... الخ . وفى هذه الطريقة نعتمد على قيم النسبة المثلثية لبعض الزوايا التى قد سبق تدوينها فى الجدول السابق . وهذه الطريقة التى سنشرحها فيما يلى هى التى حسب بها هيباركس أول جدول للنسب المثلثية .

من شكل ٨٥ نرى أنه يمكننا معرفة جيب أو جيب تمام نصف الزاوية إذا نحن



شكل (٨٥) : جيوب أنصاف الزوايا

نعتمد فى رسم هذا الشكل على عملية ١١ ومنها نرى أن ∠ك ن و تساوى نصف الزاوية المركزية ك و م أى تساوى ½ أ . أما نصف قطر الدائرة (و ن ، و ك ، و ه) فيساوى الوحدة . وحيث أن و ن يساوى و ك فانه ينتج — من عملية ٦ — أن

∠ن ك و = ∠ ك ن و = ½ أ

وإذن ∠ ن و ل = ٩٠° — ½ أ

علمنا جيب اوجيب تمام الزاوية نفسها . وقد اعتمدنا فى رسم هذا الشكل على عملية
١١ إلا أننا نزيد على ذلك أننا نقسم المثلث ن ك و إلى مثلثين كل منهما قائم الزاوية وذلك بأن نرسم ول عموديا على ن ك . والمثلثان ون ل ، و ك ل متطابقان بنظرية
٢ لأنه فيهما :

$$\text{ل و} = \text{ل و}$$

$$\text{والزاوية المحصورة ل و ن} = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\,\text{ا} = \text{ل و ك} .$$

$$\text{و ن} = 1 = \text{و ك}$$

فاذا كان ن ل = ص فان ن ك = ٢ ص وبما أن نصف قطر الدائرة هو الوحدة فان و ك = و ن = ١

$$\text{جتا ا} = \frac{\text{س}}{\text{و ك}} = \text{س} \qquad (1)$$

$$\text{جتا } \tfrac{1}{2}\,\text{ا} = \frac{\text{ن م}}{\text{ن ك}} = \frac{1+\text{س}}{2\,\text{ص}} \qquad (2)$$

ومن المثلث ن ول

$$\text{جتا } \tfrac{1}{2}\,\text{ا} = \frac{\text{ص}}{\text{ن و}} = \text{ص} \qquad (3)$$

وإذن من (١) ، (٢) ، (٣)

$$\text{جتا } \tfrac{1}{2}\,\text{ا} = \frac{1 + \text{جتا ا}}{2\,\text{جتا } \tfrac{1}{2}\,\text{ا}}$$

$$\therefore\ 2\left(\text{جتا } \tfrac{1}{2}\,\text{ا}\right)^2 = 1 + \text{جتا ا}$$

$$\therefore\ \left(\text{جتا } \tfrac{1}{2}\,\text{ا}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(1 + \text{جتا ا}\right)$$

$$\therefore\ \text{جتا ا} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1 + \text{جتا ا}\right)} \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

ويمكننا أن نتحقق من صحة هذه القاعدة بأن نحسب بواسطتها جتا ٣٠° فنجد

جتا ٣٠° = جتا ½ (٦٠°) = $\sqrt{}$ ½ (١ + جتا ٦٠°) = $\sqrt{}$ ½ (١ + ٠,٥)

= $\sqrt{}$ ¾ وإذن جتا ٣٠° = ½ $\sqrt{}$ ٣ وهى القيمة المعروفة من قبل .

بالمثل يمكننا الحصول على قاعدة جيب نصف الزاوية

حا أ = ع

حا ½ أ = ع / ٢ ص = حا أ / ٢ جتا ½ أ ...... (٤)

ويمكننا أيضا التأكد من صحة هذه القاعدة بأن نحسب حا ٣٠° فنجد

حا ٣٠° = حا ½ (٦٠°) = حا ٦٠° / ٢ جتا ٣٠° = ½ $\sqrt{}$ ٣ / ٢ (½ $\sqrt{}$ ٣) = ½

وهى القيمة المعروفة من قبل .

يمكننا أيضاً مقارنة قيمتى جتا ١٥° بالقيمتين اللتين حصلنا عليهما من شكل (٨٤) هكذا

جا ١٥° = جا ½ (٣٠°) = ½ / ٢ جتا ١٥°

جتا ١٥° = جتا ½ (٣٠°) = $\sqrt{}$ ½ (١ + جتا ٣٠°) = $\sqrt{}$ ½ (١ + ٠,٨٦٦)

أى جتا ١٥° = $\sqrt{}$ ٠,٩٣٣ = ٠,٩٦٦

باستخدام جدول الجذور التربيعية للأعداد

وإذن جا ١٥° = ٠,٥ / ٢ × ٠,٩٦٦ = ٠,٢٥٩

وواضح أن هذه القيمة للجيب تختلف عن تلك التى حصلنا عليها من شكل (٨٤) بما يقل عن واحد فى المائة .

وإذا كان القارئ قد اقتنع بصحة قاعدتى جيب وجيب تمام نصف الزاوية فيمكنه أن يعمل الآن جدولا للجيوب مماثلا للجدول الذى عمله هيباركس بالاسكندرية نحو عام ١٥٠ ق . م . إلا أنه عند عمل هذا الجدول الجديد يستخدم القارئ جداول أدق للجذور التربيعية للأعداد كما يستخدم الكسور العشرية .

وحيث أن جتا ١٥° = ,٩٦٦ إذن جا (٩٠° — ١٥°)
أى جا ٧٥° = ,٩٦٦ وحيث أن جا ١٥° = ,٢٥٩ إذن جتا (٩٠° — ١٥°)
أى جتا ٧٥° = ,٢٥٩ . بالمثل نحصل على

جتا ½٧° = جتا ½ (١٥°) = √(½ × ١,٩٦٦) = √,٩٨٣ = ,٩٩١

جا ½٧° = جا ١٥° ÷ (٢ جتا ½٧°) = ,٢٥٩ ÷ (٢ × ,٩٩١) = ,١٣١

أى أن

جتا ½٧° = ,٩٩١ = جا ½٨٢°
جا ½٧° = ,١٣١ = جتا ½٨٢°

وباستخدام جتا ٧٥° = ,٢٥٩ ، جا ٧٥° = ,٩٦٦ نحصل على

جتا ½٣٧° = جتا ½ (٧٥°) = √(½ × ١,٢٥٩) = √,٦٢٩ = ,٧٩٣

جا ½٣٧° = جا ½ (٧٥°) = ,٩٦٦ ÷ (٢ × ,٧٩٣) = ,٦٠٩

أى أن

جتا ½٣٧° = ,٧٩٣ = جا ½٥٢°
جا ½٣٧° = ,٦٠٩ = جتا ½٥٢°

وباستخدام جتا ٤٥° = ,٧٠٧ = جا ٤٥° نحصل على

جتا ½٢٢° = جتا ½ (٤٥°) = √(½ × ١,٧٠٧) = √,٨٥٣
= ,٩٢٤

جا ½٢٢° = ,٧٠٧ ÷ (٢ × ,٩٢٤) = ٠,٣٨٣

أى أن

جتا ٢٢½° = ٫٩٢٤ = جا ٦٧½° .

جا ٢٢½° = ٫٣٨٣ = جتا ٦٧½° .

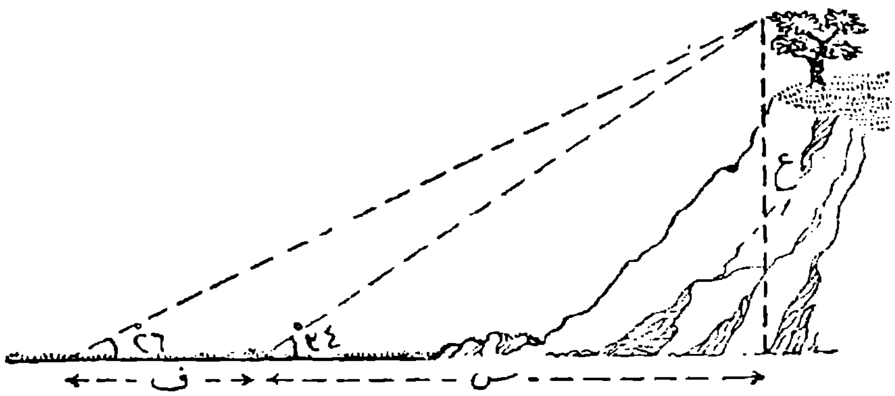
وتدوين هذه النتائج التى حصلنا عليها واضافة الظلال إليها — بعد حسابها من القانون ظا ا = $\frac{\text{جا ا}}{\text{جتا ا}}$ نحصل على الجدول الآتى للنسب المثلثية لمضاعفات الزاوية ٧½° .

الزاوية ا°	جا ا	جتا ا	ظا ا
٩٠	١٫٠٠٠	٠٫٠٠٠	∞
٨٢½	٫٩٩١	٫١٣١	٧٫٥٦
٧٥	٫٩٦٦	٫٢٥٩	٣٫٧٣
٦٧½	٫٩٢٤	٫٣٨٣	٢٫٤١
٦٠	٫٨٦٦	٫٥٠٠	١٫٧٣
٥٢½	٫٧٩٣	٫٦٠٩	١٫٣٠
٤٥	٫٧٠٧	٫٧٠٧	١٫٠٠
٣٧½	٫٦٠٩	٫٧٩٣	٫٧٧
٣٠	٫٥٠٠	٫٨٦٦	٫٥٨
٢٢½	٫٣٨٣	٫٩٢٤	٫٤١
١٥	٫٢٥٩	٫٩٦٦	٫٢٧
٧½	٫١٣١	٫٩٩١	٫١٣
صفر	٠٫٠٠٠	٫٠٠٠	٠٫٠٠٠

بالمثل يمكن عمل جداول للنسب المثلثية لمضاعفات الزوايا ½ × ٧½ = ٣¾ ،

$\frac{1}{2} \times 3\frac{3}{4} = 1\frac{7}{8}$ ، $\frac{1}{2} \times 1\frac{7}{8} = \frac{15}{16}$ ، إلا أن الجدول الأول للجيوب الذى عمله هيباركس لم يذهب الى أكثر مما ذهب الية الجدول السابق . واذا كان القارىء قد حقق بنفسه كل خطوة حسابية سابقة فلا بد أنه يكون قد درس جيداً كيف يكون جدولا للجيوب أو ... الخ ، ولا بد أن تبقى كيفية تكوين هذه الجداول عالقة بذهنه أمداً طويلا .

ونبدأ الآن فى دراسة تطبيقات هذه النسب المثلثية . إن أول تطبيق لها هو فى عمل الخرائط الجغرافية وتخطيط الأراضى . إن الطريقة التى أوجدنا بها ارتفاع الصخرة فى شكل ٥٣ تحتم علينا أن نقترب من قاعدة الصخرة اقترابا يجعلنا نحصل على زاويتى الارتفاع ٣٠° ، ٦٠° وهذا فى الواقع لا يسهل إجراؤه عمليا ، كما أنها تفترض أنه لدينا متسع من الوقت يسمح لنا بأن نسير المسافة بين نقطتى قياس زاويتى الارتفاع ٣٠° ، ٦٠° وهذا بدوره مضيعة للوقت . أما اذا كان لدينا جدول يشتمل على النسب المثلثية للزوايا — وكان الفرق بين كل زاويتين متتاليتين صغيراً — فإنه يمكننا أن نأخذ زاوية الارتفاع من أى نقطة ثم نسير مسافة معلومة فى خط مستقيم ونقيس زاوية الارتفاع من هذا الموضع الجديد . ففى شكل (٨٦) المسافة



شكل (٨٦)

المعلومة هى ف والزاويتان هما ٣٤° ، ٢٦° ومن هذا الشكل يمكننا إيجاد ارتفاع الصخرة ع والمسافة الأفقية س بين الموضع الأول وموقع الصخرة . فمن جدول الظلال

طا ٣٤° = ,٦٧٤ ، طا ٢٦° = ,٤٨٨

فإذا كانت ف = ٦٤ ياردة فإن :

$$\frac{\text{ع}}{\text{س}} = \text{طا } ٣٤^\circ \quad \text{أى س} = \frac{\text{ع}}{,٦٧٤} \quad \ldots \quad (١)$$

$$\text{أيضا} \quad \frac{\text{ع}}{\text{س} + ٦٤} = \text{طا } ٢٦^\circ \quad \text{أى ع} = ,٤٨٨ \, (\text{س} + ٦٤) \quad \ldots \quad (٢)$$

ومن (١) ، (٢) نحصل على

$$\text{ع} = ,٤٨٨ \left(\frac{\text{ع}}{,٦٧٤} + ٦٤ \right) = \frac{,٤٨٨}{,٦٧٤} \text{ ع} + ٦٤ \times ,٤٨٨ \, .$$

$$\text{وإذن ع} - \frac{,٤٨٨}{,٦٧٤} \text{ ع} = ٦٤ \times ,٤٨٨ \, ,$$

$$\text{أى ع} \left(١ - \frac{,٤٨٨}{,٦٧٤} \right) = ٣١,٢٣٢$$

$$\text{أى } ,٢٧٦ \text{ ع} = ٣١,٢٣٢$$

$$\text{وإذن ع} = \frac{٢١,٢٣٢}{,٢٧٦} = ١١٣,١٦ \text{ ياردة} = ٣٣٩\tfrac{١}{٢} \text{ قدما}$$

وبالتعويض فى (١) إذن

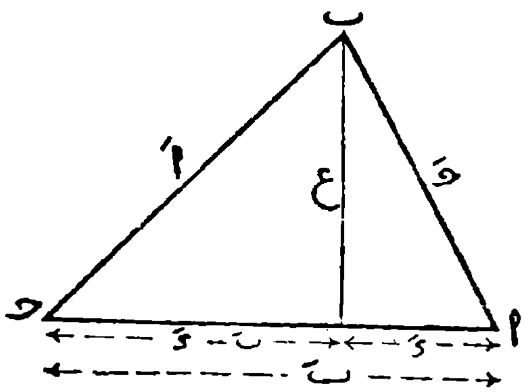
$$\text{س} = \frac{١١٣,١٦}{,٦٧٤} = ١٦٧,٩ \text{ ياردة} \, .$$

وبإعادة العمليات الحسابيـــة واستخدام أربعة أرقام عشرية لقيمتى طا ٣٤° ، طا ٢٦° نحصل على القيمتين ع = ١١٢,٧٦ ياردة ، س = ١٦٧,٢ ياردة ، وبذلك نكون قد تحققنا أن القيم التى حصلنا عليها أولا صحيحة .

حل المثلثات :

من المثال السابق يتضح لنا كيف نحسب طول ضلع مثلث إذا علم منه طول ضلع آخر ومقدار زاويتين فيه . وسنحصل فيما يلى على عبارات مبسطة نحسب بها — بدون

رسم الشكل — أحد أضلاع أو إحدى زوايا مثلث لدينا معلومات كافيـــة لرسمه . والمعلومات الكافية لرسم المثلث هى (ا) أطوال أضلاعه الثلاثة (ب) طول ضلعين فيه ومقدار الزاوية المحصورة بينهما (حـ) طول أحد أضلاعه ومقدار زاويتين فيه .



$$\text{جا ا} = \frac{\text{ع}}{\text{حَ}} \quad \therefore \text{ع} = \text{حَ جا ا}$$

$$\text{جا حـ} = \frac{\text{ع}}{\text{اَ}} \quad \therefore \text{ع} = \text{اَ جا حـ}$$

$$\text{جتا ا} = \frac{\text{ءَ}}{\text{حَ}} \quad \therefore \text{ءَ} = \text{حَ جتا ا}$$

شكل (٨٧)

فاذا علمت أطوال الأضلاع الثلاثة اَ ، بَ ، حَ (أنظر شكل ٨٧) فان

$$\text{ع}^2 = \text{حَ}^2 - \text{ءَ}^2 = \text{اَ}^2 - (\text{بَ} - \text{ءَ})^2$$

$$\therefore \text{حَ}^2 - \text{ءَ}^2 = \text{اَ}^2 - \text{بَ}^2 + 2\,\text{بَ}\,\text{ءَ} - \text{ءَ}^2$$

$$\therefore \text{حَ}^2 = \text{اَ}^2 - \text{بَ}^2 + 2\,\text{بَ}\,\text{ءَ}$$

$$\text{،} \because \text{جتا ا} = \frac{\text{ءَ}}{\text{حَ}} \quad \text{إذن } \text{ءَ} = \text{حَ جتا ا}$$

$$\text{وإذن } \text{حَ}^2 = \text{اَ}^2 - \text{بَ}^2 + 2\,\text{بَ}\,\text{حَ جتا ا}$$

$$\text{أى } \text{اَ}^2 = \text{بَ}^2 + \text{حَ}^2 - 2\,\text{بَ}\,\text{حَ جتا ا}$$

$$\text{وإذن جتا ا} = \frac{\text{بَ}^2 + \text{حَ}^2 - \text{اَ}^2}{2\,\text{بَ}\,\text{حَ}}$$

وبالمثل نحصل على العبارتين :

$$\text{جتا ب} = \frac{\text{حَ}^2 + \text{اَ}^2 - \text{بَ}^2}{2\,\text{حَ}\,\text{اَ}}$$

$$\text{جتا ح} = \frac{\text{أ}'^{2} + \text{ب}'^{2} - \text{ح}'^{2}}{\text{٢ أ}'\text{ب}'}$$

فاذا أعطينا أ َ ، بَ ، حَ فانه يمكننا حساب جتا ا ، جتا ب ، جتا ح وباستخدام جدول جيوب تمام الزوايا نحصل على ا ، ب ، ح .

أما إذا أعطينا طول كل من الضلعين أَ ، بَ ومقدار الزاوية المحصورة بينهما ح فإننا نستخدم العبارة

$$\text{ح}'^{2} = \text{أ}'^{2} + \text{ب}'^{2} - \text{٢ أ}'\text{ب}' \text{ جتا ح}$$

ونستخدم جدول جيوب تمام الزوايا فنحصل على طول الضلع حَ ، ثم نستخدم إحدى العبارات السابقة لنحصل على الزاويتين الباقيتين إلا أنه يمكننا استخدام عبارة أكثر سهولة سنحصل عليها فيما يلي . بالعودة إلى شكل (٨٦) نجد أن

$$\text{جا ا} = \frac{\text{ع}}{\text{ح}'}$$

$$\therefore \text{ ع} = \text{ح}' \text{جا ا}$$

$$\text{و جا ح} = \frac{\text{ع}}{\text{أ}'}$$

$$\therefore \text{ع} = \text{أ}' \text{ جا ح}$$

$$\therefore \text{ح}' \text{جا ا} = \text{أ}' \text{جا ح}$$

$$\therefore \frac{\text{جا ا}}{\text{أ}'} = \frac{\text{جا ح}}{\text{ح}'}$$

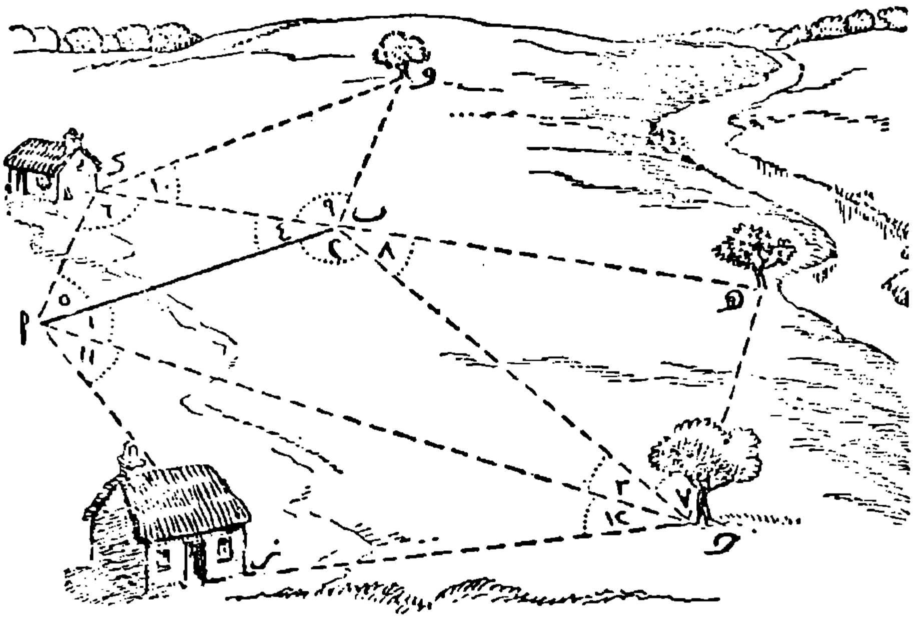
$$\text{واذن جا ا} = \frac{\text{أ}' \text{جا ح}}{\text{ح}'}$$

فباستخدام هذه العبارة نحصل على مقدار الزاوية ؛ ومن ثم نحصل على مقدار الزاوية ب = ١٨٠° − (ا + ح) .

بالمثل إذا علمنا مقدار كل من الزاويتين ا ، ح وطول الضلع أَ فإننا نحصل على طول الضلع حَ من العبارة :

$$ح' = \frac{أ' \text{ جا } ح}{\text{جا } أ}$$

وبما أن ب = ١٨٠ − (ا + ح) فإننا نحصل على طول الضلع ب' من العبارة ب'٢ = ح'٢ + ا'٢ − ٢ ح' ا' جتا ب .



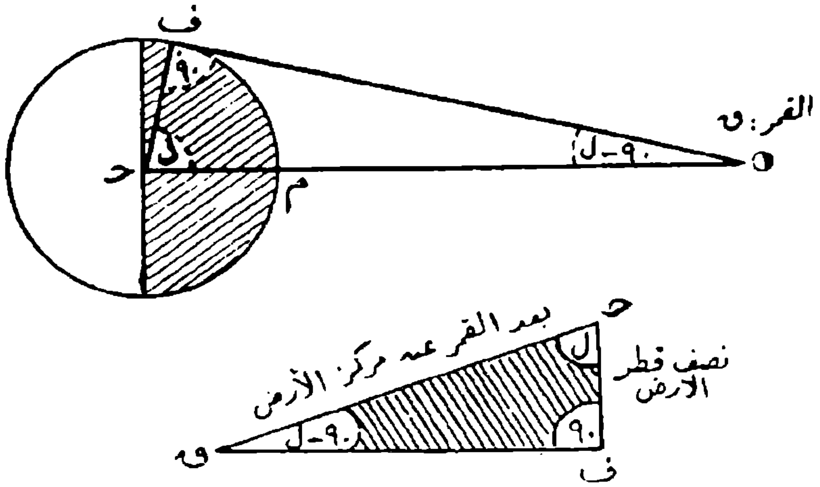
شكل (٨٧) أ

تحديد قطعة من الارض بواسطة تقسيمها الى مثلثات

لتحديد قطعة من الأرض يقيس المساح مسافة معينة اب بواسطة الجنزير العادى أو شريطا من الصلب ومن النقطة ا يقيس بواسطة الثيودوليت الزاوية (١) التى تقبلها ب وعلامة محددة للأرض مثل شجرة ، عند ا. ثم ينتقل المساح إلى ب ويقيس بواسطة الثيودوليت الزاوية (٢) التى تقبلها ا ، ح عند ب . فيكون إذن قد عين طول الضلع اب ومقدار زاويتين من المثلث ا ب ح . ومن ثم يمكنه أن يحسب طول كل من ب ح ، ا ح باستخدام عبارة الجيب وجدول الجيوب . وبالحصول على هذين الضلعين يمكنه استخدامهما فى إيجاد أضلاع المثلثين ب هـ ح ، ا ز ح وذلك بأن يقيس الزاوية (٨) التى تقبلها شجرة هـ ، ح عند ب والزاوية (٧) التى تقبلها ب ، هـ عند ح ، فيكون قد علم مقدار زاويتين من المثلث ب هـ ح وطول الضلع ب ح . بالمثل يرصد ز من ا ، ح وهكذا يستمر فى رصد علامات أخرى مثل ء ، هـ من اب إلى أن يكون قد حدد قطعة الأرض بواسطة جميع العلامات المحددة لها .

بعـد القمر :

لقد حسب هيباركس بعد القمر بنحو من ربع مليون ميلا ، ولم يزد الخطأ فى تقديره هذا عن ٥ ٪ وتشبه الطريقة التى اســتخدمها طريقة إيجاد ارتفاع صخرة وذلك بقياس ارتفاع القمر فى وقت واحد من محطتين متباعدتين عن بعضهما بمسافة معلومة . وهذه الطريقة معقـدة بعض التعقيـد من الناحية العملية ويجـدها القارىء معطاة بالتفصـــيل فى مراجع الفلك . ولتفهم الفكرة الأســاسية فى هذه الطريقة نفرض أن مرصداً معيناً م يشاهد القمر فى سمت الرأس وفى نفس الوقت يشـاهده مرصد آخر ف على نفس خط العرض ولـكنه يقع غرب المرصد الأول بمقدار ل° من درجات خطوط الطول فى الأفق ــ مشرقا (أو يشاهده مرصد يقع شرق المرصد الأول بمقدار ل° من درجات خطوط الطول فى الأفق غارباً) ، فمن شكل (٨٨) نحصل على مثلث قائم الزاوية وفيه :



شـــكل (٨٨)

جا (٩٠° ــ ل) = $\frac{\text{نصف قطر الأرض}}{\text{بعد القمر}}$

أى جتـا ل = $\frac{\text{نصف قطر الأرض}}{\text{بعد القمر}}$

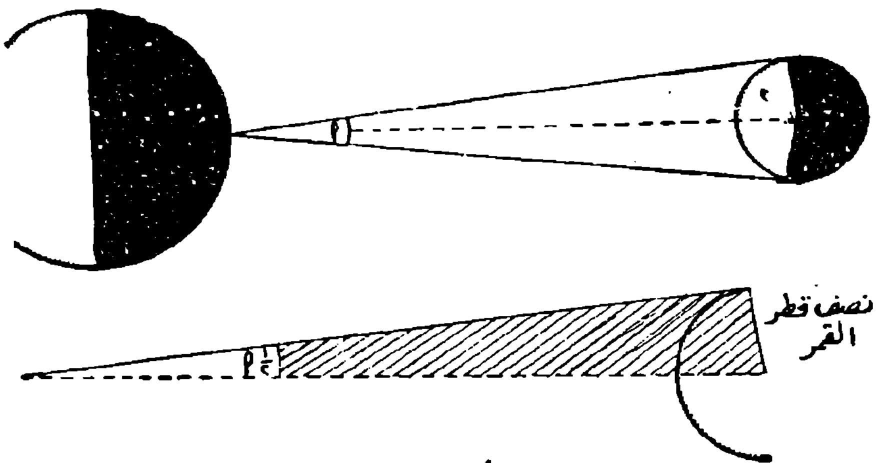
فاذا كانت ل = $٨٩\frac{١}{٢٦}$° فأننا باستخدام جدول النسب المثلثية لمضـــاعفات الزاوية $\frac{١}{٦}$ه نجد أن جتا $٨٩\frac{١}{٢٦}$ = ٠٫٠١٦٣ وإذن

$$٠٫٠١٦٣ = \frac{٤٠٠٠}{\text{بعد القمر بالأميال}}$$

أى أن بعـــد القمر $= \frac{٤٠٠٠}{٠٫٠١٦٣} =$ ٢٤٥٠٠٠ ميلا (تقريبا)

ومن ثم يمكننا بسهولة أن نحسب كلا من نصف قطر القمر ومحيطه، كما فى شكل (٨٩) وذلك بأن نقيس الزاوية بين موضعين متقابلين على محيط القمر وهو كامل الاستدارة. فاذا كانت هذه الزاوية ا° وأهملنا نصف قطر الأرض باعتباره صغيراً جداً بالنسبة إلى بعد القمر فان.

$$\text{جا } \frac{١}{٢}\text{ا} = \frac{\text{نصف قطر القمر}}{\text{بعد القمر}}$$



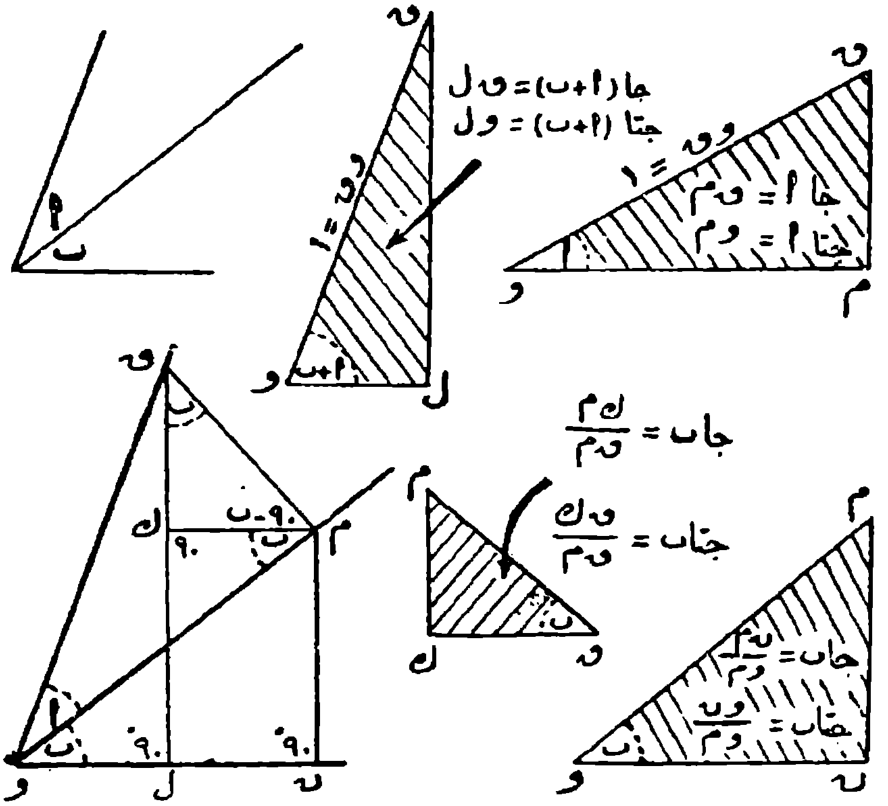
شـــكل (٨٩)

فاذا كانت ا = $\frac{١}{٢}$° فان $\frac{١}{٢}$ا = $\frac{١}{٤}$° ومن جدول الجيوب جا$\frac{١}{٤}$° = ٠٫٠٠٤٤

وإذن $$٠٫٠٠٤٤ = \frac{\text{نصف قطر القمر}}{٢٤٥٠٠٠}$$

ومنها نصف قطر القمر = ٠٫٠٠٤٤ × ٢٤٥٠٠٠ = ١١٠٠ ميلا (تقريبا) .

والواقع أن أدق طريقة للقياس تعطينا القيمة ١٠٨١ ميلا . وباستخدام هذه القيمة نحصل على محيط القمر الذى يساوى ٢ ط من المرات من هذه الكمية . أى أن محيط القمر يساوى ٢ × ٣ $\frac{1}{7}$ × ١٠٨١ = ٦٨٠٠ ميلا تقريبا وهو ما يعادل تقريبا أربعة مرات ونصف من البعد بين لندن وموسكو .



شكل (٩٠)

الزاوية هـ و د المحصورة بين و هـ ، و د تساوى مجموع الزاويتين أ،ب •

أما خطوات العمل فهى :

(أ) أسقط العمود هـ م من هـ على و م

(ب) اسقط العمود هـ ل من هـ على و د

(ج) اسقط العمود م ك من م على هـ ل

(د) اسقط العمود م د من م على و د

وسنذكر فيما بعد الكثير عن الطرق التى استخدمها رجال الاسكندرية فى

القياس بواسطة آلاتهم التي لا بد أن كانت أقل دقة من آلاتنا الحالية والتي استخدموها فى ظروف غير ميسرة للرصد من أماكن متباعدة عن بعضها بمسافات شاسعة قد قيست بأبلغ درجات الدقة . ولعلنا قد أدركنا الآن أن جداول النسب المثلثية للزوايا عندما تكون الفروق بين الزوايا صغيرة تساعد على إعطاء نتائج دقيقة للغاية للأبعاد الفلكية . وقد استنتجت عبارات عديدة لهذا الغرض وما عبارات نصف الزاوية إلا حالات خاصة من هذه العبارات العامة . وهذه العبارات العامة يمكن البرهنة عليها من شكل (٩٠) وهى :

جا (ا+ ب) = جا ا جتا ب + جتا ا جا ب

جتا (ا+ ب) = جتا ا جتا ب - جا ا جا ب

وهاتان العبارتان لهما أهمية كبيرة وخصوصا أننا سنحتاج إليهما فيما بعد عندما نرى كيف تدخل النسب المثلثية بطرق عديدة فى الهندسة البيانية . ومع أنه ليس من السهل أن نتذكر برهان هاتين العبارتين إلا أنه فى غاية من السهولة أن نتتبعه . ولكى يسهل البرهان قد جعلنا طول وم الوحدة . فبالنظر إلى شكل (٩٠) نجد أن :

جا (ا+ب) = ن ل = ن ك + ك ل = ن ك + م ه

= (ن م) جتاب + (و م) جاب = جا ا جتاب + جتا ا جاب

جتا (ا+ب) = و ل = و ه - ل ه = و ه - ك م

= (و م) جتاب - (ن م) جاب = جتا ا جتاب - جا ا جاب

ويمكن التأكد من أن هاتين العبارتين صحيحتان بأن نحسب بواسطتهما بعض النسب المثلثية . فمثلا :

جا ٧٥° = جا (٤٥° + ٣٠°) = جا ٤٥° جتا ٣٠° + جتا ٤٥° جا ٣٠°

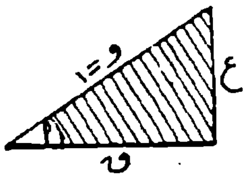
= ٠,٧٠٧ (٠,٨٦٦ + ٠,٥٠٠) = ٠,٩٦٦ .

---

* وهناك متطابقة أخرى فى النسب المثلثية للزوايا كثيرا ما نستخدمها وسنستخدمها فى الباب التاسع - وهذه المطابقة تعطينا طريقة مباشرة نحسب بها جيب تمام الزاوية اذا نحن علمنا جيبها والعكس بالعكس . ففى المثلث القائم الزاوية المرسوم الى اليسار حيث الوتر يساوى الوحدة

إيجاد قيمة ط :

لقد اعتبرنا القيمة ط = $\frac{١}{٧}$٣ عندما أوجدنا نصف قطر القمر والأرض والحقيقة أن الطريقة الوحيدة التي سبق أن شرحناها تعطينا القيمة ط = $\frac{١}{٧}$٣ تقريباً . و تقرأ في التوراة في سفر أخبار الأيام الثاني الأصحاح الرابع والعدد الثاني العبارة الآتية : «وعمل البحر مسبوكا عشر أذرع من شفته إلى شفته وكان مدوراً مستديراً وارتفاعه خمس أذرع وخيط ثلاثون ذراعا يحيط بدائره » فقد كان المحيط في هذه العبارة ستة أمثال نصف القطر أي ثلاثة أمثال القطر . وهكذا قنع العبرانيون قديما كما قنع مثلهم البابليون بالقيمة ط = ٣ وفي الوقت الذي كانت فيه محاولات النشوء والارتقاء تأخذ دورها في تينسي عرضت على الهيئة التشريعية لإحدى الولايات الزراعية غير المتحضرة بأمريكا لائحة تحض على اعتبار القيمة ط = ٣ التي نص عليها في التوراة . ولو كانت هذه اللائحة قد حازت القبول لما كانت ابتكرت الآلات البخارية أو عربات فورد . فالقيمة ط = ٣ لا تصلح إلا في صنع عجلات عربة خشبية يجرها في الطرقات ثور أو حصان . فعندما بدأ رجال الإسكندرية من أرشميدس وهيرو في تصميم الآلات كان لا بد لهم من أن يبحثوا عن قيمة أدق من القيمة ط = ٣ .



جا ا = ع ، جتا ا = ن

ومن عملية (٨) : ١^{٢} = ع^{٢} + ن^{٢}

وإذن ١ = (جا ا)^{٢} + (جتا ا)^{٢}

وقد اصطلح في كتب الرياضيات على أن نكتب

(جا ا)^{٢} = جا^{٢} ا ، (جتا ا)^{٢} = جتا^{٢} ا .

فمثلا يمكننا حساب جتا ٣٠° بمعلومية أن جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

إذن أن ١ = ($\frac{١}{٢}$)^{٢} + جتا^{٢} ا

ومنها جتا^{٢} ا = $\frac{٣}{٤}$ أي جتا ا = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ويمكننا حساب قيمة ط إلى أى درجة من درجات الدقة إذا أعطينا جدولا للجيوب وآخراً للظلال . والطريقة التى أوجد بها أرشميدس قيمة ط تثبت لنا جلياً أنه كان يملك بعضاً من هذه الجداول قبل تلك التى عملها هيبارکس . والحقيقةهى أن تاريخ العلوم لايقرر القول المأثور أن كل ابتكار جديد يقوم بهعبقرى خاص لوحده فاغلب الابتكارات الجديدة يصل إليها جماعة منفصلة من الأفراد فى أوقات متقاربة . هذا ما يحدث عادة فى تاريخ العلوم ولو أن مؤرخى العلوم قلما يبوحوا ولو بشرح قليل عن هذه الظاهرة . والابتكارات تكرر نفسها لأن الأعمال الفكرية تتقدم بتقدم الثقافة التى يرثها المبتكر من المجتمع .

وقد رأينا من عملية (١٢) أن النسبة بين المحيط والقطر تساوى مقداراً ثابتا لجميع الدوائر وأن محيط الدائرة ينحصر بين (ا) محيط مضلع منتظم عدد أضلاعه ن مثلا ومرسوم خارج الدائرة — أى تمس جميع أضلاعه الدائرة ، (ب) محيط مضلع منتظم عدد أضلاعه ن ومرسوم داخل الدائرة — أى تقع رؤوسه على محيط الدائرة — فإذا كان محيط الدائرة ح وقطرها ق فإن

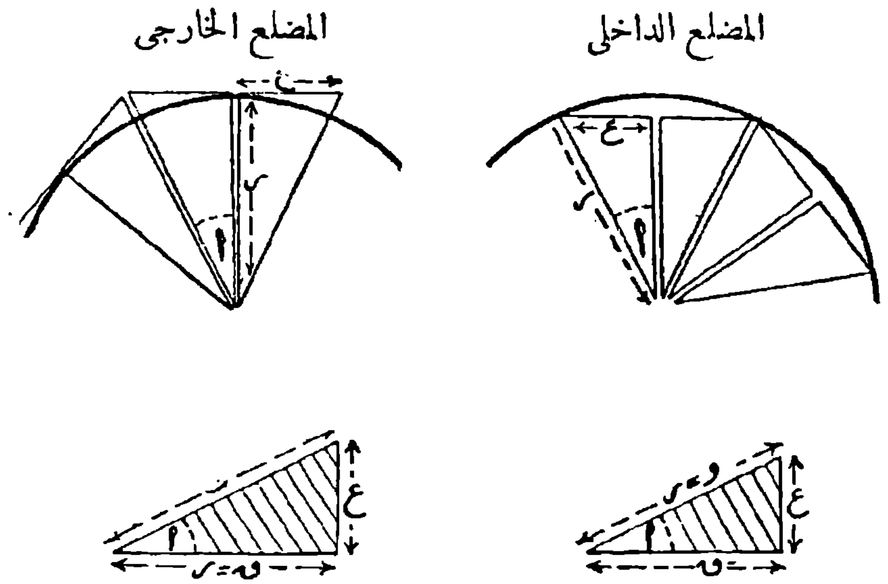
$$\text{ح} = \text{ط}\ \text{ق}$$

وإذن إذا كان ق = ١ (أى نصف القطر ر = ½) فان ح = ط . وبدراسة الأشكال المختلفةفى عملية (١٢) بالباب الرابع لا يجد القارىء صعوبةفى دراسة شكل (٩١) حيث يجد إلى اليسار جزءاً من مضلع منتظم عدد أضلاعه ن مرسوما خارج دائرة قطرها الوحدة (أى ر = ½) . ويمكن تقسيم هذا المضلع إلى ٢ن من المثلثات القائمة الزاويه التى فى كل منها يكون العمود ع جزءاً من محيط المضلع وفى كل منها تساوى الزاوية ا التى رأسها المركز $\left(\frac{{}^\circ\text{٣٦٠}}{\text{٢ط}}\right)$. ومن ذلك نستنتج أن محيط المضلع الخارجى $\text{ح}_\text{ح}$ = ٢نع ، كما أن من الشكل واضح أن

$$\text{ع} = \tfrac{1}{2}\ \text{ظا}\ \frac{\text{٣٦٠}}{\text{٢ن}}$$

وإذن $\text{ح}_\text{ح} = \text{ن ظا}\ \frac{\text{٢٦٠}}{\text{٢ن}}$ فاذا كان الشكل مسدسا منتظما مثلا فان

$$ع_{خ} = ٦ \text{ طا } \frac{٣٦٠^{\circ}}{١٢} = ٦ \text{ طا } ٣٠^{\circ} = ٦ \times ٠{,}٥٨ = ٣{,}٤٨ .$$



$$\frac{ع}{ر} = \text{حا } ا \qquad \frac{ع}{ر} = \text{طا } ا$$

فاذا كانت $ر = \frac{١}{٢}$ فان $ع = \frac{١}{٢} \text{حا } \frac{٣٦٠}{٢ن}$ فاذا كانت $ر = \frac{١}{٢}$ فان $ع = \frac{١}{٢} \text{طا } \frac{٣٦٠}{٢ن}$

شكل (٩١) : كيف أوجد أرشميدس قيمة ط

بالمثل يمكن البرهنة على أن محيط المضلع المنتظم المرسوم داخل الدائرة وعدد أضلاعه ن تعطيه العبارة المناظرة

$$ع_{د} = ن \text{ حا } \frac{٣٦٠}{٢ن}$$

فاذا كان الشكل مسدسا منتظما فان

$$ع_{د} = ٦ \text{ جا } \frac{٣٦٠}{٢ن} = ٦ \text{ جا } ٣٠ = ٦ \times ٠{,}٥٠ = ٣$$

واذن تنحصر قيمة ط بين ٣,٤٨ و ٣,٠٠ . وبأخذ المتوسط نكتب

$$ط = ٣,٢٤ \pm ٠,٢٤$$

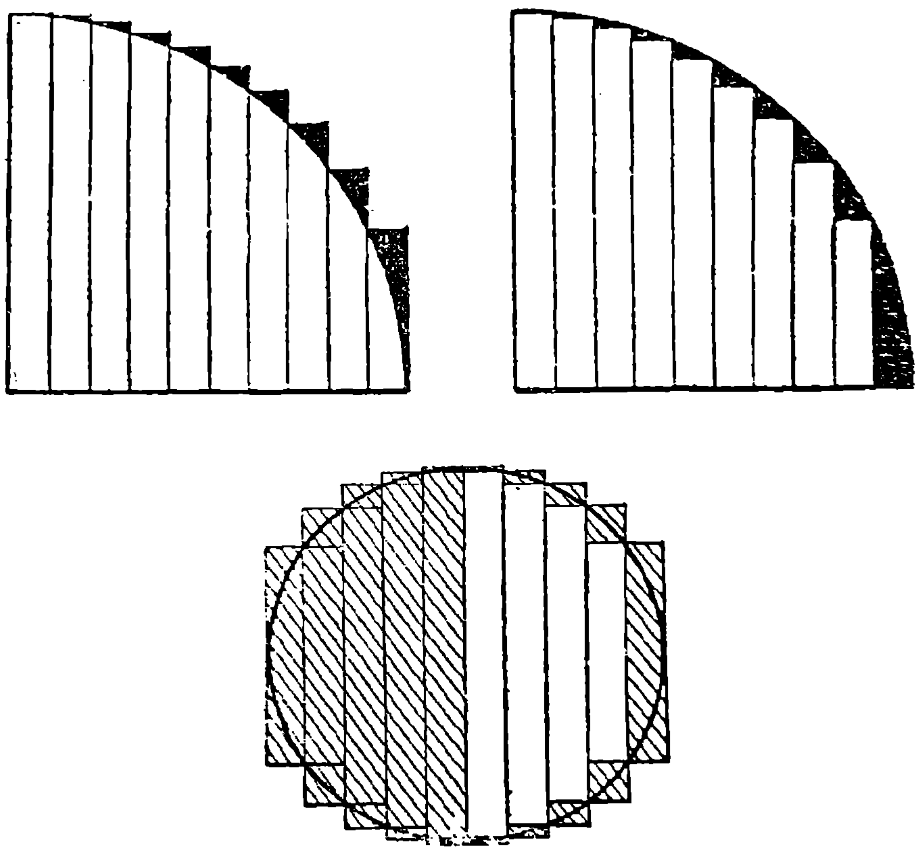
وقد درسنا فى عملية (١٢) كيف نجعل الفرق الموجب أو الفرق السالب صغيراً جدا بأن ناخذ عدد الأضلاع ن كبيراً كبرا كافيا ، وباستخدام جداول الجيوب والظلال يمكننا أن نحسب الجدول الآتى :

عدد الأضلاع ن	$ح_{د} = ن \text{ جا } \frac{٣٦٠}{٢ن}$	$ح_{ـ} = ن \text{ طا } \frac{٣٦٠}{٢ن}$	المتوسط ط	الخطأ المئوى
٣	٢,٥٩٨	٥,١٩٦	٣,٩٠	٢٤
٤	٢,٨٢٨	٤,٠٠٠	٣,٤١	٨,٥
٦	٣,٠٠٠	٣,٤٦٤	٣,٢٣	٢,٨
٨	٣,٠٦٢	٣,٣١٤	٣,١٩	١,٥
١٢	٣,١٠٦	٣,٢١٥	٣,١٦	,٦
١٨	٣,١٢٥	٣,١٧٣	٣,١٥٠	٠,٣
٣٦	٣,١٣٩	٣,١٥٠	٣,١٤٤	٠,٠٧

ولقد قنع أرشميدس باعتبار القيمة ط بين $٣\frac{١}{٧}$ و $٣\frac{١٠}{٧١}$. أما أوراق البردى التى كتبها أحمس فتؤكد لنا أن المصريين الذين عاشوا نحو عام ١٥٠٠ ق . م . قد استخدموا القيمة ط = $\sqrt{١٠}$ = ٣,١٦ . ويمكن القارىء أن يحصل على مثل هذه القيمة بقياس محيط وقطر بعض الأطباق والأدوات المنزلية بواسطة شريط القياس. وقد استخدم هذه القيمة أيضاً المهندسون الصينيون ومقوموا النتائج . ونحو عام ٤٨٠ بعد الميلاد توصل أحد مهندسى الرى الصينى تسو تشونج تشى الذى ابتكر نوعا من المحركات البخارية وأعاد استعمال البوصلة إلى قيمة تبلغ من الدقة ما يدعو إلى الدهشة والإعجاب بالنسبة إلى ذلك العصر إذ تنحصر هذه القيمة بين ٣,١٤١٥٩٢٦ ، ٣,١٤١٥٩٢٧ ونحن لا نعرف كيف توصل إلى هذه القيمة وليس من السهل أن نعتقد أنه حصل عليها بواسطة رسم مكبر ، إلا أن هناك دليلا واضحا على أن اليابانيين استخدموا

طريقة تشبه تلك التى استخدمت فى أوربا نحو عام ١٧٠٠ بعد الميلاد . وتعتمد هذه على النظرية الصينية (المسماة نظرية فيثاغورس) الخاصة بالمثلثات القائمة الزاوية ، وإذن فمن المحتمل أن تكون هذه الطريقة قد استنتجت من طريقة عرفها الصينيون بعد أيام أرشميدس بقليل . وهذه الطريقة لها ميزة خاصة سنتعرض لها فيما بعد وتنحصر فى تقسيم الدائرة إلى شرائح رفيعة من الصفيح وتعتمد على عبارة مساحة الدائرة ط $ر^2$ حيث ر نصف قطر الدائرة الذى إذا أخذناه الوحدة لكانت المساحة ط من الوحدات المربعة .

وإذا رسمنا دائرة على ورق المربعات فإننا نلاحظ أن مساحة الدائرة تنحصر بين مساحة مجموعة من المستطيلات الخارجية ــ المظللة ــ ومساحة مجموعة أخرى من المستطيلات الداخلية ــ غير المظللة (أنظر شكل ٩٢) ، ونلاحظ أيضا أنه فى كل نصف من نصفى الدائرة يزيد عدد المستطيلات الخارجية واحداً عن عدد المستطيلات الداخلية .



شكل (٩٢) الطريقة اليابانية لايجاد قيمة ط

وفى شكل (٩٣) نرى ربع دائرة مرسوما داخل خمس مستطيلات متساوية العرض ويقع بداخله أربع مستطيلات لها نفس العرض ، وواضح من طريقة الرسم السبب فى تلاشى المستطيل الخامس . فإذا كان نصف القطر هو الوحدة فإن عرض كل مستطيل يساوى $\frac{1}{5}$ وتكون مساحة مجموعة المستطيلات الخارجية

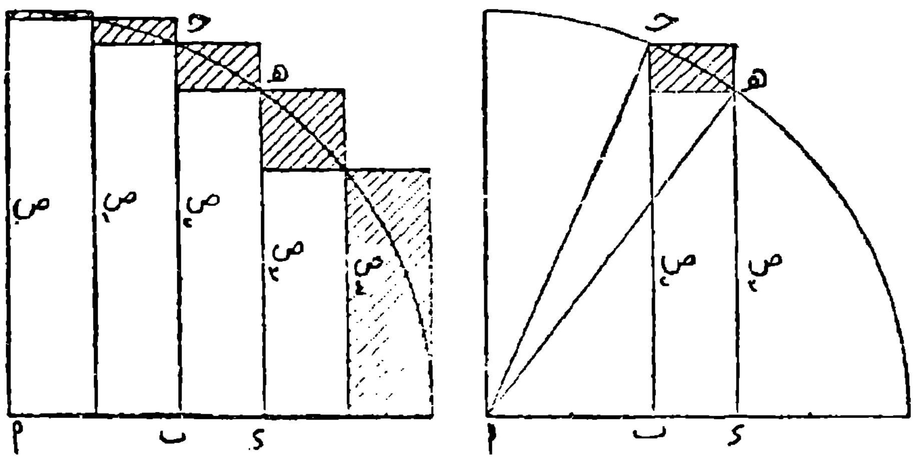
$$\frac{1}{5}\text{ص}_0 + \frac{1}{5}\text{ص}_1 + \frac{1}{5}\text{ص}_2 + \frac{1}{5}\text{ص}_3 + \frac{1}{5}\text{ص}_4$$
$$= \frac{1}{5}(\text{ص}_0 + \text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3 + \text{ص}_4) .$$

وتكون مساحة المستطيلات الخارجية المناظرة للدائرة الكاملة .

$$\text{م}_\text{خ} = \frac{4}{5}(\text{ص}_0 + \text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3 + \text{ص}_4) .$$

بالمثل يمكن البرهنة على أن مساحة مجموعة المستطيلات الداخلية للدائرة الكاملة

$$\text{م}_\text{د} = \frac{4}{5}(\text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3 + \text{ص}_4) .$$



شكل (٩٣)

ويمكن حساب ص_1 ، ص_2 ، ... الخ بواسطة عملية (١٢) أى النظرية الصينية للمثلثات القائمة الزاوية

ففى مثلث ا ب ح

$$\text{ر}^2 = \text{ص}_2^{\,2} + \overline{\text{اب}}^{\,2}$$

وحيث أن $س_٢$ = الوحدة ، ا ب = $٢ \times \frac{١}{٥} = \frac{٢}{٥}$

إذن $١ = ص_٢^٢ + (\frac{٢}{٥})^٢$

$\therefore \quad ١ - (\frac{٢}{٥})^٢ = ص_٢^٢$

$$\therefore \quad ص_٢ = \sqrt{١ - (\frac{٢}{٥})^٢} = \sqrt{\frac{٥^٢ - ٢^٢}{٥^٢}} = \frac{١}{٥}\sqrt{٥^٢ - ٢^٢}$$

بالمثل فى مثلث ا هـ ء

$$١^٢ = ص_٣^٢ + (\frac{٣}{٥})^٢$$

$\therefore \quad ص_٣ = \frac{١}{٥}\sqrt{٥^٢ - ٣^٢}$

وبالمثل $ص_١ = \frac{١}{٥}\sqrt{٥^٢ - ١^٢}$

، $ص_٤ = \frac{١}{٥}\sqrt{٥^٢ - ٤^٢}$

، $ص_٠ = ١ = \frac{٥}{٥}$

$$\text{وإذن } م_ح = \frac{٤}{٥}\left\{ \frac{٥}{٥} + \frac{١}{٥}\sqrt{٥^٢ - ١^٢} + \frac{١}{٥}\sqrt{٥^٢ - ٢^٢} + \frac{١}{٥}\sqrt{٥^٢ - ٣^٢} + \frac{١}{٥}\sqrt{٥^٢ - ٤^٢} \right\}$$

$$\text{أى } م_ح = \frac{٤}{٥^٢}\left\{ ٥ + \sqrt{٥^٢ - ١^٢} + \sqrt{٥^٢ - ٢^٢} + \sqrt{٥^٢ - ٣^٢} + \sqrt{٥^٢ - ٤^٢} \right\} \qquad (١)$$

$$\text{وبالمثل } م_ى = \frac{٤}{٥^٢}\left\{ \sqrt{٥^٢ - ١^٢} + \sqrt{٥^٢ - ٢^٢} + \sqrt{٥^٢ - ٣^٢} + \sqrt{٥^٢ - ٤^٢} \right\} \qquad (٢)$$

$$\text{وإذن } م_ح = \frac{٤}{٢٥}\left(٥ + \sqrt{٢٤} + \sqrt{٢١} + ٤ + ٣ \right) = ٣{,}٤٤$$

$$، \quad م_ى = \frac{٤}{٢٥}\left(\sqrt{٢٤} + \sqrt{٢١} + ٤ + ٣ \right) = ٢{,}٦٤$$

وحيث أن مساحة الدائرة التى نصف قطرها الوحدة تنحصر بين $م_ح$ ، $م_ى$
وحيث أن ط هى مساحة هذه الدائرة إذن تنحصر قيمة ط بين ٣,٤٤ ، ٢,٦٤
ونحصل على القيمة المقربة ط = ٣,٠٤ ± ٠,٤٠

أما إذا قسمنا نصف القطر إلى عشرة أجزاء متساوية فإننا نحصل على عشرة مستطيلات خارجية وتسعة مستطيلات داخلية ونحصل على ما يأتى :

$$\text{م}_{\text{خ}} = \frac{٤}{١٠^٢} \Big\{ ١٠ + \sqrt{١٠^٢ - ١^٢} + \sqrt{١٠^٢ - ٢^٢} + \sqrt{١٠^٢ - ٣^٢}$$
$$+ \sqrt{١٠^٢ - ٤^٢} + \sqrt{١٠^٢ - ٥^٢} + \sqrt{١٠^٢ - ٦^٢}$$
$$+ \sqrt{١٠^٢ - ٧^٢} + \sqrt{١٠^٢ - ٨^٢} + \sqrt{١٠^٢ - ٩^٢} \Big\}$$

$$\text{، م}_{\text{د}} = \frac{٤}{١٠^٢} \Big\{ \sqrt{١٠^٢ - ١^٢} + \sqrt{١٠^٢ - ٢^٢} + \sqrt{١٠^٢ - ٣^٢}$$
$$+ \sqrt{١٠^٢ - ٤^٢} + \sqrt{١٠^٢ - ٥^٢} + \sqrt{١٠^٢ - ٦^٢}$$
$$+ \sqrt{١٠^٢ - ٧^٢} + \sqrt{١٠^٢ - ٨^٢} + \sqrt{١٠^٢ - ٩^٢} \Big\}.$$

وباستخدام جداول الجذور التربيعية للأعداد يمكننا حساب $\text{ط}_{\text{ن}}$ قيمة ط المناظرة عندما نقسم نصف القطر إلى ن من الأقسام المتساوية . ويمكننا أن نحصل على الجدول الآتى :

$$\text{ط}_{٥} = ٣,٠٤ \pm ,٤٠$$
$$\text{ط}_{١٠} \doteq ٣,١٠ \pm ,٢٠$$
$$\text{ط}_{١٥} = ٣,١٢ \pm ,١٤$$
$$\text{ط}_{٢٠} = ٣,١٣ \pm ,١٠$$

وإذا كان القارىء قد أجرى عمليات الحساب السابقة فلا بد أنه قد أدرك أن لادع من رسم شكل جديد عند تغيير قيمة ن إذ لابد أن اتضح له أن مجموع مساحات المستطيلات الخارجية هو :

$$\frac{٤}{\text{ن}^٢} \Big(\text{ن} + \sqrt{\text{ن}^٢ - ١^٢} + \sqrt{\text{ن}^٢ - ٢^٢} + \sqrt{\text{ن}^٢ - ٣^٢} + \sqrt{\text{ن}^٢ - ٤^٢}$$
$$+ \ldots\ldots \Big)$$

وأن مجموع مساحات المستطيلات الداخلية هو نفس المقدار بعد حذف الحد الأول داخل القوس . وبالعودة إلى ماأشرنا اليه فى الباب الثالث عن الأفعال التى تشتمل فى معناها على عدة أفعال أخرى مثل الفعل «يقيم» أو الفعل «يزور» ، نجد هنا مثلا رائعا لفعل رياضى — مؤثر — يشتمل فى معناه على مجموعة من المؤثرات ، وذلك عندما نكتب مجموع مساحات المستطيلات الخارجية على الصورة .

$$\frac{\text{٤}}{\text{ن}^{\text{٢}}} \sum_{\text{س} = \text{٠}}^{\text{س} = \text{ن}} \sqrt{\text{ن}^{\text{٢}} - \text{س}^{\text{٢}}}$$

فالفعل أو المؤثر مجـ مع ظرفيه $\text{س} = \text{ن}$ مكتوبة أعلاه ، $\text{س} =$ صفراً مكتوبة تحته يعنى حاصل جمع جميع الكميات مثل . . . . . . التى نحصل عليها باعطاء س جميع القيم الصحيحة من صفر إلى ن . وواضح أن عندما $\text{س} =$ صفراً فان المقدار $\sqrt{\text{ن}^{\text{٢}} - \text{س}^{\text{٢}}} = \text{ن}$ ، وعندما $\text{س} = \text{ن}$ فان $\sqrt{\text{ن}^{\text{٢}} - \text{س}^{\text{٢}}} =$ صفراً .
وبالمثل نكتب عبارة مساحة المستطيلات الداخلية على الصورة

$$\frac{\text{٤}}{\text{ن}^{\text{٢}}} \sum_{\text{س} = \text{١}}^{\text{س} = \text{ن}} \sqrt{\text{ن}^{\text{٢}} - \text{س}^{\text{٢}}}$$

إذا استعدنا الدراسات السابقة لاستخدام المتسلسلات (الباب الخامس) فإنه يتبادر إلى ذهننا السؤال الآتى : « هل يمكن وضع هذه المتسلسلة فى صورة ما ، بحيث أنه إذا كانت ن كبيرة جداً ، فان الحدود الأخيرة فى المتسلسلة مبتدئة من حد مناسب تمثل كسرا عشريا متكرراً فيمكننا إهمال هذه الحدود ؟ » لقد نجح اليابانيون فى هذا فى أواخر القرن السابع عشر ، دون الاستعانة بالغرب ، إذ حسب ماتسوناجا قيمة ط حسب تعريفنا لها ، ككسر عشرى مقرب إلى خمسين رقما عشريا ، سنترك حل هذه المسألة حتى يتيسر لنا معالجتها تبعا للطريقة التاريخية التى تم بها ذلك ، حين نعود إلى دراسة المتسلسلات فى باب آخر . أما ماقمنا به حتى الآن فهو التكهن بامكان الحصول على متسلسلة تحسب منها ط مقربة لأى درجة تتطلبها القياسات .

هناك طريقة ثالثة لحساب قيمة ط ، تحدث إنقلابا فى طريقة قياس الزاوية ، لقد سبق أن سمينا الدرجة بالوحدة عند الكهنة صانعى التقويم ، كما سمينا الزاوية القائمة بالوحدة عند بناى الدولة . وهناك طريقة أخرى لقياس الزاوية ، قد تسمى

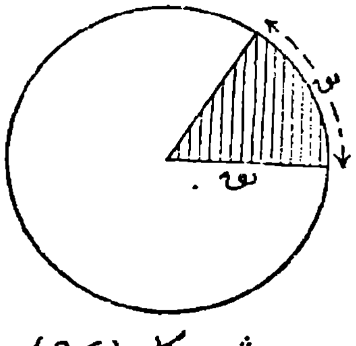
طريقة صانعي العجلات أو الوحدة فى عصر الآلة ، والوحدة الآلية هذه تسمى زاوية نصف قطرية ، وهى الزاوية التى تقع بين نصفى قطرين فى دائرة ، ويقابلها قوس طوله يساوى نصف قطر الدائرة ، فقوس نصف دائرة مثلا يساوى ط من المرات قدر نصف القطر ، لأن محيط الدائرة يساوى ٢ط نوم ، وعلى هذا فان كل زاويتين قائمتين تكافئان ط من الزوايا النصف قطرية أى أن الزاوية القائمة $=\frac{ط}{٢}$ زوايا نصف قطرية ، وبذا تكون الدرجة فى القياس عند البابليين تكافىء $\frac{ط}{١٨٠}$ زوايا نصف قطرية ، وبالعكس فإن الزاوية النصف قطرية تكافىء $\frac{١٨٠}{ط}$ أى ٥٧½ درجة فى التقدير عند البابليين ومن المفيد استذكار المتطابقات الآتية :

$١٨٠^\circ =$ ط زوايا نصف قطرية

$٩٠^\circ = \frac{ط}{٢}$ زوايا نصف قطرية

$١^\circ = \frac{ط}{١٨٠}$ « « «

زاوية نصف قطرية $\left(\frac{١٨٠}{ط}\right)^\circ$

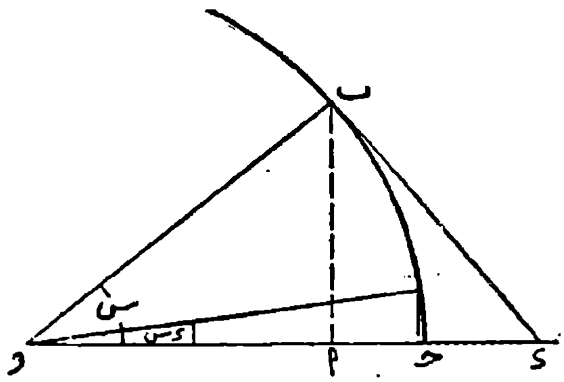


شكل (٩٤)

شكل (٩٤) : الوحدة الآلية لقياس الزوايا

الزاوية نصف القطرية هى الزاوية التى تدورها عجلة عندما تقطع حافتها مسافة تساوى نصف قطر العجلة ٠ واذن ٢ط من الزوايا نصف القطرية تساوى ٣٦٠ درجة بابلية

وطريقة قياس الزاوية هذه تجعل الوحدة معتمدة على دوران عجلة قطعت حافتها مسافة مساوية لنصف قطرها ، فإذا كان نصف القطر طوله الوحدة ، فإن الحافة تقطع مسافة طولها الوحدة ، إذا دارت العجلة زاوية نصف قطرية واحدة . وعلى هذا يكون مقدار طول قوس (بنفس الوحدات) مساويا لعدد الزوايا النصف قطرية فى الزاوية بين نصفى القطرين اللذين يصلان نهايتى القوس بمحور العجلة أو مركزها ، ففى شكل ٩٥ — تساوى الزاوية س القوس ب ح إذا كان نق = ١



شكل (٩٥)

نصف القطر هو وحدة الأطوال ، وإذن :

جا س = ا ب

جتا س = و ا

طا س = ب ى

إذا قارنا بين الشكلين ٩٥ ، ٥٧ ، فإننا نرى أن ظل الزاوية س يساوى عدد وحدات الطول فى المماس ب ى للدائرة عند ب حيث أن نصف القطر طوله الوحدة كما أن جا س = ا ب (العمود) جتا س = و ا (القاعدة) وبما أن .

$$\text{طا س} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$$

$$\text{فإن جتا س} = \frac{\text{جا س}}{\text{طا س}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ب ى}}$$

إذا كان نق = ١ فإن س = ب ح بالتقدير الدائرى كما سبق أن بينا ، ولما

كان ب ح أكبر من ا ب فإن $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب ح}}$ أقل من الواحد أى أن $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ > ١ ،

وبالمثل ب ى أكبر من ب حـ وعلى ذلك فإن $\frac{ا ب}{ب حـ}$ أكبر من $\frac{ا ب}{ب ى}$

أى أن $\frac{جا س}{س} >$ جتا س .

فاذا كانت س مقاسة بالتقدير الدائرى ، فإن المقدار $\frac{جا س}{س}$ يقع بين

جتا س والواحد الصحيح ، وعندما تصبح س صغيرة جداً (ى س فى شكل ٩٥) يصبح جتا س مساويا للوحدة عمليا ، كما أنه يكون التمييز عمليا بين القوس والعمود

فى هذه الحالة متعذراً ، أى أن المقدار $\frac{جا س}{س}$ يصبح عمليا مساويا للوحدة ، أى أن

الحد الأعلى للمقـدار $\frac{جا س}{س}$ هو الواحد ، والحد الأصغر له هو جتا س ، ومن ذلك يمكننا إيجاد النهايات التى تنحصر ط بينها .

وبعبارة أخرى تقع قيمة جا س بين س ، وقدر جتا س س من المرات إذا كانت س مقاسة بالتقدير الدائرى ، وعلى هذا فان جا ٥° أى جا $\left(\frac{٥ ط}{١٨٠}\right)$ يقع بين

$\frac{٥ ط}{١٥٠}$ ، $\frac{٥ ط}{١٨٠}$ من المرات قدر جتا ٥° ، ومن الجداول نجد أن جا ٥°

$=$ ٠,٠٨٧٢ ، جتا ٥° $=$ ٠,٩٩٦٢ فاذا كان

جا س $=$ س جتا س

فإن ٠,٠٨٧٢ $=$ ٠,٩٩٦٢ $\times$ $\frac{٥ ط}{١٨٠}$ أى أن ط $=$ ٣,١٥ .

وبالمثل إذا كان جا س = س فإننا نجد أن ٠,٠٨٧٢ = $\frac{\text{٥ ط}}{\text{١٨٠}}$ ،

أى أن ط ٣,١٤ .

ومتوسط هاتين القيمتين هو ط = ٣,١٤٥ ± ٠,٠٠٥ .

وهذه القيمة تعتمد على الجداول المكونة من أربعة أرقام . وهى لا تلائم الزوايا التى تقل عن ٥° ، لأن عدد الأرقام المعنوية فى قيمة جيب الزاوية لا يكفى لإعطاء أكثر من ثلاثة أرقام معنوية فى النتيجة ، وبذا نكون قد وجدنا بثلاث طرق أن قيمة ط قريبة جداً من $\frac{١}{٧}$ ٣ أى ٣,١٤٣ ، وإذا حسبنا قيمتها مقربة لخمس أرقام عشرية نجدها مساوية ٣,١٤١٥٩ ، وباستخدام هذه القيمة لقياس الزاوية بالتقدير الدائرى ، نحصل على قيم معقولة لجيوب الزوايا الصغيرة بأخذ جا س = س . وقد يهمنا أن نرى جدولا تاريخيا لقيم ط لأنه يبين لنا التوسع فى حساب قيمتها كلما اقتربنا من عصر الآلة .

جـــدول قيم ط

البابليون والعبريون والصينيون الأوائل :		٣,٠
المصريون : (١٥٠٠ ق ٠ م)		٣,١٦
أرشميدس : (٢٤٠ ق ٠ م) (كان مهتما بالعجلات)	بين	٣,١٤٠ و ٣,١٤٢
المهندسون وحاسبوا التقويم الصينيون :		
ليو هسين (٢٥ م ٠)		٣,١٦
وانج فون (٢٥٠ م ٠)		٣,١٥
تسو شونج شى (٤٨٠ م ٠) (كان مهتما بالآلات)	بين	٣,١٤١٥٩٢٦ و ٣,١٤١٥٩٢٧

العرب والهنود :

اريابهاتا (٤٥٠ م)	٣,١٤١٦
الكاشي (١٤٣٠ م)	٣,١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٧٩٣٢

الأوربيون :

فيتا (١٥٩٣ م)	بين ٣,١٤١٥٩٢٦٥٣٧ و ٣,١٤١٥٩٢٦٥٣٥
سيلن (١٦١٠ م)	مقربة لخمسة وثلاثين رقماً عشرياً
واليس (١٦٥٠ م)	متسلسلة لا نهائية
جريجوري (١٦٦٨ م)	

اليابانيون :

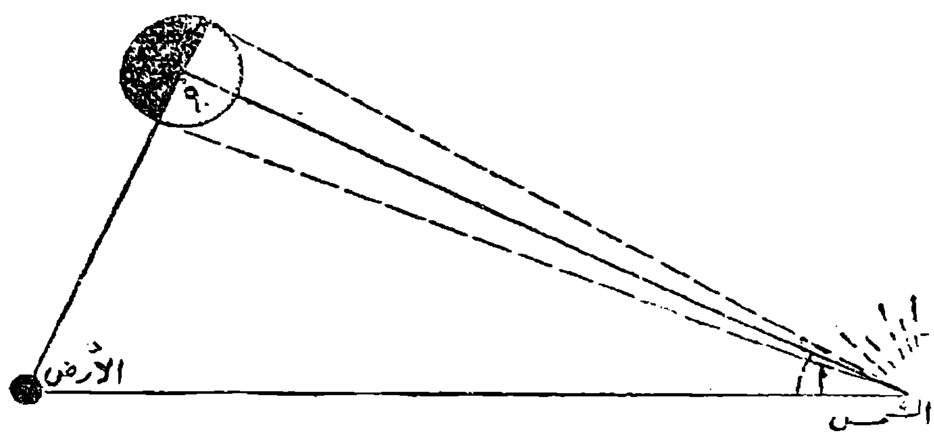
تاكيب (١٦٩٠ م)	متسلسلة لا نهائية
ماتسوناجا (١٧٢٠ م)	مقربة لخمسين رقماً عشرياً حسب تعريفنا

فى الوقت الحالى تعرف قيمة ط بالضبط لسبعمائة رقم عشرى . ولقد حسب فيتا قيمة ط بأخذ كثير أضلاع ذو ٢٩٣٢١٦ ضلعاً ثم أوجد قيمة النهايات ، أما القيم الأخيره فى الجدول فحسوبة من المتسلسلات . وفى الحقيقة تكفى عشرة أرقام عشرية لتعيين طول محيط الدائرة بحيث لا يتعدى الخطأ كسراً من البوصة ، كما أن ثلاثين رقماً عشرياً كافية لحساب محيط الكون المرئى بخطأ كسرى لا يمكن لأقوى الميكروسكوبات قياسه ، ولذا فإن القيمة التى حصلنا عليها تلائم معظم الأغراض العملية ، فمثلا لتصميم أحسن الطائرات يكفى معرفة أربعة أرقام عشرية لقيمة ط أى القيمة ٣,١٤١٦ .

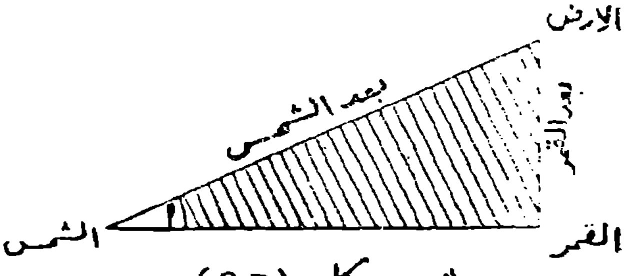
الفلك عند علماء الإسكندرية : ـــ لقد أعطينا حتى الآن ، بياناً ببعض مقاييس الأرض التى تم إنجازها فى عهد الطور الأول من ثقافة الأسكندرية ، ويجدر بنا

ألا ننسى أن قياس المسافات الفلكية فى أيامنا هذه ، أصبح أكثر سهولة بعد استخدام الساعات التى تدار بالعجلات ؛ ولقد أحدث صناع الأسكندرية تحسينات كثيرة على وسائل تقدير الزمن عن سابقيهم وذلك باستخدام الساعات المائية ، التى تعتمد على تدفق الماء من إناء ذى نمص خاص كما هو موضح بشكل ٢ ؛ ومع أن هذه التحسينات كانت فى منتهى البراعة إلا أنها لم تف بحاجة وسائل الملاحة ؛ إذ أن الساعات المائية لم يكن فى الإمكان حملها : ولذا فإنهم كانوا يلجأون إلى القيام بمشاهدات فلكية متعددة لقياس خطوط الطول ، إذ لم يكن يتيسر لهم استخدام الطرق البسيطة التى نستعملها الآن . ومع ذلك فأن هيبارخس كما سبق أن ذكرنا قدر المسافة بين الأرض والقمر تقديراً معقولا ؛ وتمثل الإستكشافات التى قام بها أرستارخس ، براعة الطرق التى استخدمها أولئك الفلكيون أحسن تمثيل .

فلقد حاول أرسترخس تقدير الأبعاد النسبية للشمس والقمر عن الأرض ،



أرستارخس
(الطريقة الأولى)

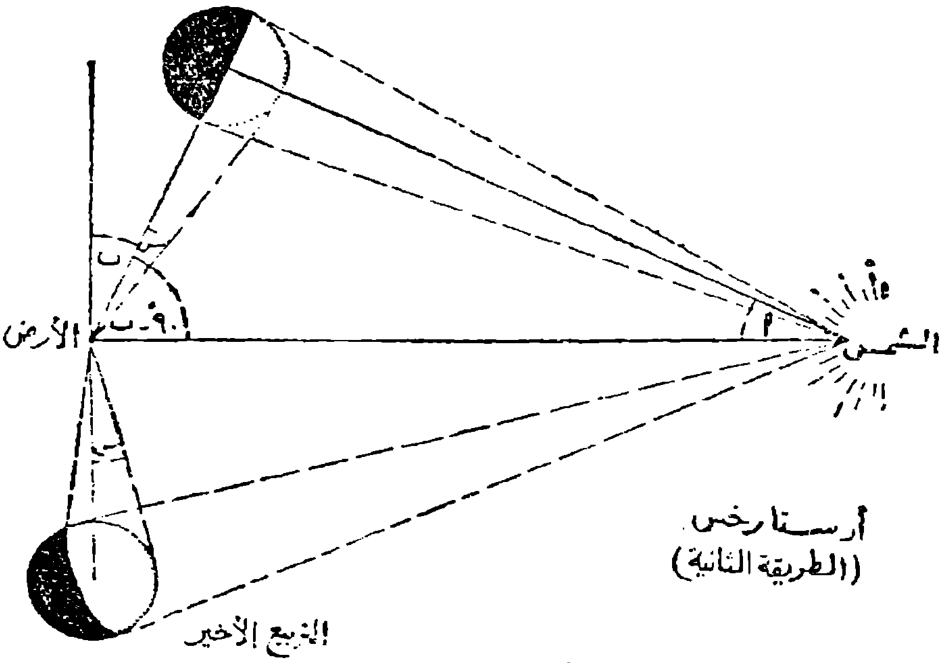


شكل (٩٦)

كما حاول تقدير حجومها بالنسبة إلى بعضها ، وذلك بتقدير الزاوية ا فى شكل ٩٦ ، وهى الزاوية بين القمر والشمس فى الساعات الأولى من الصباح ، والشمس والأرض حين يكون نصف القمر فقط هو الذى يمكن مشاهدته من الأرض ، أى حين يكون القمر فى الربع الأول أو الأخير ، وبلغتنا الحالية ، يقال أن الشكل يبين أن :

$$\text{حا ا} = \frac{\text{بعد القمر عن الأرض}}{\text{بعد الشمس عن الأرض}}$$

ولقد استنتج أرستارخس بآلاته البدائية أن هذه الزاوية تساوى ٣° ، ولم يكن عنده جداول للنسب المثلثية ، ولكنه استخدم هندسة إقليدس بطريقة فى منتهى البراعة ، ليبين أن بعد الشمس عن الأرض يقع بين ثمانى عشرة مرة وعشرين مرة قدر بعد القمر عن الأرض . ومع ذلك لم يقنع بهذه النتيجة فاستخدم طريقة ثانية لمراجعتها ، ووسيلته إلى ذلك ليس من الصعب تتبعها . ولكن تنفيذه لهذه الطريقة يخلب اللب لسعة حيلته وخصوصا إذا اعتبرنا الوقت الذى تم فيه ذلك . إذ كانت هذه أول مرة يغزو فيها الإنسان بقواه العقلية محيط الفضاء المترامى الأرجاء ؛ فلقد لاحظ أرستارخس أن القمر يكون نصف وجهه مرئياً قبل أن يكون القمر فى التربيع



شكل (٩٧)

الأول مباشرة ، أى قبل أن يقطع القمر ربع مساره مباشرة مبتدئا من نقطة بين الشمس والأرض ؛ بينما حين يكون القمر فى التربيع الأول يظهر من وجهه جزء أكثر من النصف قليلا ، كما يبدو من شكل ٩٧ الذى يبين نصف وجه القمر حين يكون فى التربيع الأول وما يبدو من وجه القمر حين يكون فى التربيع الأخير أى حين يكون القمر قد قطع ثلاثة أرباع مساره بالضبط ، فإذا كانت ٢س هى الزاوية التى يحصرها القمر حين يكون بدراً (شكل ٨٩) فإن س هى الزاوية التى يحصرها نصف وجه القمر ، وحينما يكون القمر فى التربيع الأول أو الأخير بالضبط فإن الزاوية بين أبعد نقطتين على قرص القمر تكون أكبر من س بقليل ، وإذا كانت ب هى الزاوية التى يدورها القمر لينتقل من الموضع الذى يظهر فيه نصف وجهه إلى التربيع الأول ، فإن الزاوية بين القمر والأرض والشمس تكون مساوية ٩٠ — ب ولكن هذه الزاوية تساوى أيضا ٩٠ — ا فينتج أن ا = ب ، ولقد قدر أرستارخس الزمن بين لحظة ظهور نصف وجه القمر ووضع التربيع الأول بست ساعات أو ربع يوم ، فاذا إعتبرنا الشهر القمرى ٢٨ يوما ، تكون ب هى $\frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢٨}$ من الدورة الكاملة التى يدورها القمر أى حين يدور القمر ٣٦٠° ، أى أن ب = $(\frac{٣٦٠}{١١٢})^\circ$ أى ب = ٣° على وجه التقريب ، وبما أن ا = ب فان هذا يؤكد تقديره السابق ، وإذا اعتبرنا بعد القمر هو ٢٤٠٠٠٠ ميل فاننا نرى أن أرستارخس قدر بعد الشمس بمقدار ٤½ مليون ميلا ، وهذه المسافة فى الحقيقة تساوى ٩٣ مليونا من الأميال ، ولقد قدرها إراتوثينس Eratosthenis بخطأ قدره ١٠٪ ؛ ولم تكن الآلات التى استخدمها أرستارخس ملائمة لقياس هذه الزاوية الصغيرة ، أى الزاوية بين ظهور نصف وجه القمر ووضع التربيع الأول أو الأخير أو الزاوية بين القمر والشمس والأرض وهى نفس الشىء ، وأهم من ذلك أنه كان من المستحيل تماما الحصول على حدود مضبوطة لنصف وجه القمر ، قبل أن يكون هناك تلسكوبات لتخطيط جبال القمر . ولقد كان فى تقديرى أرستارخس نفس الخطأ الناتج عن الآلات المستخدمة ، إذ أن الوصول إلى درجة كبيرة من الدقة فى القياسات الفلكية يتطلب مستوى عالياً فى تصميم الآلات المستخدمة .

لا يمكننا الدخول فى تفاصيل أخرى لأول محاولات لتخطيط الأرض والسماء . والفقرات التالية من كتاب World Machine لمؤلفه Carl Snyder تعطى صورة واضحة لما قام به علماء الفلك فى الاسكندرية :

« يصف بطليموس فى مقالته طريقة أخرى سهلة » ، ولكن ليس من شك فى أنه لايزال هناك طرق أخرى ، ولكنها لم تتفق مع بعضها تماما، فإن المسافة إذا كانت متغيرة فإنه يكون من الصعب حسابها . . . . فبتثبيت محيط الأرض كانوا يعرفون أن القمر فى موضع ما حولها على بعد . . . . . ٢٤ من الأميال ، و بالمثل أمكنهم أن يلاحظوا أن قطره الظاهر أو المرئى يحصر زاوية قدرها نصف درجة ، ولما عرفت المسافة بين القمر والأرض أمكنهم أن يقدروا قطر القمر بألفين من الأميال أى ربع قطر الأرض . . . . وكان يعيش فى هذه الأيام عالم جبار آخر هو أبولو نيوس الذى يعرف « بالمهندس الكبير » ولقد كان له الفضل كما يقال فى تطبيق الهندسة على السماء ، وبالطبع كان يقصد بذلك الهندسة العالية ؟ لأن بيون وأرستارخس وإراتوثينس كما رأينا قد أكثروا من استخدام الطرق الهندسية ، أما أبولونيوس فإنه توسع فى دراسة موضوع القطاعات المخروطية ، كما أنه استخدم فكرة الدوائر التى تدور فوق بعضها لشرح حركات النجوم ، ولقد استعان هيبارخس بهذه الفكرة متتبعاً أبولونيوس حتى اكتشف فكرة الحيود Parallax التى تعزى إليه عادة . . . ويتضح من مقالات بطليموس أن هيبارخس قد عالج موضوع مخروط الظل بدقة كبيرة كما يبدو ، ولكنه حصل على نتائج غريبة تحقق حسابات أرستارخس . إذ أنه قدر بعد الشمس بعشرين مرة قدر بعد القمر أو ما بين ١٣٧٩ ، ١٤٧٢ مرة قدر نصف قطر الأرض . وبعد مضى قرنين من الزمن عالج بطليموس هذه المسألة دون أن ينجح فى ذلك ، إذ أنه خفض هذه المسافة إلى ١٢١٠ مرة قدر نصف القطر . . . . . . ولم تعط نظرية هيبارخس الأبعاد النسبية فقط بل أعطت كذلك الأبعاد المطلقة للشمس والقمر ومن ثم أعطت طريقة مباشرة لحساب حجومها ، ويقول كليوميدز أن هيبارخس قدر حجم الشمس بمائة وخمسين مرة قدر حجم الأرض ، ولكن بطليموس زاده إلى ١٧٠ مرة ، كما أن أرستارخس قدر قطر الأرض بطريقة لم يذكرها ، على أنه يقع بين ست أو سبع مرات قدر قطر الشمس وبهذا يكون حجم الشمس مساوياً ثلثمائة مرة قدر حجم الأرض — كما أنه حسب كذلك قطر القمر مساويا ثلث قطر الأرض أى بخطأ قدره $\frac{1}{12}$ ؛ وهذا شىء عجيب ولو أن التقريب غير مضبوط ، إذ يدل على تقدم الفكر . . . . . وهناك فى كتاب أفكار الفلاسفة المنسوب إلى بلوتارخ وهذا قليل الاحتمال ، فقرة تقول أن إراتوثينس اهتم أيضاً بهذه المسألة ، ونظراً لحبه للمقاييس الثابتة قدر بعد القمر بمقدار . . . . . ٨٩ استاديون و بعد الشمس بمقدار . . . . . . ٨٠٤ استاديون ، وهذا إدراك عجيب للحقيقة (حيث الاستاديون يساوى $202\frac{1}{4}$ ياردة .

فبالرغم من أنه قدر بعد القمر بعشرين مرة قدر نصف قطر الأرض أى أقل من الحقيقة بمقدار الثلثين ، فإن هذا العدد يجعل الشمس على بعد ۲۰۰۰ مرة قدر نصف قطر الأرض ، وهو البعد الحقيقى للشمس الذى اكتشف بعد ذلك بثلاثة قرون ، أى بعد ثلاثة قرون من العمل المتواصل باستخدام الميكرومترات والمليومترات ، ومن العجيب حقاً أن نجد باحثاً عظيماً آخر من العصر القديم ، يعلن تقديرات مشابهة تمتاز بأنها تقديرات واضحة جلية ، وهذا الباحث هو بوسيدونيوس وقد علم فى پومبى Pompey و سيسيرو Cicero .

ولقد سبق أن نوهنا بأن تقديراته لأبعاد الأرض التى استعملها بطليموس هى بالذات التى استعان بها كولومبوس ، كما أنه درس انكسار الضوء دراسة واقية ، ثم استنتج طريقة مدهشة لحساب ارتفاع الهواء الجوى المحيط بالأرض ، ولقد ذكر كليوميدز فى مذكراته أن بوسيدنيوس حاول كذلك تقدير أبعـــاد النجوم عن الأرض . فوضع القمر على بعد مليونى استاديون والشمس على بعد خمس مائة مليون أستاديون ! وحسب تقديره السابق لقطر الأرض ، يكون القمر على بعد قدر نصف قطر الأرض اثنين وخمسون مرة ، وهذا التقدير أقل من تقدير هيبارخس ، ويجعل الشمس على بعد قدر نصف قطر الأرض ۱۳۰۰۰ مرة ، ولكن إذا اعتبرنا آخر تقديراته (۱۸۰۰۰۰ استاديون) ، تصبح المسافة ۱۷٤۰۰ قدر نصف قطر الأرض . فاذا اعتبرنا مدى الخطأ الكبير الذى يكون من المؤكد حدوثه ، فان هذا العدد لا يختلف عن الحقيقة إلا قليلا كما أنه لا يختلف كثيراً عن تقدير إراتوثينس . قارن هذا بتقدير سابقيه أى ۱۳۰۰۰ مرة قدر نصف قطر الأرض ، ثم قارنه بآراء إبيكيورس Epicurus الذى كان معاصراً له تقريبا . وهو رجل حكيم واسع الأفق ومع ذلك كان يعتقد أن الشمس قد تكون جسما عرضه قدمان ! .

أما ما نجح فيه أرستارخس فهو أنه بين أن الشمس تبعد ٩٢ مليون ميل على الأقل . وهذا تقدم تاريخى فى معرفة الإنسان بالكون الذى يعيش فيه . أما فشله فى الحصول على نتيجة أحسن . فيوضح خطأ أفلاطون فى التفرقة بين الإنتاج العقلى وعلم الصناعة . كما أن نجاح إراتوثينس وابولونيوس فى إعطاء تقديرات جيدة ، أغلق ميداناً واسعاً للبحث العقلى أمام من أتوا بعدهم .

وهذا ما يوضح فشل مثالية أفلاطون كوسيلة لإنعاش الحياة الفكرية للإنسان ، فالمذهب المادى عند علماء الإسكندرية ، كان سببا فى تطبيق علم الهندسة فى القياسات ومن ثم إلى تكوين فكرة جديدة عن عظمة السماوات ، وكانت الصورة التى كونوها على اتساع عظيم ، فابتلعت « الجنس السماوى للآلهة » الذين قال أفلاطون أنهم أسلاف الفلاسفة ، كما أن إعادة وضع التقويم بأمر القيصر بناء على نصيحة سوسيجنز Sosigenes أحد علماء الفلك فى الإسكندرية ، وهو الذى أدخل فكرة السنة الكبيسة لتتفق مع الزمن الذى تأخذه الأرض فى الدوران حول الشمس وهو ٣٦٥ يوما وست ساعات ، بداية لعصر إجتماعى جديد ، فالمعتقدات القديمة التى كانت تدين بفائدة النجوم فى ضبط حساب الوقت كانت فى طريق الزوال ؛ كما حل علم الفلك العامى ، محل علم التنجيم فى عالم الملاحة فى البحر الأبيض المتوسط ، حيث لا يزال « عامود البحارة » معمراً حتى الآن وهو أشهر علامة معروفة . ولقد جمع بطليموس نتائج هذه الإكتشافات بطريقة منظمة فى كتاب يسمى الألماجست ، حوالى سنة ١٥٠ م ؛ فكان لهذا الكتاب تأثير كبير فى علم الفلك عند العرب ، الذين ترجموه ثم نقلوه إلى أوربا ؛ ومن هذا الكتاب تعلم عظماء الملاحين فن عمل الخرائط وتحديد أماكن السفن فى البحار ؛ كما عرفوا ما بقى من العالم دون استكشاف .

علم الحساب فى الإسكندريه :ـــ ربما تكون قد لاحظت بشىء من الأسف ، أن علم الفلك الذى يساعد البحار فى تعيين مكان السفينة فى البحر . وإيجاد قيمة للمقدار ط لاستخدامها فى صناعة الآلات ، يحتاجان إلى كثير من علم الحساب . أما ذلك النوع من الحساب الذى إهتم به علماء الإغريق المثاليين ، كما وصفناه فى الباب السابق فلا يساعدنا البتة فى القيام بعمليات حسابية متعددة ، ولقد كان أهل أثينا يزدرون أولئك الذين برعوا منهم فى الحساب أى الذين يستطيعون الحساب بسرعة مستعينين بلوحة العد . أما أهل الاسكندرية العمليين . فكانت لهم وجهة نظر أخرى . وفى البداية كان أرشميدس يحاول جاهداً جعل الأعداد مناسبة للعمليات التى تحتاج إلى استخدامها ، فيبدو كأنه قد تبين الفوائد التى ترجى من التعبير عن ط بمتسلسلة ، فكان أول رياضى اكتشف أن متسلسلة الكسور المتناقصة يمكن إهمال حدودها الأخيرة ، إذ انه حصل على مجموع متسلسلة هندسية لا نهائية كالمتسلسلة الآتية :

$$\frac{١}{٢} \quad \frac{١}{٤} \quad \frac{١}{٨} \quad \frac{١}{١٦} \quad \frac{١}{٣٢} \quad \frac{١}{٦٤} \quad \frac{١}{١٢٨} \quad \ldots\ldots$$

ولقد استعمل نفس الطريقة التي نستخدمها لإثبات أن الكسر العشري المتكرر ٠,١̇ = $\frac{1}{9}$. فلما كان كل حد مساويا نصف الحد الذي يسبقه فإننا نطرح نصف المتسلسلة من المتسلسلة نفسها أي :

$$\text{ح} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2}\,\text{ح} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \cdots\cdots$$

فنجد أن ح − $\frac{1}{2}$ ح = $\frac{1}{2}$ أي $\frac{1}{2}$ ح = $\frac{1}{2}$ أي ح = ١ ومهما كبر عدد حدود المتسلسلة فإن مجموعها لايتعدى القيمة واحد ، وتظهر فائدة مثل هذه المتسلسلة في تمثيل القياسات لأي درجة من الدقة ، بمقارنة مجموع الخمسة حدود الأولى بمجموع العشرة حدود الأولى كما يأتي : —

٠,٥
٠,٢٥
٠,١٢٥
٠,٠٦٢٥
٠,٠٣١٢٥
,٩٦٨٧٥

٠,٥
٠,٢٥
٠,١٢٥
٠,٠٦٢٥
٠,٠٣١٢٥
٠,٠١٥٦٢٥
٠,٠٠٧٨١٢٥
٠,٠٠٣٩٠٦٢٥
٠,٠٠١٩٥٣١٢٥
٠,٠٠٠٩٧٦٥٦٢٥
٠,٩٩٩٠٢٣٤٣٧٥

فمجموع الحدود الخمسة الأولى مقربا لرقمين عشريين هو ,٩٧ . أي أقل من الواحد الصحيح بمقدار ٣٪ تقريبا ، اما مجموع الحدود العشرة الأولى فهو ٠,٩٩٩٠ وهو أقل من الواحد الصحيح بمقدار واحد في الألف ، وسنرى فيما بعد أن الأعداد التي كان يستعملها علماء الإسكندرية ، لم تكن تجعلهم يتبينون تقرب المتسلسلة بمثل

السهولة التى يتيحها لنا استعمالنا الكسور العشرية ، فطريقة الإغريق الأثينية فى كتابة الأعداد ، هى الرمز للأعداد من ١ إلى ٩ بالحروف التسعة الأولى من الحروف الأبجدية فى اللغة الاغريقية ، كما يرمز بالحروف التسعة التالية للأعداد من ١٠ إلى ٩٠ ، وبالحروف التسعة التى تليها الأعداد من ١٠٠ إلى ٩٠٠ ، فاحتاجوا لإضافة ثلاثة حروف قديمة للحروف الأبجدية ليكمل عدها إلى ٢٧ .

ولكتابة أى عدد أكبر من ٩٩٩ ، كانوا يبدئون الكتابة من أولها ثانيا ، مستعملين نفس الحروف بإشارة خاصة للدلالة على المراتب العشرية الكبيرة ، ولقد كتب أرشميدس مقالة ، قدر فيها عدد حبات الرمال فى العالم ، ولكن هذا كان عملا لافائدة منه ، فى عهد كانت فكرة الناس عن الحد الذى يمكن أن تكبر اليه الأشياء ، مقيدة بعدد الحروف الأبجدية فى لغتهم ، وفى هذه المقالة ، تبين أرشميدس أهم خاصيتين من خصائص الطريقة الحديثة لكتابة الأعداد ، إذ أنه اقترح أن تمثل جميع الأعداد الكبيرة بمكررات القوى البسيطة للعدد عشرة ، كما أنه تعرض كذلك للقانون الذى بنيت عليه اللوغارتيمات ، وهذا القانون يمكن إدراكه بوضع متسلسلة هندسية والمتسلسلة الأصلية التى اشتقت منها جنباً إلى جنب ، فمثلا :

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
٢	٤	٨	١٦	٣٢	٦٤	١٢٨	٢٥٦	٥١٢	١٠٢٤

فلنضرب أى عددين من أعداد المتسلسلة السفلى ، نجمع العددين المناظرين لهما من المتسلسلة الأصلية ، فيكون حاصل الضرب هو العدد الواقع فى المتسلسلة الهندسية تحت العدد الذى يمثل المجموع فى المتسلسلة الأصلية ، فمثلا لضرب ١٦ فى ٣٢ ، نجمع الأعداد المناظرة لها فى المتسلسلة الأصلية (اللوغاريتمات كما نسميها الآن) أى ٤+٥ = ٩ ، والعدد المناظر للعدد ٩ فى المتسلسلة السفلى (الأعداد المقابلة للوغاريتمات) هو ٥١٢ أى حاصل الضرب ، ويمكن تجربة هذه القاعدة بتكوين متسلسلات أخرى مثلا المتسلسلة

٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ٨١ ، ٢٤٣ ، ٧٢٩ ... الخ

وبلغة الجبر الحديثة يكتب هذا القانون كما يأتى : —

$$أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$$

ولم ينجح أرشميدس فى تنفيذ طريقة كتابة الأعداد التى كان يستخدمها معاصروه.

كما أنه لم يتاح له عمل جداول للوغاريتمات يمكن استخدامها فى إجراء عمليات الضرب بسرعة ، ولو تم له ذلك لاقتلع ثقافة عصره الاجتماعية من جذورها ، إذ أن الناس كانوا لايزالون يستعملون الرموز القديمة للأعداد الصغيرة . فرسو به الباهر ، يدل على أننا لايمكن أن نتحمل ترك مجموع الجنس البشرى دون تعليم ، مهما كان فى ذلك من تسلية لأولئك المتعلمين الذين يلذلهم التعالى على أقرانهم . ومثل هذا التقدم بنظرية الأعداد الذى دعا إليه أرشميدس لابد أنه نشأ عن الشعور بالحاجة العامة إليه ، وليس بكافياً أن يطالب بما تحتاج إليه أفراد قلائل من ذوى العبقرية ، فالعالم الرياضى يحتاج إلى معاونة الرجل العادى بقدر مايحتاج هذا الأخير إلى معاونته ، إذا كان يرغب فى حيازة وسائل النقل المنتظمة التى تدار بالعجلات .

ولقد كانت طريقة الأغريق الأثينية فى كتابة الأعداد ، تقف حجر عثرة أمام علماء الأسكندرية ، فكانت أول خطوة فى نمو ثقافتهم ، تتميز بإحراز تقدم كبير فى فن القياس وتطبيقه فى علم الميكانيكا والفلك ، فعرضت عمليات حسابية بين مقادير مريعة الكبر ، على أناس يستعملون شفرة لكتابة الأعداد تستعمل رمزاً جديداً لكل مرتبة عشرية ، أما الخطوة الثانية فى تقدم ثقافتهم ، فكانت تتميز بمحاولات جدية لاكتشاف طرق بسيطة سريعة لإجراء العمليات الحسابية ، فأعاد هذا نظرية العدد إلى علم الهندسة ولكن بطريقة جديدة ، فكانوا يستخدمون الأشكال الهندسية مثل شكلى ٣٨ و ٤٠ ، لاستنبـــاط طرق إجراء العمليات الحسابية . ولقد سبق أن أشرنا إلى ما قام به نيكوماخوس العالم الاسكندرانى ، لنوضح الفوائد العملية لهذه الطرق ، وهناك عالمان آخران أقل منه فى الأهمية هما ديوفنتس سنة ٢٥٠ م وثيون سنة ٣٥٠ م .

أما ديوفنتس فلقد قدم الأسس التى بنى عليها علم الجبر عنـــد الهنود والعرب ، وهناك من الأسباب ما يدعو إلى الاعتقاد بأن أعماله قد انتشرت فى الشرق حتى بلاد الفرس . لأن نشأة الرياضة عند الهنود كانت بعد وفاته بمائة وخمسين سنة ، وسنشير إلى أبحاثه فى سياق الكلام فيما بعد ، أما الآن فيكفى الإشارة إلى أنه كان أول من استعمل صيغة المصدر فى الرياضة ، أى ذلك النوع من الكلام الذى يحتوى على معنى الاسم والفعل (أنظر الباب الثالث) فقبل ديوفنتس كانت عملية الضرب مقصورة على أعداد تعامل كما لو كانت أسماءاً ، ولم يتح لأحد أن يتبين أن معادلات فى الصورة

ولقد كان ثيون يجرى عمليات الضرب دون استعمال لوحة العد ، أو على الأقل كان يستعملها فى الخطوة الأخيرة وذلك باستخدامه جدولا للضرب ، وبما أن الشفره الأبجدية تحتوى على ثلاث مراتب عشرية ، فإن جدول الضرب عنده كان يحتوى على ثلاث مجموعات لحواصل الضرب ، كل منها مكونة من تسعة أعمدة وتسعة صفوف ، بدلا من مجموعة واحدة ذات عشر أعمدة وعشر صفوف كما فى جدولنا ، وشكل ٩٩ يبين جزءا من جدول الضرب هذا ، ويكفى تتبع المثال الآتى لضرب ١٣ فى ١٨ ، فإن الخطوات تكون كما يأتى :

١٣ × ١٨ = (١٠ + ٣) (١٠ + ٨)

= ١٠^٢ + ١٠ (٨) + ٣ (١٠) + ٣ (٨)

= ١٠٠ + ٨٠ + ٣٠ + ٢٤

= ٢٣٤

حـ ى × ح ى = (ى + حـ) (ى + ح)

= ى (ى) + ى (ح) + حـ (ى) + حـ (ح)

= ق + ف + ل + د ك

= د ل ر

أو بالطريقة الآتية :

١٣ × ١٨ = (١٠ + ٣) (٢٠ − ٢)

= ١٠ (٢٠) − ١٠ (٢) + ٣ (٢٠) − ٣ (٢)

= ٢٠٠ − ٢٠ + ٦٠ − ٦

= ٢٣٤

حـ ى × ح ى = (ى + حـ) (ك − ب)

= ى (ك) − ى (ب) + حـ (ك) . . حـ (ب)

= ر − ك + س − و

= د ل ر

جزء من جدول الضرب الاسكندرى مكتوبا بالحروف الأبجديه العربيه

	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠	٧٠	٨٠	٩٠
	ا	ب	ج	د	ه	و	ز	ح	ط	ى	ك	ل	م	ن	س	ع	ف	ص
٢ = ب	ب	و	و	ح	ى	ى ب	ى د	ى و	ى ح	ك	م	س	ف	ق	ق ك	ق م	ق س	ق ف
٣ = ج	ج	و	ط	ى ب	ى ه	ى ح	ك ا	ك د	ك ز	ل	س	ص	ق ك	ق ن	ق ف	ر ى	ر م	ر ع
٤ = د	د	ح	ى ب	ى و	ك	ك د	ك ح	ل ب	ل و	م	ف	ق ك	ق س	ر	ر م	ر ف	ش ب	ش س
٥ = ه	ه	ى	ى ه	ك	ك ه	ل	ل ه	م	م ه	ن	ق	ق ن	ر	ر ن	ش	ش ن	ت	ت ن
٦ = و	و	ى ب	ى ح	ك د	ل	ل و	م ب	م ح	ن د	س	ق ك	ق ف	ر م	ش	ش س	ت ب	ت ف	ث م
٧ = ز	ز	ى د	ك ا	ك ح	ل ه	م ب	م ط	ن و	س ج	ع	ق م	ر ى	ر ف	ش ن	ت ك	ت ص	ث س	خ ل
٨ = ح	ح	ى و	ك د	ل ب	م	م ح	ن و	س د	ع ب	ف	ق س	ر م	ش ك	ت	ت ف	ث س	خ م	ذ ب
٩ = ط	ط	ى ح	ك ز	ل و	م ه	ن د	س ج	ع ب	ف ا	ص	ق ف	ر ع	ش س	ت ن	ث م	خ ل	ذ ب	ض ى
١٠ = ى	ى	ك	ل	م	ن	س	ع	ف	ص	ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ

شكل (٩٩)

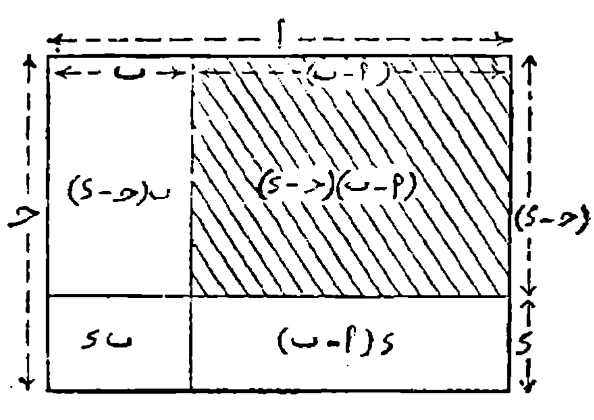
ا (ب + حـ) = اب + احـ
ا (ب − حـ) = اب − احـ

(ا + ب) (حـ + ى) = احـ + اى + ب حـ + ب ى
(ا + ب) (حـ − ى) = احـ − اى + ب حـ − ب ى

ينتج منها اصطلاحات لغوية جديدة .

فهذه المعادلات تثير مسألة ، حلها موجود فى قاعدة الإشارات التى ابتدعها ديوفنتس لإجراء العمليات الحسابية . يمكننا أن نمثل المقدار (ا + ب) بشكل هندسى بأن نصل مستقيما طوله ا من الوحدات بمستقيم آخر طوله ب من الوحدات كما يمكننا كذلك تمثيل المقدار (ا − ب) بعدد الوحدات التى يزيدها مستقيم طوله ا من الوحدات عن مستقيم أقصر منه طوله ب من الوحدات . لقد بينا فى عملية ٢ أنه يمكننا أن نمثل حواصل الضرب مثل ا (ب + حـ) أو ا (ب − حـ) بأشكال مستطيلة ، كما بينا فى عملية ٤ أنه يمكننا تمثيل حواصل ضرب مثل (ا + ب) (ا + ب) أو (ا + ب) (ا − ب) ، أو حواصل الضرب (ا + ب) (حـ + ى) أو (ا + ب) (حـ − ى) وهى تؤول إلى سابقتها ؛ ولكن ماذا تكون نتيجة ضرب (ا − ب) (ا − ب) أو (ا − ب) (حـ − ى) ؟

إن شكل ٩٨ يبين التمثيل الهندسى لهذه المسألة ، وفيه المستطيل المظلل مساحته (ا − ب) (حـ − ى) ، مضافاً إليه المستطيلات الثلاثة ذات المساحات ب ى ، ب (حـ − ى) ، ى (ا − ب) تكون المستطيل الكبير الذى مساحته ا حـ ، أى أن



شكل (٩٨)

(ا − ب) (حـ − ى) + ب ى + ب (حـ − ى) + ى (ا − ب) = ا حـ

∴ (ا − ب) (حـ − ى) + ب ى + ب حـ − ب ى + ى ا − ى ب = ا حـ

∴ (ا − ب) (حـ − ى) + ب حـ + ا ى − ب ى = ا حـ

وبأخذ ب حـ ، ا ى من كل من الطرفين وإضافة ب ى إلى كل منهما ينتج أن :

(ا − ب) (حـ − ى) = ا حـ − ا ى − ب حـ + ب ى .

والآن قارن هذه الصيغة بالصيغتين :

(ا + ب) (حـ + ى) = ا حـ + ا ى + ب حـ + ب ى

(ا + ب) (حـ − ى) = ا حـ − ا ى + ب حـ − ب ى

نلاحظ أنه فى كل حالة ، نحصل على النتيجة بضرب كل من عددى أى قوس منهما فى كل من عددى القوس الثانى كل بدوره . أما الإشارات التى تسبق الأعداد فتتبع القاعدة الآتية * :

+ × + = +

− × + أو + × − = −

− × − = +

وهذا يضيف قاعدة جديدة تساعد على تبسيط العمليات الحسابية ، باستخدام لوحة العد ، فمثلا إذا أردنا ضرب ١٩ فى ٢٨ نجرى ذلك كالآتى :

١٩ × ٢٨ = (٢٠ − ١) (٣٠ − ٢) = ٢٠ (٣٠) − (٢٠) ٢ − ٣٠ + ٢

= ٦٠٠ − ٤٠ − ٣٠ + ٢ = ٥٣٢

---

* إذا استخدمت قاعدة الإشارة فتذكر أن − (ا + ب − حـ) يعنى بالضبط أن − ١ (ا + ب − حـ) = (− ا − ب + حـ) فمثلا :

ص² + س² + ٢ حـ س + (ص² + س² − ٢ حـ س) = ٢ص² + ٢س²

و ص² + س² + ٢ حـ س − (ص² + س² − ٢ حـ س) = ٤ حـ س .

ولقد كان ثيون يجرى عمليات الضرب دون استعمال لوحة العد ، أو على الأقل كان يستعملها فى الخطوة الأخيرة وذلك باستخدامه جدولا للضرب ، وبما أن الشفره الأبجدية تحتوى على ثلاث مراتب عشرية ، فإن جدول الضرب عنده كان يحتوى على ثلاث مجموعات لحواصل الضرب ، كل منها مكونة من تسعة أعمدة وتسعة صفوف ، بدلا من مجموعة واحدة ذات عشر أعمدة وعشر صفوف كما فى جدولنا ، وشكل ٩٩ يبين جزءا من جدول الضرب هذا ، ويكفى تتبع المثال الآتى لضرب ١٣ فى ١٨ ، فإن الخطوات تكون كما يأتى :

١٣ × ١٨ = (١٠ + ٣) (١٠ + ٨)
= ١٠^٢ + ١٠ (٨) + ٣ (١٠) + ٣ (٨)
= ١٠٠ + ٨٠ + ٣٠ + ٢٤
= ٢٣٤

حـ ى × ح ى = (ى + حـ) (ى + ح)
= ى (ى) + ى (ح) + حـ (ى) + حـ (ح)
= ں + ف + ل + ى ك
= ى ل ر

أو بالطريقة الآتية :

١٣ × ١٨ = (١٠ + ٣) (٢٠ − ٢)
= ١٠ (٢٠) − ١٠ (٢) + ٣ (٢٠) − ٣ (٢)
= ٢٠٠ − ٢٠ + ٦٠ − ٦
= ٢٣٤

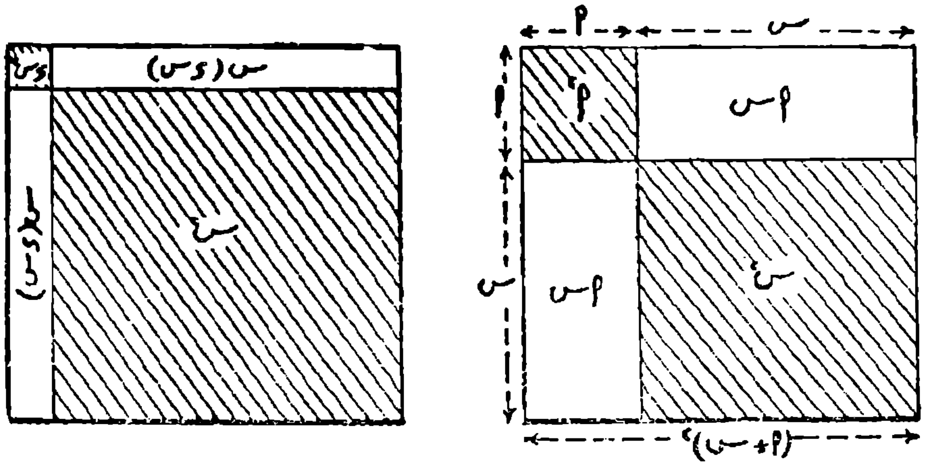
حـ ى × ح ى = (ى + حـ) (ك − ب)
= ى (ك) − ى (ب) + حـ (ك) .. حـ (ب)
= ر − ك + س − و
= ى ل ر

جزء من جدول الضرب الاسكندرى مكتوبا بالحروف الأبجديه العربيه

	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠	٧٠	٨٠	٩٠
	ا	ب	ج	د	ه	و	ز	ح	ط	ى	ك	ل	م	ن	س	ع	ف	ص
٢ = ب	ب	د	و	ح	ى	يب	يد	يو	يح	ك	م	س	ف	ق	قك	قم	قس	قف
٣ = ج	ج	و	ط	يب	يه	يح	كا	كد	كز	ل	س	ص	قك	قن	قف	رى	رم	رع
٤ = د	د	ح	يب	يو	ك	كد	كح	لب	لو	م	ف	قك	قس	ر	رم	رف	شك	شس
٥ = ه	ه	ى	يه	ك	كه	ل	له	م	مه	ن	ق	قن	ر	رن	ش	شن	ت	تن
٦ = و	و	يب	يح	كد	ل	لو	مب	مح	ند	س	قك	قف	رم	ش	شس	تك	تف	ثم
٧ = ز	ز	يد	كا	كح	له	مب	مط	نو	سج	ع	قم	رى	رف	شن	تك	تص	ثس	خل
٨ = ح	ح	يو	كد	لب	م	مح	نو	سد	عب	ف	قس	رم	شك	ت	تف	ثس	خم	ذك
٩ = ط	ط	يح	كز	لو	مه	ند	سج	عب	فا	ص	قف	رع	شس	تن	ثم	خل	ذك	ضى
١٠ = ى	ى	ك	ل	م	ن	س	ع	ف	ص	ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ

شكل (٩٩)

قد تميل إلى وجهة نظر علماء الاسكندرية ، إذا كونت مجموعات مثل هـــذه ، وأجريتها باستخدام جدول للضرب كالذى يمثله شكل ٩٩ ، وبالطبع إذا أردت ضرب أعدادا كبيرة فى بعضها، فإنك لابد أن تحتاج إلى إضافة الكثير إلى جدول الضرب.



شكل (١٠٠)

لقد عالج ثيون كذلك مسألة عملية ، ظهرت فى محاولتنا تكوين جدول للنسب المثلثية ، إذا كان يلزمنا جدول للجذور التربيعية والطريقـــة السابقة لإيجاد √٣ ، √٢ طريقة شاقة جداً ، أما الطريقة التى استخدمها ثيون فهى الموضحة فى شكل ١٠٠ . فالشكل الأيمن يمثل :

(س + أ)^{٢} = س^{٢} + ٢ أ س + أ^{٢} .

أما الشكل الأيسر فهو مثل الأيمن . إلا أننا كتبنا ى س بدلا من أ ، وهى لا تعنى أن ى مضروبة فى س وإنما تعنى كمية صـــغيرة جداً إذا قورنت بالعدد س ، وكما سبق :

(س + ى س)^{٢} = س^{٢} + ٢ س (ى س) + (ى س)^{٢}

أو (س + ى س)^{٢} − س^{٢} = ٢ س (ى س) + (ى س)^{٢}

والشكل يبين أن (ى س)^{٢} كمية صغيرة جداً إذا قورنت بالمستطيلين س (ى س)، فلا يكون هناك خطأ كبيراً إذا وضعنا :

(س + ى س)^{٢} − س^{٢} = ٢ س (ى س)

$$\text{أو}\quad \text{ى س} = \frac{(\text{س} + \text{ى س})^{٢} - \text{س}^{٢}}{٢\,\text{س}}$$

والمثال الآتى يوضح أن الخطأ فى هذه الصيغة صغير . يمكن كتابة ١,٠١ فى الصورة (١ + ٠,٠١) حيث أخذنا ١ بدلا من س ، ٠,٠١ بدلا من ى س ، وبما أن ٠,٠١ صغيرة جدا إذا قورنت بالواحد ، فإننا نجد أن :

$$\text{ى س} = \frac{(١,٠١)^{٢} - ١^{٢}}{٢} = \frac{١,٠٢٠١ - ١}{٢} = ٠,٠١٠٠٥ \ \text{تقريبا}$$

فالقيمة الناتجة (٠,٠١٠٠٥) تختلف عن القيمة الأصلية (ى س = ٠,٠١) بمقدار ٠,٠٠٠٠٥ فقط . ولإيجاد الجزر التربيعى باستعمال هذه الصيغة ، تخمن قيمة قريبة منه . فمثلا $\sqrt{٢}$ يقع بين ١ ، ٢ لأن $١^{٢}$ (= ١) أقل من ٢ ، كما أن $٢^{٢}$ (= ٤) أكبر من ٢ ، وحيث أن $١٤^{٢}$ = ١٩٦ ، فإن ١,٤ تكون قريبة جداً من $\sqrt{٢}$ ولكنها أصغر منه بقليل ، وإذن فلنضع $\sqrt{٢}$ = ١,٤ + ى س أى أن

$$(١,٤ + \text{ى س})^{٢} = ٢$$

فينتج من الصيغة السابقة أن :

$$\text{ى س} = \frac{(١,٤ + \text{ى س})^{٢} - (١,٤)^{٢}}{٢\,(١,٤)}$$

$$= \frac{٢ - (١,٤)^{٢}}{٢\,(١,٤)} = \frac{٢ - ١,٩٦}{٢,٨}$$

$$= ٠,٠١٤ \ \text{تقريبا}$$

فنحصل على أن $(١,٤ + ٠,٠١٤)^{٢} = ٢$ تقريباً

أى $١,٤١٤ = \sqrt{٢}$

ولكن هذه القيمة فيها خطأ صغير كذلك ، ولذا نأخذها كتقريب ثان ، ونحسب القيمة الجديدة بأخذ $ى^{٢}$س بدلا من ى س ، أى أن : *

$$(١,٤١٤ + ى^{٢}س)^{٢} = ٢$$

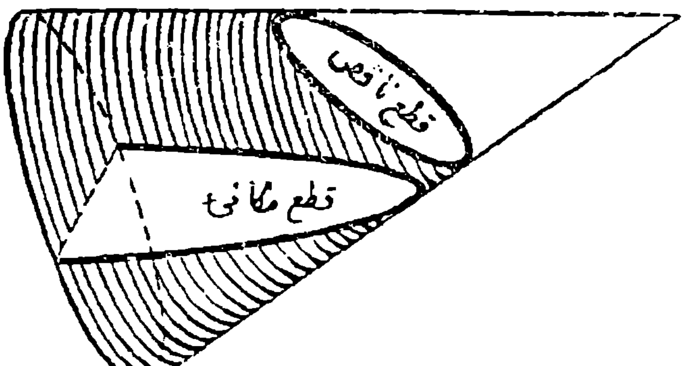
$$\therefore ى^{٢}س = \frac{٢ - (١,٤١٤)^{٢}}{٢ (١,٤١٤)}$$

وينتج من هذا أن $ى^{٢}$س = ٠,٠٠٠٢ . وإذن كتقريب ثالث نجد أن $\sqrt{٢}$ = ١,٤١٤٢ وبمقارنة هذه القيم ببعضها نجد أن :

$(١,٤)^{٢}$	= ١,٩٦	الخطأ ٢ ٪
$(١,٤١٤)^{٢}$	= ١,٩٩٩٣٩٦	الخطأ ٠,٠٣ ٪
$(١,٤١٤٢)^{٢}$	= ١,٩٩٩٩٦١٦٤	الخطأ ٠,٠٠٢ ٪

ويمكننا أن نستمر هكذا لأى درجة نحتاجها .

ولقد كان ثيون آخر الرياضيين من ذوى الأهمية فى الإسكندرية ، وكانت ابنته هيباتيا تعلم الرياضة فى الأسكندرية . كما أنها حررت أعمال ديوفنتس .



شكل (١٠١)

---

* $ى^{٢}$ س لا تدل على أن مربع ى مضروب فى س ولكنها تدل على التقريب الثانى فى س' .

لقد خالف أبولونيوس الذى عاش سنة ٢٣٠ ق . م قاعدة أفلاطون ، ودرس المنحنيات التى لا يمكن رسمها بالبرجل والمسطرة ، ولقد درس على الخصوص ثلاث منحنيات تناظر حدود مقاطع المخروط ، إثنان منها موضحة فى شكل ١٠١ ؛ أولها القطع الناقص وهو المنحنى الذى يمثل مسار النجوم ، وثانيها القطع الكافىء وهو يمثل مسار قنبلة المدفع ، أما القطع الثالث ، فسنستخدمه ، حينما نصف تمدد غاز فى المحرك ذى الاحتراق الداخلى (الباب الحادى عشر) ولقد استخدم أبولونيوس هندسة إقليدس عن الأشكال المجسمة للتقديم للمبادىء الرئيسية فى علم الهندسة المعدلة . ولقد كان الناس يستعملون الخرائط الإسقاطية فى الملاحة ، فى نفس الوقت الذى بدأوا فيه يهتمون بمسارات النجوم بناء على المشاهدات الجديدة التى أتاحها لهم اختراع التلسكوب ، كما أن هذا كان نفس الوقت الذى بدأوا فيه يستخدمون المدفعية والآلات التى تدار بالعجلات . ولقد كانت هذه الخرائط الإسقاطية ، المبنية على مبدأ خطوط الطول والعرض ، هى الضربة القاضية لهندسة أفلاطون ، كما كانت بشيراً بميلاد الهندسة الجديدة التى سندرسها فى الباب التاسع .

وكان مقتلها على يد رهبان القديس سيريل ، الذين كانوا يفضلون الفلسفه على العفة والطهارة ، ولقد وصف جيبون ، كيف مزقوا جسدها العارى بأصداف المحار ، كما كتب فولتير قائلا : «يكفينى أن أقول ، أن رجلا ذا مبادىء مثل القديس سيريل وهب حياته لمبدئه ، لم يتورع عن قتل النساء العاريات حين وضعن أمامه ، ولكننى لا أشك فى أنه طلب من الله أن يغفر له هذا العمل الفظيع ، وإننى لأدعو الله أن يتولى روحه برحمته وعطفه . »

تقدم لنا طريقة ثيون لإيجاد الجذر التربيعى ، مبدأ هاما ، يلعب دورا كبيرا فى فرع حديث من فروع الرياضة وهو حساب التفاضل ، كما أن الطريقة التى استخدمها أرشميدس لتقدير قيمة ط ، تمثل المبدأ الذى بنى عليه حساب التكامل ، أما إدخال هيباركس لمبدأ خطوط الطول والعرض وبحث أبولونيوس للقطاعات المخروطية فإنها تحوى فى طيها المبادىء الأساسية فى علم الهندسة الحديثة . وكذلك وضع ديوفنتس أسس علم الجبر . أى أن كل تقدم هام حدث فى القرن السادس عشر والقرن السابع عشر من العصر الحالى قد وضع أسسه علماء الاسكندرية ، اما أنهم لم يبلغوا من التقدم أكثر مما بلغوا . فلا يشرحه القول بأن ثقافة الاسكندرية شاركت الإمبراطورية الرومانية

نهايتها ، إذا أنها بلغت ذروة التقدم الذى تؤهلها له الثقافة الإجتماعية التى ورثتها ، أما التقدم العظيم الذى تلا ذلك ، فكان سببه أن أناسا قليلى السفسطة ، أمدوا بشفره عددية كانت كافية لسد حاجة علماء الاسكندرية الرياضيين . أما المميزات الغير عادية للثقافة الهندية ، فهى أن رجالا لم يكونوا من الرياضيين البارزين ، وفقوا إلى اختراع الرمز (صفر) الذى يدل على لاشىء ، والذى أخفق فى اختراعه أبرز العلماء الرياضيين فى الاسكندرية ، وليس هناك من عبارة لرثاء انحلال علوم ورياضة الاسكندرية ، أبلغ من بيت شعر قاله عمر الخيام .

أما عمر الخيام نفسه ، فكان أكثر من غيره من علماء العرب ، اهتماما بنقل الثقافتين الهندية والاسكندرية .

استنباطات واختبارات

على الباب السادس

(١) استخدم الصيغة جتا^{٢} ا + جا^{٢} ا = ١ لإيجاد ما يأتى :

(ا) جتا ٤٠° ، جا ٥٠° إذا علم أن جا ٤٠° = ٠,٦٤٢٨

(ب) جتا ٧٥° ، جا ١٥° إذا علم أن جتا ١٥° = ٠,٩٦٥٩

(٢) باستخدام صيغة نصف الزاوية :

أوجد قيمة حا ١٠° ، حتا ١٠° ، ظا ٢٠° ، ظا ١٠° إذا علم أن حا ٢٠° = ٠,٣٤٢٠ ، حتا ٢٠° = ٠,٩٣٩٧

(٣) إذا علم أن حا ٤٠° = ٠,٦٤٢٨ ، حتا ٤٠° = ٠,٧٦٦٠ فاجد قيمة كلا من حا ٥٠° ، حتا ٥٠° ، ظا ٥٠° ، حا ٢٠° ، حتا ٢٠° ، ظا ٢٠° .

(٤) إذا علم أن حا ٥٠° = ٠,٧٦٦٠ ، حا ٤٣° = ٠,٦٣٢٠ ، حا ٢٣½° = ٠,٣٩٨٧

فأوجد قيمة كلا مما يأتى :

حتا ٥٠° ،	ظا ٥٠°	حتا ٢١½°	ظا ٢١½°
حتا ٢٥°	ظا ٢٥°	حتا ٤٣°	ظا ٤٣°
حتا ٤٧°	ظا ٤٧°	حتا ٤٠°	ظا ٤٠°
حتا ٢٣½°	ظا ٢٣½°	حتا ٦٦½°	ظا ٦٦½°

(٥) إذا كان حتا ٤٠° = ٠,٧٦٦٠ ، حا ٤٠° = ٠,٦٤٢٨ ، حتا ١٥

= ٠,٩٦٥٩ ، حا ١٥° = ٠,٢٥٨٨ ، حتا ٢٦½° = ٠,٨٩٤٩
، حا ٢٦½° = ٠,٤٤٦٢ . فاستعمل قانونى حا (ا + ب) ،
جتا (ا + ب) لإيجاد ما يأتى :

حتا ٥٥°   حا ٥٥°   حتا ٦٦½°   حا ٦٦½°

حتا ٤١½°   حا ٤١½°   حتا ٥٦½°   حا ٥٦½°

(٦) باستخدام القيم المعطاة فى الأمثلة السابقة ، حاول الحصول على الصيغة المضبوطة لكل من حا (ا — ب) ، حتا (ا — ب) ، ثم حقق النتيجة بمقارنتها بالشكل الموجود بالباب التاسع .

(٧) فى كتب حساب المثلثات يسمى المقدار $\frac{١}{\text{حا ا}}$ ، قتا ا كما أن $\frac{١}{\text{جتا ا}}$ تسمى قا ا وكذلك $\frac{١}{\text{طا ا}}$ تسمى طتا ا وهذه هى اختصارات لقاطع التمام والقاطع وظل التمام . استخدم الطريقة المستعملة لإثبات أن جتا ٢ ا + حا ٢ ا = ١ للبرهنة على القوانين الآتية المستعملة فى الرياضة العالية :

١ + طتا ٢ ا = قتا ٢ ا

١ + طا ٢ ا = قا ٢ ا

٨) حل مسألة الجرف فى شكل ٥٣ باستخدام قانون الجيب لحل المثلثات ، أولا : لايجاد البعد بين أقرب نقط الرصد وقمة الجرف ، ثم لايجاد ارتفاعه .

(٩) اجعل الزاوية ا فى شكل ٨٧ أكبر من ٩٠° ثم أسقط العمود ل على امتداد الضلع بَ من ناحية ا ، ثم بين أن قانون جيب التمام يصبح :

اَ ٢ = بَ ٢ + حَ ٢ + ٢ بَ حَ حتا (١٨٠ — ا)

كما أن قانون الجيب يصبح

$$\frac{\text{حا}(١٨٠ - ا)}{\text{أ}} = \frac{\text{حا ب}}{\text{بَ}} \quad \frac{\text{حا حـ}}{\text{حـَ}}$$

(١٠) إذا كانت القوانين المستعملة لحل المثلث عندما تكون ا أقل من ٩٠° هى.

$$\text{أَ}^٢ = \text{بَ}^٢ + \text{حـَ}^٢ - ٢\,\text{بَ}\,\text{حـَ}\ \text{حتا ا}$$

$$\text{حا ا} = \frac{\text{أَ حا ب}}{\text{بَ}} = \frac{\text{أَ حا حـ}}{\text{حـَ}}$$

وكانت القوانين المستعملة فى حل المثلث عندما تكون ا أكبر من ٩٠° هى.

$$\text{أَ}^٢ = \text{بَ}^٢ + \text{حـَ}^٢ + ٢\,\text{بَ}\,\text{حـَ}\ \text{حتا}\,(١٨٠° - ا)$$

$$\text{حا}\,(١٨٠° - ا) = \frac{\text{أَ حا ب}}{\text{بَ}} = \ldots\ldots$$

فما العلاقة بين (ا) حتا ا ، حتا (١٨٠ — ا).

(ب) حا ا ، حا (١٨٠ — ا) .

وإذا أمكنك أن تعين المعنى الهندسى لجيوب وجيوب تمام الزوايا التى تكبر ٩٠° ، فاستنتج قيم الجيب وجيب التمام والظل لكل من الزوايا ١٥٠° ، ١٣٥° ، ١٢٠° ؛ وحقق ذلك باستعمال قانون الجيب لديوفنتس والقانون حتا^٢ ا + حا^٢ ا = ١ .

. بدأ رجلان المسير فى نفس اللحظة من نقطة تقاطع طريقين يحصران بينهما زاوية قدرها ٥١° ، بسرعة قدرها ٣ أميال فى الساعة ، فما البعد بينهما بعد مضى ساعتين ؟

(١٢) ثبتت سارية علم بين نقطتين ا ، ب البعد بينهما ٥٠٠ ياردة ، بواسطة حبلين ثبت طرفاهما عند ا ، ب ، يميل الأول بزاوية قدرها ١١٢° والثانى بزاوية قدرها ٦٣° أوجد بعد قاعدة سارية العلم عن ا ؟

(١٣) رصدت قمة جبل من قارب فى البحر ، فكانت زاوية ارتفاعها ٢٤° ، ثم تحرك القارب مسافة قدرها ٨٠ قدما نحو قاعدة الجبل ورصدت قمته فكانت زاوية ارتفاعها ٤٧° فما ارتفاع الجبل ؟

(١٤) ثلاث قرى أ ، ب ، حـ يصلها ثلاثة طرق مستقيمة ، فإذا كان أ ب = ٦ أميال ، ب حـ = ٩ أميال وكانت الزاوية بين أ ب ، ب حـ هى ١٣٠° ، فما البعد بين أ ، حـ ؟

(١٥) سار قارب ٨ أميال نحو الجنوب ثم غير اتجاهه وسار ١١ ميلا فى اتجاه يميل شرقا على الاتجاه الشمالى بزاوية قدرها ٥٤° ، فما بعده الآن عن نقطة الإبتداء ؟

(١٦) استنتج قوانين كل من جا ٢ أ ، جا ٣ أ ، جتا ٢ أ ، جتا ٣ أ باستخدام قوانين جا (أ + ب) ، جتا (أ + ب) .

(١٧) باستخدام قوانين جا (أ + ب) ، جا (أ − ب) ، جتا (أ + ب) ، جتا (أ − ب) اثبت أن :

$$\text{جا } حـ + \text{جا } ء = ٢ \text{ جا } \frac{حـ + ء}{٢} \text{ جتا } \frac{حـ - ء}{٢}$$

$$\text{جتا } حـ + \text{جتا } ء = ٢ \text{ جتا } \frac{حـ + ء}{٢} \text{ جتا } \frac{حـ - ء}{٢}$$

$$\text{جا } حـ - \text{جا } ء = ٢ \text{ جتا } \frac{حـ + ء}{٢} \text{ جا } \frac{حـ - ء}{٢}$$

$$\text{جتا } حـ - \text{جتا } ء = ٢ \text{ جا } \frac{حـ + ء}{٢} \text{ جا } \frac{ء - حـ}{٢}$$

ثم بين كيف أن قوانين نصف الزاوية يمكن استنتاجها من قوانين جمع الزوايا .

ملحوظة: حـ + ء = ٢ أ ، حـ − ء = ٢ ب .

(١٨) باستخدام جداول النسب المثلثية ، أوجد الحدود التى تقع ط بينها ، باعتبار مساحة وطول محيط كل من كثيرى الأضلاع المرسومين فى الداخل والخارج وعدد أضلاع كل منهما اثنان وسبعون ضلعا .

(١٩) إذا علم أن جا س يساوى س تقريبا عند ما تكون س زاوية صغيرة مقاسة بالتقدير الدائرى ، فاوجد قيمة كل من جا $\frac{1}{2}$° ، جا ١° ، جا ١$\frac{1}{2}$° بأخذ ط = ٣,١٤١٦ .

(٢٠) عندما يحدث خسوف كامل للقمر تنطبق حافة قرص القمر على حافة قرص الشمس تقريبا ، فإذا كان البعد الزاوى لقطر الأرض هو $\frac{1}{2}$° تقريبا (شكل ٨٩) فاوجد طول قطر الشمس باعتبار بعدها عن الأرض هو ٩٣ مليون ميل معتبراً أن حا س = س ، جتا س = ١ إذا كانت س صغيرة ومقاسة بالتقدير الدائرى .

(٢١) دون قيم الزوايا من ١° إلى ١٠° بالتقدير الدائرى فى جدول آخذاً الفرق بين كل زاوية والتى تليها درجة واحدة ، وكذلك دون فى جدول قيم الزوايا من صفر إلى ٢ زاوية نصف قطرية بالدرجات بحيث تزيد كل زاوية عن سابقتها ربع زاوية نصف قطرية .

(٢٢) فى الأمثلة القليلة الآتية اعتبر نصف قطر الأرض ٣٩٦٠ ميل .

إذا كانت كل من كيتو عاصمة اتكا القديمة ، وكيسومو الواقعة على بحيرة فيكتوريا فى كينيا . وبونتياك الواقعة فى جزيرة بورنيو ، تبعد عن خط الاستواء بمقدار نصف درجة ، وكان خط طول كيتو هو ٧٨° غرب جرينتش وخط طول كيسومو ٣٥° شرقا وخط طول بونتياك هو ١٠٩° شرقا ، فاوجد البعد بين كل اثنين من هذه البلاد باعتبار ط تساوى ٣$\frac{1}{7}$.

٢٣ — تقع كل من أرشانجيل وزنزيبار ومكة على بعد درجة واحدة من خط الطول ٤٠° شرقا ، فإذا كان خط عرض أرشانجيل ٦٤$\frac{1}{2}$° شمالا وخط عرض مكة ٢١$\frac{1}{2}$° شمالا وخط عرض زنزيبار هو ٦° جنوبا فما البعد بين كل اثنين منها ؟

٢٤ — إذا كانت س هى طول قوس زاوية قدرها درجة واحدة مقاساً على خط الاستواء ، فاثبت أن طول قوس زاوية قدرها درجة واحدة ، مقاساً على خط عرض ل هو س جتا ل مستعيناً بشكل تصويرى .

٢٥ — أوجد البعد بين بليموث ، وينبيج إذا علم أن كل منهما تبعد عن خط عرض

٥٠° شمالا بقدر ثلث درجة ، وأن خط طول بليموث هو ٤° غرباً وخط طول وينيبج هو ٩٧° غرباً .

٢٦ — تقع كل من ريدنج وجرينتش على خط عرض ٢٨َ ٥١° شمالا ، وخط طول ريدنج هو ٥٩َ غربا ، فما البعد بين ريدنج وجرينتش ؟

٢٧ — يقع كل من البلدين ا ، ب على خط طول واحد ، وتقع ا على خط عرض ٣١° شمالا وتبعد عن ب مسافة قدرها ٢٠٠ ميل ، فما هو خط عرض ب ؟

٢٨ — باستخدام الطريقة التي سبق استخدامها لإيجاد حاصل ضرب ١٩ في ٢٨ ، اشرح قاعدة الإشارات بإيجاد حواصل الضرب الآتية :

(ا) ١٣ × ٢٧ (ب) ١٥ × ٣٩ (حـ) ١٧ × ٤٢

(ء) ٢١ × ٤٨ (هـ) ٢٨ × ٥٣

٢٩ — أجر عمليات الضرب المبينة في المسألة رقم ٢٨ باستخدام جدول الضرب عند علماء الإسكندرية .

٣٠ — أوجد مجموع ىه حداً من المتسلسلات الهندسية الآتية : —

(ا) ٣ — ٩ + ٢٧ … (حـ) $٢\frac{١}{٤}$ — $١\frac{١}{٢}$ + ١ …

(ب) $\frac{١}{٤}$ — $\frac{١}{٨}$ + $\frac{١}{١٦}$ … (ء) ١ — $\frac{٢}{٣}$ + $\frac{٤}{٩}$ …

حقق النتيجة حسابياً بإيجاد مجموع خمسة حدود .

٣١ — عين (ا) الحد الذي ترتيبه ٢ ىه ، (ب) الحد الذي ترتيبه (٢ىه + ١) من المتسلسلة ١ ، — اس ، اس٢ ، — اس٣ ، …………

قواعد يلزم حفظها

١ — $\text{حتا}\ \tfrac{1}{2}\text{ا} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \text{حتا ا})}$

$$\text{حا}\ \tfrac{1}{2}\text{ا} = \frac{\text{حا ا}}{2\ \text{حتا}\ \tfrac{1}{2}\text{ا}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \text{حتا ا})}$$

٢ — $\text{حتا}^2\text{ا} + \text{حا}^2\text{ا} = 1$ ، $\text{حا ا} = \sqrt{1 - \text{حتا}^2\text{ا}}$ ، $\text{حتا ا} = \sqrt{1 - \text{حا}^2\text{ا}}$

٣ — $\text{حا}(\text{ا} \pm \text{ب}) = \text{حا ا حتا ب} \pm \text{حتا ا حا ب}$

$\text{حتا}(\text{ا} \pm \text{ب}) = \text{حتا ا حتا ب} \mp \text{حا ا حا ب}$

٤ — $\text{ا}'^2 = \text{ب}'^2 + \text{حـ}'^2 - 2\text{ب}'\text{حـ}'\ \text{حتا ا} = \text{ب}'^2 + \text{حـ}'^2 + 2\text{ب}'\text{حـ}'\ \text{حتا}(180^\circ - \text{ا})$

٥ — $\frac{\text{حا ا}}{\text{ا}'} = \frac{\text{حا ب}}{\text{ب}'} = \frac{\text{حا حـ}}{\text{حـ}'} = \frac{\text{حا}(180 - \text{ا})}{\text{ا}'}$

٦ — إذا كانت س صغيرة جدا ومقاسة بالتقدير الدائرى . فإن

$\text{حا س} = \text{س} = \text{طا س}$

$\text{حتا س} = 1$

٧ — $- \times - = +$ ، $- \div - = +$

$- \times + = -$ ، $- \div + = -$

$+ \times + = +$ ، $+ \div - = -$

٨ — $\text{حا}\ 0^\circ = \text{صفر} = \text{طا}\ 0^\circ$ ، $\text{حا}\ 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{حتا}\ 30^\circ$

$\text{حتا}\ 0^\circ = 1 = \text{طا}\ 45^\circ$

$\text{حا}\ 30^\circ = \tfrac{1}{2} = \text{حتا}\ 60^\circ$ ، $\text{حا}\ 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{حتا}\ 45^\circ$

تذييل : : قيم ط

لقــــد حصلنا على قيم للمقدار ط باستخدام المعادلتين المقربتين ط = ه × حا $\frac{ط}{ه}$ ، ط = ه طا $\frac{ط}{ه}$ بأخذ قيم مختلفة للمتغير ه ، ثم حسبنا فى العمود الرابع متوسط قيم ط المعطاة من كل من المعادلتين أى أن هذا العمود يمثل قيم المقدار $\frac{1}{2}$ ه (حا $\frac{ط}{ه}$ + طا $\frac{ط}{ه}$) ، وباستخدام صيغ سنثبتها فيما بعد يمكننا حساب الخطأ فى قيمة ط المحسوبة من هذه المعادلات إذا كانت كبيرة .

إحدى الصيغ التى ستعطى فيما بعد هى :

$$حا\ \alpha = \alpha - \frac{\alpha^{3}}{!٣} + \frac{\alpha^{5}}{!٥} - \frac{\alpha^{7}}{!٧} + \dots$$

حيث α زاوية مقاسة بالتقدير الدائرى .

فإذا وضعنـــا $\alpha = \frac{ط}{ه}$ نجد أن :

$$ه\ حا\ \frac{ط}{ه} = ط - \frac{ط^{3}}{٦ه^{2}} + \frac{ط^{5}}{١٢٠ ه^{4}} - \dots .$$

وإذا كانت ه كبيرة فإن الحد الأخير على اليسار وجميع الحدود التاليـة يمكن إهمالها وبذلك نحصل على الصيغة المقربة :

$$ه\ حا\ \frac{ط}{ه} = ط - \frac{ط^{3}}{٦ه^{2}}$$

وبطريقة مماثلة نحصل على الصيغة المقربة :

$$ه\ طا\ \frac{ط}{ه} = ط + \frac{ط^{3}}{٣ه^{2}}$$

وبذلك يكون $\frac{1}{2}$ ه $\left(حا\ \frac{ط}{ه} + طا\ \frac{ط}{ه} \right) = ط + \frac{ط^{3}}{١٢ه^{2}}$.

الباب السابع

فجر الصفر

أو

كيف نشأ علم الجبر

إن أفضل سبيل لتقديم الجزء التالي فى قصتنا هو اقتباس ما قاله دانتزج فى كتابه اللطيف «العدد» ..... «لقد رأت هذه الفترة الطويلة ، التى امتدت إلى خمسة آلاف سنة ، ظهور وتلاشي مدنيات كثيرة ، كل تاركة وراءها تراثا من الأدب والفن والفلسفة والدين . ولكن ما مقدار الإنتاج فى ميدان العدد وهو أول فن عالجه الإنسان ؟ ليس إلا أرقاما بدائية جامدة بدرجة يستحيل معها التقدم ، وطريقته للعد محدودة المجال ، حتى أن الخبراء كانوا يستدعون لإجراء أبسط الحسابات . وقد استعمل الإنسان هذه الطرق لآلاف من السنين ، دون اجراء تحسين واحد له قيمته فى الاداة ، ودون إضافة ولو فكرة واحدة هامة إلى النظام . وإذا قورن تاريخ العد حتى بنمو الافكار البطئ خلال العصور المظلمة ، لظهرت لنا صورة غريبة من الركود والقفر . وإذا نظرنا بهذا المنظار إلى إنتاج ذلك الهندى المجهول الذى اكتشف فى وقت ما من القرون الأولى من حقبتنا ، قاعدة الموضع لاستحق هـــذا الإنتاج نسبيا أن يعتبر حدثا عالمياً » .

وفى القرون الأولى قبل الميلاد وبعـــده ، استخدمت فى الصين طريقة لتدوين الأعداد عرفت بطريقة «عيدان الكبريت» . وكانت هذه الطريقة هيروغليفية أى تصويرية . كما دل على العمليات الحسابية بواسطة قطع من العصى . وإن استعمال رموز مثل ≡ ، = للرقمين ٣ ، ٢ لأقرب لطريقة العد باللوحة من طريقة كتابة الأعداد التى استعملها العبريون والرومان والاغريق . وكان هؤلاء يضيفون رمزاً جديداً لكل عمود جديد فى اللوحة (انظر شكل ٦) . وفى الكتابة الرومانية تمثل العلامات

(M, C, X, I) خانات الآحاد والعشرات والمئات والآلاف على الترتيب .وكان تكرار X ثلاث مرات X X X يدل على ثلاثة خرزات فى عمود العشرات ، وتكرار I مرتين يدل على خرزتين فى عامود الآحاد . ولو كتب الرومان ٣٢ على الصورة (I I) (I'I I) لما كان هناك مايميز بينها وبين ٣٢٠ أو ٣٠٢ أو ٣٢٠٠ أو ٣٠٠٢ . . . . . الخ .

وينطبق هذا أيضا على طريقة العد بعيدان الكبريت ، فاذا كتبنا ٣٢ على الصورة ≡ = فكيف يمكن تمييزها عن أى من الأعداد السابق ذكرها ؟ وهناك طريقة بسيطة للتخلص من هذا الالتباس ، ألا وهى استعمال علامة ما للدلالة على العمود الخالى فى لوحة العد وقد بدأت هذه العلامة كنقطة ، ثم تحولت إلى دائرة . وبذلك تكتب ٣٠٢ (≡ ٠ =) و ٣٢٠ (≡ = ٠) . وقبل استعمال العلامتين . و ٥ ، كانت (≡) قد تحولت إلى Z و (=) إلى Z وهما الشكلان البدائيان للرقمين اللاتينين 3 و 2 . وقد بدأ هذا العمل فى الهند فى وقت ما بين سنة ١٠٠ ق . م و سنة ١٥٠ م . ولم يكن هـــذا فى أول الأمر اكتشافا رياضيا بالمعنى العلمى ، بل مجرد اكتشاف عملى . فقد كانت الكلمة المقابلة للعلامة (٥) هى «سونيا» أو الخالى . وجاءت بعد ذلك فكرة تعريف العلامة (٥) بلا شيء أو صفر (زيرو) . وقد اكتشف المايون نفس الفكرة حوالى سنة ٥٠٠ م . وقد وجدت على آثارهم الحجرية رموز عددية مرتبة ترتيبا رأسياً ، كما كان متبعا فى طريقة عيدان الكبريت .

وقد اعترف الجميع بالأهمية البالغة لهذه المرحلة . فقد أشار إليها لابلاس ذلك الفلكى الرياضى الفذ الذى قال لنابليون أن وجود الله ليس فرضا أساسيا لعلوم الطبيعة ، أشار إليها فى فقرة ذات مغزى .

« إن الهند هى التى مدتنا بالطريقة الماهرة للتعبير عن الأعداد بواسطة عشر رموز بحيث تكون لكل رمز قيمة موضعية إلى جانب قيمته المطلقة ، وهى فكرة عميقة وهامة ولو ظهرت لنا الآن بسيطة بدرجة لاتمكننا من تقديرها حق قدرها . وهذه البساطة نفسها وسهولة العد التى نشأت عنها هى التى ترتفع بعلم الحساب إلى أعلى مراتب الاختراعات النافعة .

وسنقدر عظمة هذه الخطوة عندما نذكر أنها غابت عن بال كل من أرشميدس وأبولونيوس وهما اثنان من أعظم الرجال القدماء » .

وقد أدهش ذلك دانتزج أيضا فقال » :

«وأنه ليحيرنا بنوع خاص أنها لم تخطر ببال رياضى الأغريق العظماء . هل ذلك لأن الأغريق كانوا يحتقرون العلوم التطبيقية إلى هذا القدر ، تاركين حتى تعليم أبنائهم للعبيد ؟ وإذا كان الأمر كذلك فكيف حدث أن الأمة التى أعطتنا الهندسة وقطعت فى هذا العلم شأواً بعيداً لم تكشف عن حتى ولا جبراً بدائيا ؟ أليس غريبا أيضاً أن الجبر وهو حجر الأساس فى علوم الرياضة الحديثة ظهر لأول مرة فى الهند ، وفى نفس الوقت الذى ظهر فيه العد الموضعى ؟ »

ولا شك أن من المستحيل إعطاء إجابة كاملة لمثل هذه الأسئلة ، ولو أنها فى الوقت نفسه تنير لنا الطريق بعض الشىء. فمن الأسباب التى من أجلها تعذر على الرياضيين القدماء الوصول إلى هذا الاكتشاف القيم، أنهم ورثوا ثقافة اجتماعية اضطرتهم لاستعمال أرقام كانت موجودة فعلا،فلم يشعروا بحاجة ماسة إلى عمليات حسابية متشعبة باعداد كبيرة وهكذا كان لابد أن يأتى هذا التقدم على أيدى قوم أقل تعليما ، قوم لم يعرفوا كتابة الأعداد إلا بعد أن كان غيرهم يستعمل الكبير منها بسهولة .

وقد اتسع مجال التجارة العالمية إلى حد كبير فى عهد الأمبراطورية الرومانية . وشغلت مسائل الضرائب والديون والفائدة قدماء المحاسبين الهنود كثيراً كما سيتضح من مسألة سنوردها فيما بعد من كتاب ليلافاتى ، كيف بقيت هذه الخطوة ليخطوها الهنود وكيف فاتت القدماء من أساطين الرياضة لتكون من نصيب الرجل العملى؟ تنشأ صعوبة الإجابة على هذا السؤال عن ربط التقدم الفكرى بعبقرية عدد قليل من الأفراد الموهوبين بدلا من البحث عنه فى العادات الفكرية للمجتمع التى تطغى على أعظم العبقريات الفردية .

فالذى حدث فى الهند حوالى سنة ١٠٠ م قد حدث من قبل ، وقد يكون حادثاً الآن فى روسيا السوفيتية. فعند طور خاص من تاريخ أية ثقافة يكون ظهور الطبقة الدنيا نقطة تحول هامة . ومن الحقائق التى لا يهتم لها الرياضيون ولكنها عقبة

كنود أمام بحاث تحسين النسل ، إن التاريخ يتخذ من الأشياء التافهة فى هذا العالم سبيلا لحـــيرة العقلاء ومن الضعفاء ما يقضى به على الأقوياء . وقبولنا لهذه الحقائق يعنى اعترافنا بأن كل ثقافة تحوى على ما يقضى عليها إلا اذا اهتمت بتعليم الأغلبية اهتمامها بتعليم الموهوبين القلائل .

وسيتضح فى هذا الباب لماذا فشل الأغريق فى تنمية علم الجبر بينما وفق الهندوس والعرب فى ذلك . وباختراع الصفر « ٥ » أو سونيا كما يسمى بالهندية تحرر العقل من قيود لوحة العد . فبمجرد أن وجدت علامة للعمود الخالى سهل الانتقال من عمود لآخر سواء أ كان ذلك على لوحة العد أو على اللوح الحجرى أو الورق أو أية أداة أخرى للـكتابة . وجاءت طريقة الـكتابة الجديدة صورة كاملة للحركة الآلية مع الاستغناء عن النموذج الآلى واتساع مجال استعمالها ، فاذا فرضنا أن لدينا لوحة بأربعة أعمدة فقط (MCXI) ، فإننا نجد صعوبة إذا تعدت عملياتنا العـددية العدد ٩٩٩٩ . أما على الورق فيمكننا أن نحسب آلياً فيما مثل ٩٩,٩٩٩,٩٩٩,٩٩٩ بنفس السهولة التى نحسب بها فيما مثل ٩٩٩٩ . وفضلا عن ذلك نتمكن من ملاحظة كثير من الخواص البسيطة لمتسلسلات الأعداد (كما جاء فى الباب الأول) وقد عالج عباقرة الاسكندرية أمثال ديوفانتوس وذيون فى عزلتهم مسائل من نفس النوع الذى عالجه الهندوس والعرب من بعدهم . وكان علم الجبر عندهم معقداً جداً لأنهم كانوا يستعملون نفس الرموز لـكل من الكلمات والأعداد . ولهذا تعذر عليهم أن يقصروا استعمال الحروف على الأعداد المعنوية . وقد تمخضت ثقافة اجتماعية جديدة عن حياة العمل الخالية من التقاليد . وبدأ اهتمام بقواعد اســـتعمال الأعداد فى نفس الوقت الذى هيأت فيه هذه الثقافة الأداة لاستعمال الأعداد بسهولة ، كما ظهرت مسائل عملية تحتاج فى حلها للأعداد . ولم ينشأ علم جبر عند الأغريق لأن الدافع الاجتماعى لذلك لم يكن موجوداً لديهم ، وقد لمس الاسكندريون الحاجة إلى ذلك العلم ولـكن كان ينقصهم الاستعداد الاجتماعى بسبب عزلهم . وأما الهندوس فقد تهيأ لهم الاستعداد الاجتماعى فى نفس الوقت الذى لمسوا فيه الحاجة للجبر .

وسنستعرض فى هذا الباب ثلاث إشارات مختلفة أدت إلى تنمية علم الجبر عند الهندوس والعرب . وهى أولا حاجتهم إلى قواعد بسيطة للعد أو الجوريتم (وهو الاسم الذى أطلق فى القرن الثالث عشر على علم الحساب نسبة الى الخوارزمى عالم الجبر العربى) وثانياً حل المسائل العملية المحتوية على أعداد أى « حل المعادلات » وثالثاً العودة إلى دراسة المتسلسلات .

وأول عهدنا برياضة الهندوس كتاب ليلافاتى لمؤلفه اريباهاتا جوالى سنة ٤٧٠م وفيه يناقش المؤلف قواعد علم الحساب ويستعمل قانون ديوفانتوس للاشارات ، كما يعطى جدولا لجيوب الزوايا على فترات قدرها ٣ ¾° ، ويحصل على (٣,١٤١٦٠) قيمة للنسبة التقريبية ، والخلاصة أن الرياضة الهندية بدأت حيثما توقفت رياضة الاسكندريين وفى القرن السادس عالج براهماجوبتا موضوعات الحسابات والمتسلسلات والمعادلات وهى التى عالجها اريباهاتا من قبل . وكان هؤلاء الرياضيون الهنود القدماء قد ذكروا قوانين الصفر أو « سونيا » التى بنى عليها علم الحساب الحديث بأجمعه ، الاوهى :

$$1 \times 0 = 0$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 - 0 = 1$$

كما استعملوا الكسور بسهولة دون الاستعانة بالوحدات المنقولة كالدقائق والثوانى ، وكانوا يكتبونها كما نفعل نحن إلا أنهم لم يستعملوا الشرطة ، فمثلا كانوا يكتبون سبعة أثمان هكذا : $\begin{smallmatrix}7\\8\end{smallmatrix}$:

وحوالى سنة ٨٠٠م أصبحت بغداد مركزاً ثقافيا تابعا للخلافة الإسلامية . وكانت مدارس الاسكندرية قد أغلقت نتيجة لظهور المسيحية ، فنزح علماؤها إلى الفرس ناقلين معهم علومهم . ومن جهة أخرى كانت المؤلفات الفلسفية الاغريقية قد نقلت إلى الفرس ايضاً . وكان الخليفة يعهد إلى العلماء بترجمة المراجع السوريانية والاغريقية إلى العربية . وفى أثناء القرنين التاسع والعاشر الميلاديين كانت مؤلفات بطليموس واقليدس وارسطاليس وآخرين غيرهم من العلماء متداولة بين بغداد والجامعات المغربية التى كانت قد أنشئت فى بلاد مختلفة وخاصة فى اسبانيا .

ولم يكن للبدو العرب الذين فتحوا واستولوا على اطلال الإمبراطورية الرومانية نظام للرهبنة . ولما كان العلم فى الإسلام بعيداً عن سيطرة أى طائفة من المسلمين باسم الدين ، فقد انفصل التوقيت عن كل سيطرة كنائسية واتجه العلماء فى العصر العربى إلى عمل التقاويم فحسنوا الجداول الفلكية التى خلفها الاسكندريون والهندوس

واستعملوا فى بحوثهم الطريقة الهندية البسيطة لكتابة الأعداد . ويأتى الخوارزمى الذى عاش فى القرن التاسع فى مقدمة هؤلاء الرياضيين المشهورين. ومن كبار الرياضيين العرب أيضا عمر بن الخيام الذى عاش فى القرن الثانى عشر . وفى رباعيات عمر بن الخيام أبيات شعرية تتجلى فيها الصلة الوثيقة التى كانت قائمة بين الاهتمام بالرياضة ومهمة عمل التقويمات .

ولم يكن للثقافة الفنية البيزنطية أثر فى النهضة الأدبية والفكرية التى ظهرت فى أوربا فى القرنين الرابع والخامس عشر ، فالأوربيون مدينون للفتح العربى فى اسبانيا وجنوب فرنسا بشعر أوربا الحديث من حيث أوزانه وقوافيه كما ان أوربا مدينة لهم بتراثها الاجتماعى . ويعتبر الخارزمى وابن الخيام من أهم كتاب العرب فى القرن الثانى عشر .وجاء بعدهم فى القرن نفسه رياضى هندى له منزلته هو بسكرا . وقد بنيت علوم الرياضة الأوروبية على ترجمة أعمال هؤلاء العلماء وأمثالهم .

وكانت أهم وسيلتين لتوصيل علوم الرياضة الهندية والعربية إلى الأجناس الشمالية من سكان أوربا المتأخرين ، هما الجامعات المغربية فى أسبانيا والتجارة مع صقلية فى البحر الأبيض المتوسط . وأقدم دليل وجد على استعمال المسيحيين للأعداد المسماة بالغبارية استعمالا رسمياً هو قطعة نقود من صقلية نقش عليها تاريخ سنة ١١٣٤ م . والأعداد الغبارية هي الأعداد الهندية بعد أن عدلها عرب الأندلس . أما فى بريطانيا فأول استعمال رسمى لها كان فى سنة ١٤٩٠ . وكان التجار الإيطاليون يستعملونها فى حساباتهم التجارية فى القرن الثالث عشر . وقد صادف هذا التجديد كالعادة نصيبه من معارضة الرجعيين . فصدر فى سنة ١٢٥٩ فرمان يحرم على رجال البنوك فى فلورنسا استعمال رموز «الكفار» ، كما أمرت الهيئات الدينية بجامعة بادوا سنة ١٣٤٨ أن تكتب كشوف أسعار الكتب بالحروف لا «بالأرقام» .وهناك ثلاثة عوامل اجتماعية ساعدت على إنتشار الثقافة الأندلسية — أولها : هو أن الديانة المسيحية عندما حلت محل الوثنية الرومانية ، احتفظت لرجال الدين بوظيفتهم الإجتماعية كمؤلفى التقويمات . كما سيتضح فى الباب التالى . وفى قيامهم بعملهم هذا اهتم القسس بعلوم الرياضة . فدرس أدلارد (من باث) فى مدينة قرطبة حوالى سنة ١١٢٠ م بعد أن تخفى فى زى رجل مسلم ، وترجم مؤلفات إقليدس والخوارزمى وجدول الفلك العربية . وفى هذه الفترة

أيضاً درس جيرارد (من كريمونا) فى توليدو وترجم نحو تسعين مرجعاً عربياً ، بما فى ذلك الطبعة العربية من كتاب الماجست لبطليموس . وأما باكيولو (الراهب الملحد الذى لم يكتشف أمره لحسن الحظ) فقد ترجم مؤلفات بسكرا فى الحساب واقتبس طريقة ذيون لإيجاد الجذور التربيعية . وهناك عامل ثان لا يقل عن الأول فى الأهمية ، ألا وهو الثقافة المستقلة التى حصلتها طبقة التجار الناشئة . ويعتبر ليوناردو فيبوناكى من أبرز علماء الرياضة التجار . وكتابه «لبرأباسى» سنة ١٢٢٨هو أول مؤلف فى الحساب التجارى . ويقترن اسمه بمتسلسلة عددية غريبة هى :

$$\text{٠} \quad \text{١} \quad \frac{\text{١}}{\text{٢}} \quad \frac{\text{٢}}{\text{٤}} \quad \frac{\text{٣}}{\text{٨}} \quad \frac{\text{٥}}{\text{١٦}} \quad \frac{\text{٨}}{\text{٣٢}} \quad \frac{\text{١٣}}{\text{٦٤}} \quad \frac{\text{٢١}}{\text{١٢٨}} \quad \ldots \quad \text{ألخ} \; *$$

ومما يدعو إلى العجب أنه بينما حصل المؤلف على هذه المتسلسلة أثناء تسليته ، فإنها استعملت فيما بعد فى تطبيق قوانين مندل الوراثية على الإتصال الجنسى بين الأخت والأخ . ولقد أتى علم الرياضة من نيوناكى ، الذى يئس منه أستاذه فى صغره ، إهتماما ، بتطبيقه على الحاجات الإجتماعية لطبقته ، فتوصل لعمل متسلسلات للتسلية بعد أن تعلم كيفية حل مسائل الدين والربح العملية باستعمال المعادلات . وقد شمل ليوناردو برعاية فردريك الثانى الملحد ، والذى كان لتشجيعه لجامعة سالرنو الفضل فى جعلها مركزاً تنتقل منه الثقافة المغربية إلى المعاهد الدينية فى شمال أوربا على أيدى الأطباء اليهود . وهؤلاء الأطباء يمثلون العامل الثالث فى نشر الثقافة المغربية . فقد بقى اللفظان طبيب وعالم جبر يستعملان معاً فى أسبانيا إلى وقت قريب . مثلما إقترن اللفظان جراح وحلاق فى العصور الوسطى . وربما تكون كفايات الحلاقين لم تقدر حق قدرها .

وقبل أن نتحدث عن علم الحساب الجديد أو الجوريتم ، سنعرض لما للأعداد الجديدة من إمكانيات كامنة ، أثرت على خيال من درسوا الثقافة العربية . فقد كتب ستايفل (وهو الذى عرفناه من قبل كمعلق على الأبوكاليبتك) كتب يقول « إن فى قدرتى أن أؤلف كتابا بأسره عن الصفات الخفية للأعداد » . وهو فى هذا يشير إلى علاقات

---

* إذا كان الحد النونى هو $\frac{\text{م}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}}$ فإن علاقته بالحدود التى تسبقه هى :

$$\frac{\text{م}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}} = \frac{\text{م}_{\text{ن}-\text{١}} + \text{م}_{\text{ن}-\text{٢}}}{\text{٢} \, \text{ل}_{\text{ن}-\text{١}}}$$

جديدة أكتشفت عندما زود الناس بطريقة للكتابة ، أغنتهم عن استعمال لوحة العد ، مع أدائها لنفس العمل الآلى الذى كانت الأخيرة تؤديه . فبالنظر إلى العـــدد MMCCCXXXII ، (بطريقتنا ٢,٣٣٢) المكتوب بالأرقام الرومانية نلاحظ أن هذه الأرقام تمثل خرزتين على عمود الآحاد وثلاث خرزات على العمود الثانى وثلاثا على الثالث واثنين على الرابع (الآلاف) . فكأن أساس طرق الكتابة الأولى هو أن لكل عمود معين رمزاً يمثله (M, C . . ألخ) ، أو خرزة خاصة فى عمود خاص كما كان متبعاً فى الطريقتين العبرية والإغريقية القديمة . وكتابة هذا العدد بالطريقة الجديدة التى يقرأ فيها من اليسار إلى اليمين تعطينا عدد الخرزات فى الأعمدة المتتالية دون الحاجة إلى رموز أخرى . وأما الأعمدة نفسها فيدل عليها ترتيب الأرقام ، ويمثل (٠) أى عمود خال . وعلى أى حال فإن مواضع الأعمدة تحدد عند قراءة العدد . فمثلا العدد ٦,٦٦٦,٦٦٦ يمكن تمثيله على لوحة عد ذات سبعة أعمدة ، بستة خرزات على العمود السابع (عمود الملايين) وست خرزات على العمود السادس (مئات الألوف) وست خرزات على العمود الخامس (عشرات الألوف) وست خرزات على العمود الرابع (الألوف) وهكذا . والمليون يساوى (١٠×١٠×١٠×١٠×١٠×١٠) أى ست عشرات مضروبة فى بعضها أو ١٠^٦ . وبالمثل تساوى مائة الألف ١٠^٥ . أى أن كل خرزة فى العمود السابع تعادل ١٠^٦ وكل خرزة فى العمود السادس تعادل ١٠^٥ وكل خرزة فى العمود الخامس تعادل ١٠^٤ و . . . . . . ألخ ويمكن وضع ذلك فى قاعدة بسيطة وهى أن ١٠^ن ـ ١ هى قيمة كل خرزة فى العمود النونى . وكان لهذه القاعدة من الأثر العميق على مكتشفها ستيفل ما كان للعدد ٦٦٦ عليه وهو الذى أدى إلى اتباعه للطريقة الجديدة .

ولنمعن النظر الآن فى هذه القاعدة . فأولا حصلنا على نموذج واقعى طبيعى تمثيل ١٠^ن . وهذا النموذج أفضل بكثير من النماذج المحدودة التى نحصل عليها من الهندسة الإغريقية . فهذه الأخيرة تعطينا عشر وحدات طولية كنموذج ل ١٠^١ ، ومربعا طول ضلعه يساوى عشر وحدات طولية كنموذج ل ١٠^٢ ، ومكعبا طول ضلعه يساوى عشر وحدات طولية كنموذج ل ١٠^٣ ولا يمكننا أن نذهب إلى أبعد من ذلك ، أى أنه لا يوجد معنى ل ١٠^ن (أى العدد عشرة مضروبا فى نفسه ن مرة) فى الطبيعة إذا كانت ن أكبر من ٣ . أما باستعمال طريقة الأعداد الجديدة فإن العدد ١٠^١٢ يعنى قيمة كل خرزة على العمود الثالث عشر من لوح عددى يحتوى على ثلاثة

عشر عموداً أو أكثر (على فرض وجوده) . وعلى ذلك فقد اتسع أفق استعمال الأعداد الكبيرة اتساعا ملموسا . ولم يكن ذلك قاصراً على الأعداد الكبيرة فقط بل شمل الأعداد الصغيرة أيضا ، كما يتضح مما يلي : إذا رتبنا متواليتنا الهندسية تنازليا بالنسبة إلى ن يكون .

العمود الثاني	العمود الثالث	العمود الرابع	العمود الخامس	العمود السادس	العمود السابع
١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠٠
$١٠^{١}$	$١٠^{٢}$	$١٠^{٣}$	$١٠^{٤}$	$١٠^{٥}$	$١٠^{٦}$

ويتضح أن ن تنقص واحداً عندما تصغر قيمة الخرزة إلى العشر . وعلى ذلك تكون قيمة ن المناظرة للعمود الخالي مساوية واحداً ناقصاً واحد ١ = صفراً . ويمكننا أن نذهب إلى أبعد من ذلك ، فبملاحظة أن صفراً ناقصاً واحد ١ = — ١ يكون خارج قسمة واحد على عشرة هو $١٠^{-١}$. وعلى ذلك يمكننا أن نتكلم الآن عن ن = — ١ ، ن = — ٢ ، .... ويكون

١٠٠٠٠	١٠٠٠	١٠٠	١٠	١	$\frac{١}{١٠}$	$\frac{١}{١٠٠}$	$\frac{١}{١٠٠٠}$	....
$١٠^{٤}$	$١٠^{٣}$	$١٠^{٢}$	$١٠^{١}$	$١٠^{٠}$	$١٠^{-١}$	$١٠^{-٢}$	$١٠^{-٣}$	....

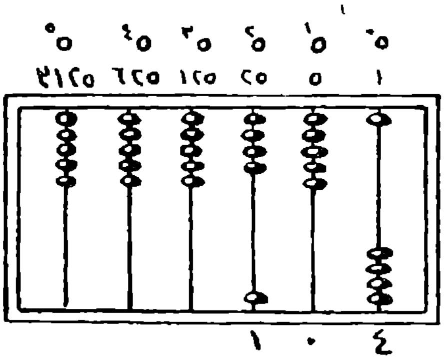
ويمكننا بالاستعانة بما سبق أن نفهم معنى $ا^{ن}$ عندما تكون ا لا تساوي العدد ١٠ . ويكون هذا دليلا آخر على أن جميع مميزات الأعداد الهندية لا علاقة لها مطلقاً بالعدد ١٠ . على العكس، فجميع الخواص القريبة للعدد ١٠ ترجع إلى الطريقة التي أسس بها الهنود لوحهم العددي . ففي هذا اللوح يزداد عدد الدليل واحداً إذا زاد عدد الخرزات عشرة . وقد اختير العدد عشرة بالذات لأن الإنسان كان يستعمل أصابع يديه للعد . وإذا فرض أن الإنسان كان له ذراع واحد بدلا من ذراعين لكان طبيعياً أن يكون أساس العد عنده هو العدد خمسة (٥) كما فعل العسكريون الرومان الذين استعملوا الحروف V, L, D للدلالة على الأعداد ٥ ، ٥٠ ، ٥٠٠ . في هذه الحالة سيحتوي العمود الأول من لوحة العد على خمس خرزات كل منها تكافىء الوحدة . والثاني على خمس خرزات، كل منها تكافىء العدد ٥ . والعمود الثالث يحتوي على خمس خرزات كل منها تكافىء خمسة أمثال العدد ٥ . وعند عد الخرزات الموجودة في العمـــود الأول يمكن الاستغناء عنها

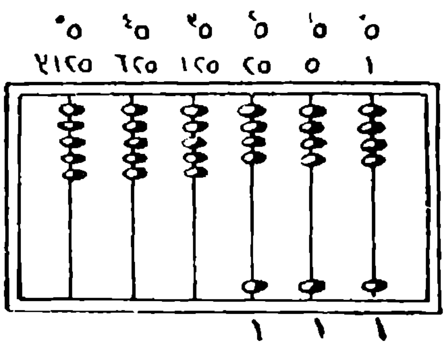
بإضافة خرزة جديدة للعمود الثانى وترك الأول خالياً . وبعد عد خمسة خرزات فى العمود الثانى نستغنى عنها ونضيف خرزة إلى العمود الثالث وهكذا . وإذا استعملنا الرمز (٠) للدلالة على العمود الخالى كان للرموز (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤) نفس معناها فى الحساب الذى أساسه العدد عشرة . إلا أنه يجب استبدال الرمز (٥) الآن بالرمز (١٠) والرمز (٢٥) بالرمز (١٠٠) .... وتكون الرموز الجديدة على الصورة الآتية .

من ١ — ٥	١	٢	٣	٤	١٠
من ٦ — ١٠	١١	١٢	١٣	١٤	٢٠
من ١١ — ١٥	٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٣٠
من	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
من ٢١ — ٢٥	٤١	٤٢	٤٣	٤٤	٥٠
من ١٢١ — ١٢٥	٤٤١	٤٤٢	٤٤٣	٤٤٤	١٠٠٠

وجداول الضرب والجمع للحساب الذى أساسه العدد (٥) موجودة فى (شكل ١٠٢) . ولإيجاد حاصل ضرب ٢٩ × ٣١ نلاحظ أن العددين ٢٩ ، ٣١ هما ١٠٤ ، ١١١ وتكون عملية الضرب مماثلة تماماً لعملية الضرب العادية (أى فى النظام العشرى) ونقطة الاختلاف الوحيدة هى أننا نستعمل الآن جداول الجمع والضرب الموجودة فى (شكل ١٠٢) ويكون حاصل الضرب

١٠٤		١٠٤
١١١	أو إذا كان القارىء معتاداً	١١١
١٠٤	على الطريقة الأخــرى	١٠٤
١٠٤	(من اليمين إلى اليسار)	١٠٤
١٠٤		١٠٤
١٢٠٤٤		١٢٠٤٤





	١	٢	٣	٤	١٠
١	١	٢	٣	٤	١٠
٢	٢	٤	١١	١٣	٢٠
٣	٣	١١	١٤	٢٢	٣٠
٤	٤	١٣	٢٢	٣١	٤٠
١٠	١٠	٢٠	٣٠	٤	١٠٠

(ا) جدول الضرب
للعداد ذى الذراع الواحد

	١	٢	٣	٤	١٠
١	٢	٣	٤	١٠	١١
٢	٣	٤	١٠	١١	١٢
٣	٤	١٠	١١	١٢	١٣
٤	١٠	١١	١٢	١٣	١٤
١٠	١١	١٢	١٣	١٤	٢٠

(ب) جدول الجمع
للعداد ذى الذراع الواحد

شكل (١٠٢) : عداد الرجل ذى الذراع الواحد

نظرية العداد هى أن قيمة الخرزة فى الأعمدة المتتالية من اليسار الى اليمين تعطى كما يأتى :

$$س^5 \quad س^4 \quad س^3 \quad س^2 \quad س^1 \quad س^0$$

وفى الطريقة المتبعة نأخذ س = ١٠

(أ) العدد ١٠٤ فى الطريقة الرمزية للعداد ذى الذراع الواحد تساوى ١ (٢٥) + ٠(٥) + ٤(١) أى ٢٩ بالطريقة الرمزية للعداد العشرى الذى نستخدمه

(ب) ١١١ فى الطريقـــة الرمزية للعداد ذى الذراع الواحـــد تســـاوى ١ (٢٥) + ١ (٥) + ١ (١) أى ٣١ بالطريقة الرمزية للعداد العشرى الذى نستخدمه

وقيمة العدد (١٢٠٤٤) هى ١ (٤) + ٤ (٥) + ٠ (٢٥) + ٢ (١٢٥) + ١ (٦٢٥)

أى ٨٩٩ بالنظام العشرى وهى النتيجة التى نحصل عليها بإجــراء عملية الضرب العادية :

٢٩		٢٩
٣١		٣١
٨٧	أو	٢٩
٢٩		٨٧
٨٢٩		٨٢٩

أما إذا استعملنا لوحا عدديا ذا عمودين اثنين فقط فإن الواحد يكتب (١) وتكتب ٢ (١٠) ، ٣ (١١) ، ٤ (١٠٠) ، ٥(١٠١) ، ٦(١١٠) ، ٧(١١١) ، ٨ (١٠٠٠) .... وان يحتوى جدول الضرب فى هذه الحالة إلا على ١ × ١ = ١ ولا جدول الجمع إلا على ١ + ١ = ١٠ . وتصبح عملية إيجاد الجذر التربيعى سهلة/ والعقبة الوحيدة التى تقف فى سبيل استعمال مثل هذا الحساب هى أنه يستلزم لإجراء عملياته كميات كبيرة من الورق.وبإجراء عمليات الجمع فى هذا النظام نحصل على دلائل جديدة على أن جميع مميزات العدد ١٠ ترجع إلى طبيعة الحساب الهندى لا العكس كما يظن الكثيرون .

الطريقة الوضعية لحل المســائل (الجوريتم) :

لعل القارىء قد اقتنع الآن بأن رموز الأعداد الهندية كانت مختلفة تماما عن جميع الرموز التى سبقتها . فالرموز السابقة لم تكن إلا علامات تدل على حسابات ستجرى أو أجريت فعلا . وقد أغنتنا الطريقة الهندية عن ذلك . فعمليات الجمع والطرح يمكن اجراؤها عقليا دون الاستعانة بلوح الأعداد . ومعنى النقل «عقليا» فى لغة علم وظائف الأعضاء الحديث هو أن الرسالة التى تصل إلى المخ ... عن أعصاب اليد والعين هى نفس الرسالة التى كانت تصل إليه نتيجة لإجراء عملية على لوح الأعداد .

والطريقة الوضعية التى تجرى بها عملية الضرب الآن ، هى نفس قاعدة التضعيف التى كان يستعملها المصريون القدماء . وقد رأينا أن :

ا(ب + حـ + ى) = اب + احـ + اى

وعلى ذلك يكون حاصل ضرب ٧ × ٥٣٢ مساويا ٧ × (٥٠٠+٣٠+٢)
أى ٧ × (٥٠٠) + ٧ (٣٠) + ٧ × (٢)

وكانت طريقة كتابة هذه العملية أولا كما يأتى :

٥٣٢		٥٣٢
٧		٧
٣٥٠٠	أو	١٤
٢١٠		٢١٠
١٤		٣٥٠٠
٣٧٢٤		٣٧٢٤

ثم اختصرت إلى :

٥٣٢		٥٣٢	
٧	أو	٧	،
٣٧٢٤		٣٧٢٤	

وذلك بإجراء عمليات النقل من خانة الآحاد إلى خانة العشرات ومن خانة العشرات إلى خانة المئات عقليا . ولقد كان من السهل بعد ذلك إيجاد قاعدة بسيطة لضرب أى عددين مهما كان عدد أرقامهما ، فمثلا :

٥٣٢ × (٧٣٢) = (٥٣٢) × ٧٠٠ + (٥٣٢) × ٣٠ + (٥٣٢) × ٢

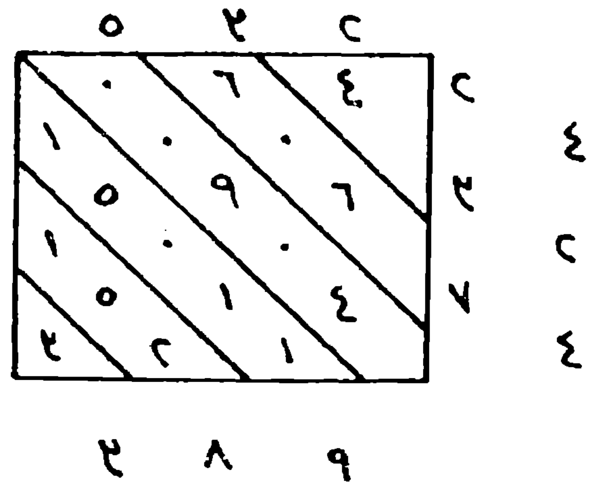
ويمكن كتابة ذلك فى صورة تساعد على إيجاد حاصل الجمع بطريقتين مختلفتين تمتاز الأولى على الثانية بأنها تساعد على إيجاد قيمة تقريبية للنتيجة خصوصاً إذا كان أحد المضروبين يحتوى على كسور عشرية ، وهاتان الطريقتان هما :

٥٣٢	
٧٣٢	
٣٧٢٤٠٠	٧٠٠ (٥٣٢)
١٥٩٦٠	٣٠ (٥٣٢)
١٠٦٤	٢ (٥٣٢)
٣٨٩٤٢٤	

أو

٥٣٢	
٧٣٢	
١٠٦٤	٢ (٥٣٢)
١٥٩٦٠	٣٠ (٥٣٢)
٣٧٢٤٠٠	٧٠٠ (٥٣٢)
٣٨٩٤٢٤	

والحاسبون التجاريون الأوائل ، الذين استعملوا طريقة العرب والهنود الحسابية كانوا يجرون عملية الضرب بالطريقة الآتية :



ويحصل على أرقام النتيجة (٣٨٩٤٢٤) بجمع الأعداد الموجودة فى كل صف قطرى كما هو موضح . ونلاحظ أننا فى أثناء اجراء عملية الضرب نفترض وجود جدول للضرب تحت تصرفنا / ويصغر هذا الجدول كثيراً إذا استعملنا الرموز العددية للدلالة على قيم الخرزات بدلامن الدلالة على الأعمدة/ وأعلى عملية فى جدول الضرب الذى نحتاجه الآن هى ١٠ × ١٠ ، وطبعا حفظ مثل هذا الجدول يكون أسهل بكثير على ذاكرة الإنسان من حفظ جدول الضرب الاسكندرى الذى استعمله ذيون . وليستغنى عن الرجوع إلى هذا الجدول عند الحاجة ، كان لابد لكل حاسب أن يحفظه عن ظهر قلب . وكان من الضرورى إنشاء مدارس جديدة لتعليم ذلك لطبقة التجار . وكانت ألمانيا من أوائل الدول التى قامت بذلك .

ويجب أن يعلم القارىء أننا لازلنا الآن نستعمل طرقا كثيرة مختلفة فى اجراء العمليات الحسابيــــة . فمثلا لاتزال عملية الضرب تجرى فى أوربا أما من اليمين إلى اليسار (كما كان العرب يفعلون) أو من اليسار إلى اليمين . وتوجد طرق كثيرة لاجراء عملية القسمة ، والطريقة التى تجرى بها هذه العملية فى المدارس العربية تختلف تماما عن الطريقة التى تدرس بها هذه العملية فى المدارس الإنجليزية مثلا .

ويقال أن أول من استعمل هذه الطريقة (طريقة القسمة الإنجليزية) هو كالاندرى سنة ١٤٩١ م ولكى نفهم هذه الطريقة نفرض أن قيمة كل خرزة فى العمود الأول هى الوحدة وأن قيمة كل خرزة فى العمود الثانى هى «س» ، فتكون قيمة كل خرزة فى العمود الثالث «س^{٢}» فى العمود الرابع «س^{٣}» ، وفى الخامس «س^{٤}» . وهكذا ، ويمكننا كتابة عملية الضرب السابقة على الصورة .

٥ س^{٢} + ٣ س + ٢

٧ س^{٢} + ٣ س + ٢

٣٥ س^{٤} + ٢١ س^{٣} + ١٤ س^{٢} (لأن ٧س^{٢} × ٥ س^{٢} = ٧ × س × س × ٥ × س × س = ٣٥ س^{٤})

١٥ س^{٣} + ٩ س^{٢} + ٦ س

+ ١٠ س^{٢} + ٦ س + ٤

٣٥ س^{٤} + ٣٦ س^{٣} + ٣٣ س^{٢} + ١٢ س + ٤

(إذا كانت س = ١٠ تصبح قيمة هذا المقدار ٣٨٩٤٢٤) .

وعملية القسمة ليست إلا عملية طرح مكررة . فخارج قسمة ٣٨٩٤٢٤ على ٧٣٢ هو عدد المرات التى يمكن بها طرح ٧٣٢ من ٣٨٩٤٢٤ حتى يكون الباقى صفر . ويمكن اجراء عملية القسمة بواسطة اللوح الحسابى على خطوات تشابه الخطوات التى تجرى بها هذه العملية الآن ، ويتضح ذلك من كتابة خارج القسمة على الصورة

$٣٥س^{٤} + ٣٦س^{٣} + ٢٣س^{٢} + ١٢س + ٤$ | $٧س^{٢} + ٣س + ٢$

$٣٥س^{٤} + ١٥س^{٣} + ١٠س^{٢}$ $٥س^{٢} + ٣س + ٢$

$٢١س^{٣} + ٢٣س^{٢} + ١٢س + ٤$

$٢١س^{٣} + ٩س^{٢} + ٦س$

$١٤س^{٢} + ٦س + ٤$

$١٤س^{٢} + ٦س + ٤$

. . . .

«بطرح المقدار ($٧س^{٢} + ٣س + ٢$) $٥س^{٢}$ مرة يصبح العمود الخامس خاليا وبطرح نفس المقدار ٣س مرةمن الباقي يصبح العمود الرابع خاليا وبطرح المقدار نفسه مرتين من الباقي الأخير تصبح جميع الأعمدة الباقية خالية»

ومما يدل على أن القوانين الحسابية ظهرت نتيجة لما تطلبته طبقة التجار من ثقافة هو أننا لازلنا نستعمل التعبير «استلف واحد» أثناء إجراء عمليات الطرح والقسمة وباستعمال الأرقام المعنوية للدلالة على قيم الخرزات فى اللوح الحسابى يتضح السبب فى تطابق قوانين الحساب العشرى وقوانين الحسابات ذات الأسس الأخرى. وقد وافق استعمال الرموز العددية، التى يمكن بواسطتها تمثيل لوح حسابى ذى أى عدد من الأعمدة، الزيادة فى المعاملات التجارية فى ذلك الحين. وقد كانت تحتاج إلى عمليات حسابية بأعداد كبيرة. وقد زاد استعمال الطرق السابقة حتى أمكن الاستغناء عن لوح الأعداد كلية. وابتدأ الأوربيون يستعملون الورق والطباعة، وكلاهما أتى إلى أوربا من الشرق. مثلهم فى ذلك مثل كلمة «سونيا» أى الصفر. وكان فجر الصفر هو أيضاً فجر الرخص فى ثمن أدوات الكتابة.

فى محاولتنا الإجابة على سؤال دانتزج الموجود فى أول هذا الباب، تغاضينا عما قام به العرب من اكتشافات، وبينا بعض مميزات الأعداد الهندية التى أشار إليها ستايفل. ولقد ساعدت الرموز العددية الجديدة فى إيجاد نظريات عامة للأعداد. فجميع نظريات الكسور التى نستعملها الآن يرجع فضل اكتشافها إلى الهنود.

والطرق التى استعملوها فى إيجاد هذه النظريات تخالف الطرق التى استعملها كل من الأغريق والمصريين الذين لم يستطيعوا أن ينظروا إلى الكسر كعدد بذاته ، بل كانوا يجزئونه إلى كسور أصغر منه بطريقة تشابه تجزىء الوحدات الكبيرة إلى وحدات أصغر منها (مثل تجزىء الكيلو متر إلى أمتار والمتر إلى سنتيمترات والسنتيمتر إلى ملليمترات) .

وقد استمر ذلك لمدة طويلة ، وكان الرياضيون القدماء يقابلون صعوبات كثيرة فى تجزىء الكسور (أى وضعها على صورة حاصل جمع عدة كسور بسط كل منها الوحدة) فمثلا :

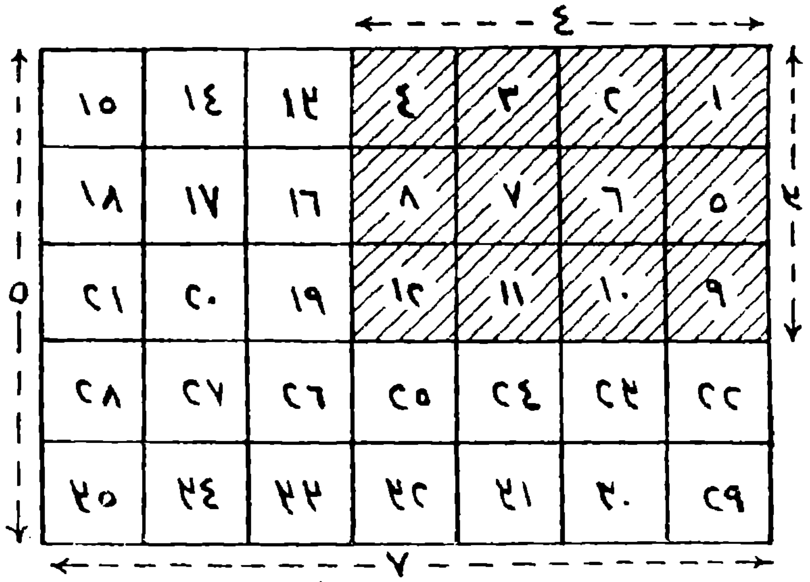
$$\frac{٢}{٤٣} = \frac{١}{٣٠} + \frac{١}{٨٦} + \frac{١}{٦٤٥} \quad \text{أو} \quad = \frac{١}{٤٣} + \frac{١}{٨٦} + \frac{١}{١٢٩} + \frac{١}{٢٥٨}$$

وكما يظهر من هذا المثال كانت الطريقة صعبة للغاية وغير مجدية . وإذا تذكرنا أن الإغريق والاسكندريين كانوا يستعملون الطريقة السابقة لما دهشنا لعدم تقدم علم الحساب عندهم ، والذى يجب أن ندهش له حقاً هو أن أرشميدس وزملاءه منهم لم يكتشفوا أى شىء يتعلق بالمتسلسلات التى تحتوى على أعداد كسرية .

اما الهندوس فقد ساعدتهم رموزهم العددية على التحرر من هذه الطرق العقيمة ومكنتهم من أن يكتبوا الكسور بالصورة التى نكتبها الآن . كما طبقوا على الكسور نفس القواعد الحسابية التى تطبق على الأعداد الصحيحة ، فأعطانا ماهافيرا القاعدة التى نستعملها الآن فى قسمة كسر على كسر . ولو قرأنا كلماته التى يشرح بها طريقته . لوجدنا أنها تطابق الكلمات التى قد يستعملها أحد مدرسى المدارس الآن ، إذ يقول « إبدل المقام بسطا والبسط مقاما ثم اضرب » .

وإذا أمكننا أن نكتب الكسور فى صورة معقولة فإن القواعد الأساسية يمكن توضيحها باستعمال أشكال هندسية مثل الموجودة فى الباب الثالث وشكل « ١٠٣ » يوضح قاعدة الضرب وهى : $\frac{ا}{ب} \times \frac{حـ}{ء} = \frac{ا حـ}{ب ء}$

فمثلا : $\frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٧} = \frac{١٢}{٣٥}$



$$\frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٧} = \frac{١٢}{٣٥}$$

شكل (١٠٣) : ضرب الكسور

وتتضح قاعدة القسمة مباشرة إذا تذكرنا أن عملية القسمة هى العملية العكسية ، وخارج قسمة $\frac{أ}{ب} \div \frac{حـ}{ء}$ هو العدد الذى إذا ضربناه فى $\frac{حـ}{ء}$ أنتج $\frac{أ}{ب}$ ،

ويمكن كتابة ذلك رمزيا كما يأتى :

$$س \times \frac{حـ}{ء} = \frac{أ}{ب}$$

$$\therefore \frac{حـ س}{ء} = \frac{أ}{ب}$$

وباستعمال قاعدة الوسطين والطرفين يكون

$$س = \frac{أ ء}{ب حـ}$$ فمثلا :

$$\frac{٣}{٥} \div \frac{٤}{٧} = \frac{٧}{٤} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٢١}{٢٠}$$

وتلى ذلك عمليتا الجمع والطرح ويكون :

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \pm \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{١}{\text{ب}}\left(\text{أ} \pm \frac{\text{ب ج}}{\text{د}}\right) = \frac{١}{\text{ب د}}(\text{أ د} \pm \text{ب ج})$$

$$= \frac{\text{أ د} \pm \text{ب ج}}{\text{ب د}}$$

مثلا

$$\frac{٣}{٥} \pm \frac{٤}{٧} = \frac{٢١ \pm ٢٠}{٣٥}$$

نستطيع الآن بعد استعراض هذا التطور فى علم الجبر أن نجيب على سؤال دائترج كما يأتى : عندما احتاج الإنسان فى حياته العملية إلى قواعد حسابية ، وعندما ساعدت معرفته لكتابة واستعمال الأرقام على إيجاد هذه القواعد، تقدم علم الجبر تقدماسريعاً ملحوظاً . وعملية استخراج الجذر التربيعى دليل آخر على ذلك . وهى وإن كانت قد أكتشفت بعد ستايفل ، فإن فضل إكتشافها يرجع فى الواقع إليه . فقدرأينا كيف أن ستايفل أضاف أعمدة جديدة إلى لوحة العد الهندية تمثل العشر والواحد من مائة والواحد من ألف . . . . أخ ، وأعطاها الرتب —١ ، —٢ ، —٣ ، . . .
وإذا استعملنا نقطة أو شرطة أو أى علامة معينة للدلالة على موضع رقم الآحاد (على يسارها مثلا) فى عدد معين مثل ١٢٥,١٢٥ ، فإن «١٢٥» التى على يسار العلامة تدل على ٥ ، ٢ عشرة ، ١ مائة ، «١٢٥» التى على يمينها تدل على عشر ٢ ، من مائة ، ٥ من الألف . وقد ساعدت هذه الطريقة العرب والهندوس على إيجاد الجذور التربيعية . والذى جعل العرب يهتمون بها هى أبحاثهم فى علم الفلك التى تطلبت منهم أن يقوموا بتحسين كبير فى جداول حساب المثلثات التى وضعها الإسكندريون، وهذه كما نعلم تحتاج إلى جذور تربيعية . وقد استعملوا الطريقة الآتية : إذا كان المطلوب هو $\sqrt{٢}$ ، فإن من الممكن وضع هذا المقدار على الصورة

$$\sqrt{٢} = \sqrt{\frac{٢٠٠}{١٠٠}} = \frac{١}{١٠}\sqrt{٢٠٠}$$

وبالتجربة نجد أن مربع العدد ١٤ (١٩٦) هو أقرب مربع عدد صحيح إلى العدد ٢٠٠ . وعلى ذلك يأخذ العرب ١,٤ كتقريب أول لقيمة $\sqrt{٢}$. بالمثل يمكن وضع $\sqrt{٢}$ على الصورة $\sqrt{٢} = \sqrt{\frac{٢٠٠٠٠}{١٠٠٠٠}} = \frac{١}{١٠٠}\sqrt{٢٠٠٠٠}$

وبالتجربة نجد أن مربع العدد ١٤١ هو أقرب مربعات الأعداد الصحيحة إلى

٢٠٠٠٠ ، وعلى ذلك تكون ١,٤١ هى التقريب الثانى لقيمة $\sqrt{٢}$. وبنفس الطريقة

$$\sqrt{٢} = \sqrt{\frac{٢٠٠٠٠٠٠}{١٠٠٠٠٠٠}} = \frac{١}{١٠٠٠}\sqrt{٢٠٠٠٠٠٠}$$

ويكون التقريب الثالث هو ١,٤١٤ . وقد طبع أدم ديس جداول للجذور التربيعية بهذه الطريقة عام ١٥٢٢ م . وفى نفس الفترة (١٤٠٠ م) تقريبا وبطريقة مستقلة حصل الخاشى من أهالى سمرقند على قيمة النسبة التقريبية ط صحيحة إلى تسعة أرقام عشرية ٣,١٤١٥٩٠٠٠ . وأول من استعمل العلامة العشرية هو بيلازى سنة ١٤٩٢ . وفى كل من فرنسا وانجلترا وأمريكا تأخذ هذه العلامة صورة نقطة «.» أما فى بقية أوربا فقد استعملوا العلامة «,» بدلا من النقطة .

وعندما ظهر آدم ديس كان الناس قد بدأوا يقتنعون بأن القواعـــد الجبرية المستعملة لا تختلف باختلاف قيمة «س» وهى القيمة التى تدل على عدد الخرزات فى عمود معين من أعمدة لوحة العد . وتلى ذلك اقتناعهم بأن عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة للأعداد التى تحتوى على كسور عشرية ، يمكن إجراؤها بنفس الطريقة التى تجرى بها هذه العمليات للأعداد الصحيحة ، وفقط يجب أن نحتاط ونضع العلامة العشرية فى مكانها الصحيح .

وفى حوالى سنة ١٥٨٥ اقترح ستيفنس ، وكان يعمل كاتباً فى محل تجارى ، على وليم أورانج أن يستعمل النظام العشرى رسمياً . وقد ظهرت هذه الفكرة ثانية فى عهد الثورة الأمريكية ونادى بها بنيامين فرانكلين وآخرون . وأخيراً وافقت الجمعية الوطنية الفرنسية على استعمال النظام العشرى فى فرنسا . ولا زالت انجلترا تستعمل نظام أوزانها ومقاييسها العتيقة وأن الإنسان ليشبه الحالة الحاضرة فى انجلترا بحالتها عندما رفضت الحكومة تغيير طريقة العد باستعمال العصى .

وقد كتب تشارلس ديكنز فصلا مسلياً عن ذلك فقال : «منذ زمن طويل كانت الحكومة الانجليزية تستعمل طريقة عقيمة فى حساباتها ، هى طريقة العد بالعصى المعلمة بعلامات خاصة . وكانت هذه الطريقة تشبه بالطريقة التى كان يحفظ بها روبين سان كروزو التواريخ على جزيرته الرملية .. ! ورغم وجود عدد كبير من المحاسبين ورجال الأعمال ورجال التأمين ، فإن الحكومة استمرت على استعمال هـــذه العصى المعلمة فى حساباتها واستمرت وزارة المالية تسجل حساباتها على قطع خشبية . وفى عهد جورج الثالث ثارت ثائرة بعض ذوى الشجاعة وأخذوا يتساءلون لماذا لا تزال

الحكومة تستعمل هذه الطريقة العتيقة رغم توفر أدوات الكتابة مثل الأقلام والحبر والورق . وقد لاقى هؤلاء المتذمرون تأييداً من جميع عناصر الشعب . واضطرت الحكومة أن تلغى الطريقة السابقة فى سنة ١٨٢٦ .

وفى سنة ١٨٣٤ أكتشف أن عدد العصى المستعملة كبير جداً وأخذ الناس يتساءلون ماذا سيفعلون بهذه العصى القديمة التى نخرها السوس ؟ .

وأخيراً استقر الرأى على أن تخزن هذه العصى فى ويستمنيستر ، وكان الحل المنطق لهذه المشكلة هو توزيع هذه الأخشاب على سكان هــذا الحى الفقراء لاستعمالها كوقود للتدفئة . ولكن للأسف لم يستفد من هـذه العصى على الاطلاق ، فقد اتفق على إحراقها فى أحد المواقد فى مجلس اللوردات . وضاق الموقد بهذه العصى التعسة وامتد لهيبها واحترق كلا من مجلسى اللوردات والعموم واستدعى المهندسون على عجل لبناء غيرهما . وقد بلغت تكاليف ذلك مليونى جنيه إلى الآن فقط .

وقد فشل ستيفنس فى إقناع الجمهورية الهولندية باستعمال النظام العشرى ، وأن فى فشله هذا لدرسا لنا الآن . فقد كان التجار الهولنديون يوجهون كل اهتمامهم إلى الدين والتدين ولا يعيرون مايحتاجه المجتمع من تغيرات، تطلبتها ثقافة وأعمال طبقتهم بالذات أى اهتمام . وكان على الناس أن ينتظروا حتى يزداد وعى الطبقات المتوسطة بدرجة تجعلها تتحرر من ديكتاتورية الكنيسة . فنحن الآن نرى بوضوح حاجتنا إلى التغيير فى طرق التعليم ، ذلك التغيير الذى تتطلبه الحياة الإجتماعية والعملية للطبقة الجديدة التى توشك أن تكون الطبقة الحاكمة . وإن السياسة التى سارت عليها كل من أوربا الفاشية وأسبانيا (فى عهد حرب التحرير الهولندية) والتى تنطوى على تشجيع الحركات الرجعية والإهمال الثقافى لاتقل فى قسوتها مطلقا عن قسوة الاستعمار . وعينا أن نتساءل الآن عما إذا كانت المشاكل الداخلية للبلاد الإشتراكية ستشغلها عن التفكير فى المشروعات العالمية الكبيرة مثل عمل لغة دولية بسيطة ؟ أو ربما كان من الواجب تأجيل هذا السؤال إلى أن يحين الوقت السعيد عندما تتمكن الحركات التى تعمل على تنظيم وتوحيد وتدويل كل ما يمكن أن يستفيد منه البشر ، من تحطيم باستيل الأفكار الرجعية الموروثة . والذى يجب أن يتذكره كل عاقل الآن هو أنه عندما كانت الطبقة المتوسطة فى قمة مجدها كان إيراسموس . سيريفيتوس وستيفنس أقرب إلى عقل وقلب الثقافة الأوربية من لوثر ، نوكس وكالفن (الذى أمر باعدام

سيريفيتوس) أى أنه ليس من الضرورى أن يكون رجال الدين هم أفضل خلق الله ولقد كان كالفن يأمل فى بناء « مدينة الله » فى جنيف ولكن بدلا منها يوجد الآن تمثال لسيريفيتوس (وهو الذى اكتشف الدورة الدموية قبل هارفى) ، ولعل هذا هو حكم التاريخ على منطق كالفن .

المعادلات :

لقد اهتم الرياضيون الاسكندريون بفن الحساب والحسابات نتيجة لبحثهم المسائل الميكانيكية والفلكية . وكرس الرياضيون الهنود كثيراً من وقتهم للمسائل الحسابية التى تنشأ من التبادل التجارى واذا سمينا هذا الانتاج الهندى القديم «جبراً» فيجب أن نتذكر أن لفظى « الجبر والحساب » يدلان الآن على غير مايدلا عليه عندما يذكرهما مؤرخ رياضى . فما نعنيه الآن بكلمة « الحساب » "Arithmetic" يخالف تماما ما كان يعنيه الأغريق بكلمة Arithmetika وقد فسرنا ذلك فى الباب الخامس. فالحساب الذى يدرس فى مدارسنا الآن خليط من القواعد الحسابية المبنية على الطرق العربية والهندية ، ومن قواعد لحل المسائل العددية بدون استعمال الأعداد المعنوية ، التى تستعمل الآن فيما نسميه « علم الجبر » ، وقد تطورت قواعد استعمال الأعداد المعنوية والمختصرات التى تدل على الأفعال والمؤثرات الرياضية تطوراً بطيئاً للغاية . وكان ديوفنتس أول من فكر فى استعمال التعبيرات المختصرة أما الرياضيون الذين سبقوه فكانوا يبحثون كل مسألة عددية بطريقة مستقلة وغير عامة . وكان كل كاتب يكتب بطريقة مختصرة معينة يفهمها هو وحده . ولا يهتم مطلقا بإيجاد طريقة عامة ، وعلى ذلك كان يجد نفسه مضطراً لاستعمال لغة الكلام العادية فى تفسير طريقته للآخرين. والرياضيون يستعملون لفظ « الجبر » الآن للدلالة على قواعد حل المسائل التى تحتوى على أى نوع من أنواع الأرقام وقد تكون هذه القواعد مكتوبة بالتمام (الجبر الكلامى) أو مبسطة مختصرة (الجبر المختصر) أو تكون ممثلة بواسطة حروف وعلامات فقط (الجبر الرمزى) . ويدخل تحت النوع الأول مسائل الحساب التجارى التى تدرس بالمدارس . ولم يكن هناك تطور منتظم فى طريقة الاختصار باستعمال الرموز . فقد استعمل كل مؤلف مختصرات معينة . وكان بعضهم يستعيض عن الأعداد بالحروف . واستعمل العرب عبارات مختصرة مركزة تقابل مايسمى

الآن بالمعادلات . و بعض الرياضيين الذين أثرت فيهم الثقـــافة الأندلسية ، مثل الراهب الدومنيكى جوردانس (حوالى ١٢٢٠ م) ، استبدلوا جميع الـكلمات فى العبارات الرياضية بالرموز . وقد فعـــل معاصره ليناردو بايزا (فيبوناكى) نفس الشىء .

وكان من المستحيل أن يتطور « الجبر الـكلامى » الى الجبر الحديث ذى الرموز على أيدى الأغريق ، وذلك لأن جميع حروفهم الابجدية كانت قد استعملت فعلا للدلالة على أرقام معينة . ورغم أن الأعداد الهندية قد تغلبت على هذه العقبة ، فلم يكن هناك أداة اجتماعية تعمل لتدويل الرموز التى تمثل المؤثرات الرياضية . والجذر التربيعى هو المؤثر الرياضى الوحيد الذى نقل العرب رمزه « $\sqrt{}$ » إلى أوربا .

وجذور التغير العظيم فى لغة الرياضة الذى حدث فى أوربا فى العصور الوسطى موجودة فى المجتمع الأوربى ذاته فى هذه الفترة فـكلمة زائد (Plus) أصلهـا زيادة (Surplus) والعلامتان + و — كانتا تـكتبان بالطباشير على الزكائب والبراميل وذلك للدلالة عما إذا كان وزن مافيها يزيد أو ينقص عن الوزن المعين . وأول ما استعملت هذه الإشارات بطريقة عامة فى كتاب « الحساب التجارى » لمؤلفه ويدمان وهو يعد من أوائل الـكتب المطبوعة وقد نشر فى ليبزج سنة ١٨٤٩ . وأول من استعمل هذه الإشارات فى حل المعادلات هو ستيفنس ، وكان كما ذكرنا قبلا يشتغل سكرتيراً لأحد التجار . وقد استعملت علامتى = و × بعد ذلك بحوالى مائة عام فى انجلترا فى « الحساب التجارى الانجليزى المسجل » . ومنذ ذلك الوقت استعملت الإشارات المختصرة (التى كان ديكارت أول من استعملها) بطريقة عامة وتحرر علم الرياضة من مجال لغة الأرقام الضيق ، وسيـــلاحظ القارىء مرة أخرى كيف أن نقطة تحول هامة فى علم الرياضة نشأت من التراث الإجتماعى والبيئة وليس من عبقرية شخص أو أشخاص معينين .

ومن أهم ما يجب ملاحظته فى دراسة الرياضة ، التطور من علم الجبر الكلامى إلى الرمزى . فالذى نقصده بالعبارة (حل المعادلة) ، هو وضعها فى صيغه تجعل معناها واضحاً . وقوانين الجبر هى التى تساعدنا على ذلك . والصعوبة الوحيدة هى ترجمة عبارات المسألة التى نبحثها من لغة الـكلام العادية إلى لغة الجبر . فعند هذه النقطة قد

يضل الرياضى نفسه الطريق ، لأنه قد يتعذر عليه فهم المسألة بلغتها الكلامية بينما يكون ذلك فى مقدور الرجل العادى . وبينما يكون من المجازفة أن نعهد إلى الرياضيين بترجمة عبارات المسائل إلى عبارات رياضية (معادلات) ، فإنه يمكننا أن نعهد بها إليهم بعد ترجمتها .

وفى محاولاتنا فهم فن الترجمة من لغة الكلام إلى لغة الكم سنقابل المشكلة التى تواجه كل من يحاول تعلم لغة أجنبية . فمجرد الترجمة الحرفية لجملة من لغة أجنبية قد لا يعطينا معناها الأصلى ، لأن لكل لغة تعبيراتها الخاصة وقواعدها اللغوية ، وقد نفشل فشلا ذريعا فى الترجمة إذا كنا لا نفهم جيداً تعبيرات اللغة التى نترجم اليها . وعلى ذلك فسنضيف الى ما أوردناه عن قواعد الترجمة القواعد الآتية :

(ا) يجب ترجمة كل عبارة على حدة (سواء أعطيت هذه العبارة صراحة أو كان معناها مفهوما رغم عدم ذكرها) وذلك بوضعها على الصورة « بوساطة كذا افعل كذا لتحصل على كذا » .

(ب) استعمل العلاقات بين العبارات المختلفة لكى تتخلص من جميع الكميات الغير مطلوب تعيينها . وربما لزم لذلك أن تضيف الى عبارات المسألة المذكورة صراحة عبارات أخرى يمكن فهمها رغم عدم ذكرها صراحة .

(حـ) أحصل على العبارة الأخيرة على الصورة « العدد المطلوب ايجاده (س) يساوى (=) عدداً معينا معلوما » .

احتياطات :

(ى) يجب قياس جميع الأعداد التى تمثل كميات معينة من شىء واحد بنوع واحد من الوحدات . فمثلا اذا كان الشىء هو المال فيجب أن تكون جميع كمياته إما جنيهات أو جميعها قروشا أو جميعها ماليمات واذا كنا نقيس مسافات فيجب أن تكون جميعها أميالا أو جميعها ياردات أو جميعها أقداما واذا كنا نقيس أزمنة مختلفة فيجب أن نقيسها جميعا بالساعات او جميعا بالدقائق أو جميعا بالثوان وهكذا .

(هـ) اختبر صحة النتيجة .

ولتوضيح طريقة ترجمة عبارات الأعداد الكلامية الى رموز جبرية ، سنعطى

فيما يلي ستة أمثلة يمكن وضع كل منها على صورة معادلة بسيطة للغاية من النوع الذى أعطانا الهنود طريقة كلامية لحله . ولن يضيرنا أن نضيف كلمة أخيرة قبل أن نعطى هذه الأمثلة . اذا أتقن الإنسان لغة أجنبية ، يمكنه أن يترجم من لغته الأصلية اليها ترجمة صحيحة بسهولة . اما اذا كان مبتدئا فانه يضطر أن يقوم بذلك على خطوات . ولكى يتأكد القارىء أن حل المسائل الرياضية ليس هبة من الهبات ، وأنه ليس الا استعمال قواعد لغوية معينة ، ستحل الامثلة الآتية على خطوات وطبعا عندما يتعود القارىء هذا النوع من الترجمة لن يكون بحاجة لأن يترجم بالتفصيل وانما سيكتب المعادلة التى يريدها على خطوة أو خطوتين .

مثال ١ إذا كان الحساب الجارى لإحدى نقابات العمال المحلية يساوى أربعة أمثال حساب الأمانات وكان مجموع الحسابين يساوى ٣٥ جنيهاً فما هى قيمة كل حساب ؟

معنى العبارة الأولى : « إذا ضربنا عدد جنيهات حساب الأمانات (م) فى ٤ نحصل على عدد جنيهات الحساب الجارى (ح) » .

٤ م = ح ... ...(١)

معنى العبارة الثانية : « إذا جمعنا عدد الجنيهات التى فى الحسابين نحصل على ٣٥ جنيهاً »

م + ح = ٣٥ ... ... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

٤ م + م = ٣٥

٥ م = ٣٥

م = $\frac{٣٥}{٥}$

= ٧

أى أن عدد جنيهات حسابات الأمانات هو ٧ وعدد جنيهات الحساب الجارى يساوى ٢٥ — ٧ = ٢٨

لاختبار صحة النتيجة : نلاحظ أن

$$٤ \times ٧ = ٢٨ \cdot$$

(مثال ٢) يترك قطار مدينة لندن فى الساعة الواحدة متجها نحو مدينة ادنبرة بسرعة ٥٠ ميل\ساعة بينما يترك قطار آخر مدينة ادنبرة متجها نحو مدينة لندن فى الساعة الرابعة بسرعة ٢٥ ميل\ساعة . إذا كان البعد بين لندن وادنبرة يساوى ٤٠٠ ميل فمتى يتقابلا القطاران ؟

نلاحظ أن المعلومات المعطاة فى المسألة تمكننا من معرفة المسافة التى يقطعها كل من القطارين فى أى فترة زمنية وأن المطلوب هو معرفة الوقت الذى يكون القطاران عنده على نفس البعد من لندن (أو على نفس البعد من ادنبرة) وسيكون هذا الوقت بعد أن يتحرك كل من القطارين أى أنه سيكون بعد الساعة الرابعة . الزمن المطلوب (ن) سيزيد عدة ساعات عن الساعة الرابعة .

العبـــــــارة الأولى : القطار الأول يترك لندن فى الساعة الواحدة . ، أضف ٣ (الوقت بين الساعة الواحدة والساعة الرابعة) إلى عدد الساعات بعد الساعة الرابعة الذى بعده يتقابل القطاران لنحصل على عدد الساعات (نَ) التى تحركها القطار الأول ،

$$٣ + ن = نَ \qquad (١)$$

العبـــــــارة الثانية : يتحرك القطار الأول بسرعة ٥٠ ميـــل\ساعة . ، اضرب ٥٠ × نَ لكى تحصل على المسافة لَ التى يبعدها القطار الأول عن لندن عندما يقابل القطار الثانى ،

$$٥٠ \, نَ = لَ \qquad (٢)$$

العبـــــــارة الثالثة : القطار الثانى يترك ادنبره بسرعة ٢٥ ميل \ ساعة . ،اضرب ٢٥ × ن تحصل على المسافة (ل) التى يبعدها القطار الثانى

عن ادنبره عندما يقابل القطار الأول ».

٢٥ ن = ل ... ... (٣)

العبـــارة الرابعة : المسافة بين لندن وادنبرة ٤٠٠ ميل . « اطرح من ٤٠٠ ميل المسافة بين ادنبرة و بين موضع تقابل القطارين تحصل على المسافة بين لندن و بين هذا الموضع » .

٤٠٠ − ل = لَ ... ... (٤)

من (١) ، (٢)

٥٠ (٣ + ن) = لَ ... ... (٥)

ومن (٣) ، (٤)

٤٠٠ − ٢٥ ن = لَ ... ... (٦)

ومن (٥) ، (٦)

٥٠ (٣ + ن) = ٤٠٠ − ٢٥ ن

وللاختصار اقسم الطرفين على ٢٥

٢ (٣ + ن) = ١٦ − ن

أو ٦ + ٢ ن = ١٦ − ن

٢ ن + ن = ١٦ − ٦

٣ ن = ١٠

ن = ١٠/٣ = ٣⅓ (ساعة بعد الساعة الرابعة)

= ٧ ساعة ٢٠ ثانية

اختبار صحة النتيجه : ٥٠ (٣ + ٢⅓) + ٢٥ × ٣⅓ = ٤٠٠

(مثال ٣) ما هو مقدار الشاى الذى ثمن الرطل منه شلنان وثلاثة بنسات (= ٢٧ بنس)

الذي يجب إضافته إلى ٥٠ رطل من الشاي الذي ثمن الرطل منه ثلاثة شلنات (= ٣٦ بنس) لكي نحصل على خليط يكون ثمن الرطل منه شلنان وستة بنسات (= ٣٠ بنس)

<u>العبـــــارة الأولى</u> : مقدار معين من الشاى (س) سيضاف إلى الخمسين رطلا الموجودة لدينا يجب أن نجمع س + ٥٠ لكى نحصل على عدد أرطال الخلط (ن) .

$$٥٠ + س = ن \qquad (١)$$

<u>العبـــــارة الثانية</u> : سيباع هذا الشاى بسعر ٣٠ بنس للرطل . وبضرب ٣٠ × عدد أرطال الخليط نحصل على ثمنه (م) ،

$$٣٠ ن = م \qquad (٢)$$

<u>العبـــــارة الثالثة</u> : ثمن س من الأرطال المضافة بسعر ٢٧ بنسا الرطل . وإذا ضربنا ٢٧ × س نحصل على ثمن الشاى المضاف ($م_١$) ،

$$٢٧ س = م_١ \qquad (٣)$$

<u>العبـــــارة الرابعة</u> : سعر الرطل من الخمسين رطلا الأصلية تساوى ٣٦ بنس وحاصل ضرب ٣٦ × ٥٠ يساوى ثمن الخمسين رطل الأصلية ($م_٢$) ،

$$٣٦ \times ٥٠ = م_٢ \; . \qquad (٤)$$

ويمكننا استنتاج العبارة الخامسة رغم أنها لم تذكر صراحة فى رأس المسألة وهى وثمن الشاى الكلى يساوى مجموع ثمنى الشاى الأصلى والشاى المضاف ،

$$م_١ + م_٢ = م \qquad (٥)$$

من (١) ، (٢) ينتج أن :

$$٣٠ (٥٠ + س) = م \qquad (٦)$$

ومن (٣) ، (٤) ، (٥)

$$٢٧ س + ٣٦ \times ٥٠ = م \qquad (٧)$$

ومن (٦) ، (٧)

٣٠ (٥٠ + س) = ٢٧ س + ٣٦ × ٥٠

١٥٠٠ + ٣٠ س = ٢٧ س + ١٨٠٠

٣٠ س − ٢٧ س = ١٨٠٠ − ١٥٠٠

٣ س = ٣٠٠

س = ١٠٠ رطل .

اختبار صحة النتيجة :

(٢٧ × ١٠٠ + ٥٠ × ٣٦) ÷ ١٥٠ = ٣٠

(مثال ٤) سباق أخيل . (أنظر الباب الأول)

العبارة الأولى : سرعة البطل تساوى ١٠ مرات قدر سرعة السلحفاة . وبضرب سرعة السلحفاة (ع) فى ١٠ نحصل على سرعة أخيل (عَ) ،

١٠ ع = عَ (١)

العبارة الثانية : عند بدء السباق يكون أخيل متأخراً عن السلحفاة بمائة ياردة . وإذا أضفنا إلى المسافة التى تقطعها السلحفاة (ف) حتى يدركها أخيل مائة ياردة نحصل على المسافة التى يكون أخيل نفسه قد قطعها (فَ)

١٠٠ + ف = فَ ... (٢)

وإذا لاحظنا أن السرعة تساوى المسافة مقسومة على الزمن الذى قطعت فيه وأن هذا الزمن واحد (ن) فى كل من حالتى السلحفاة وأخيل فإنه يمكننا كتابة عبارتين جديدتين .

العبارة الثالثة : سرعة السلحفاة (ع) تساوى المسافة التى قطعتها حتى أدركها أخيل مقسومة على الزمن الذى قطعتها فيه .

$$ع = \frac{ف}{ن} \qquad (٣)$$

العبـــــارة الرابعة : سرعة أخيل (عَ) تساوى المسافة التى قطعها حتى أدرك السلحفاة مقسومة على الزمن الذى قطعها فيه

$$عَ = \frac{فَ}{ن} \qquad (٤)$$

ومن (١) ، (٣) ينتج أن :

$$عَ = \frac{١٠ ف}{ن} \qquad (٥)$$

ومن (٢) ، (٤)

$$عَ = \frac{١٠٠ + ف}{ن} \qquad (٦)$$

ومن (٥) ، (٦)

$$\frac{١٠ ف}{ن} = \frac{١٠٠ + ف}{ن}$$

وبضرب طرفى المعادلة السابقة فى ن ينتج أن:

$$١٠ ف = ١٠٠ + ف$$

$$١٠ ف - ف = ١٠٠$$

$$٩ ف = ١٠٠$$

$$ف = \frac{١٠٠}{٩} = ١١\frac{١}{٩} \text{ ياردة}$$

(مثال ٥) عندما أصل إلى عمر والدى الآن سيكون عمرى قدر عمر ابنى حاليا خمس مرات وعند ذلك يكون عمر ولدى أكبر من عمرى حاليا بمقدار ٨ سنوات . فإذا كان مجموع عمرى وعمر والدى الآن مائة عام فما هو عمر ولدى الآن ؟

العبـــــارة الأولى : عندما أصل إلى عمر والدى الآن يكون عمرى قدر عمر ابنى حاليا خمس مرات أو عمر والدى الآن قدر عمرى ابنى خمس مرات. . « إذا ضربنا عمر ابنى (س) × ٥ نحصل على عمر والدى (ع) »

ع = ٥ س (١)

العبـــــارة الثانية : عندما أصل إلى عمر والدى يكون عمر ابنى أكبر من عمرى الآن بثمانيـة سنوات . « إذا طرحنا من عمر والدى (ع) عمرى (ص) نحصل على عدد السنين (ل) التى يجب أن تمضى حتى أكون فى مثل عمره » .

ع ــ ص = ل (ا)

« وهذه الـ « ن » سنة يجب أن تضاف إلى عمر ابنى (س) لنحصل على سنه سَ عندما يكون عمرى مثل عمر والدى الآن » .

ل + س = سَ (ب)

« ويجب إضافة ثمانيـــة سنوات إلى عمرى حاليا لنحصل على عمر ابنى عندما أكون فى مثل عمر والدى»

سَ = ص + ٨ (حـ)

من (ب) ، (حـ) ينتج

ص + ٨ = ل + س (ى)

ومن (ا) ، (ى)

ص + ٨ = ع ــ ص + س .

∴ ٢ ص + ٨ = ع + س (٢)

العبـــــارة الثالثة : مجموع عمرى وعمر والدى حاليا يساوى مائة سنة . « يجب إضافة عمر والدى إلى عمرى لتحصل على ١٠٠ سنة »

ص + ع = ١٠٠

او $ص = ١٠٠ - ع$ (٣)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

$٥ س + س = ٢ ص + ٨$

$٦ س = ٢ ص + ٨$ (٤)

ومن (١) ، (٣) ينتج أن :

$١٠٠ - ٥ س = ص$ (٥)

ومن (٤) ، (٥)

$٦ س = ٢ (١٠٠ - ٥ س) + ٨$

$٦ س = ٢٠٠ - ١٠ س + ٨$

$٦ س + ١٠ س = ٢٠٠ + ٨$

$١٦ س = ٢٠٨$

$\therefore س = \frac{٢٠٨}{١٦} = ١٣$ سنة

أى أن عمر ابنى الآن ١٣ سنة .

(مثال ٦) : « مسألة هندية قديمة من كتاب ابلافاتى لأريهاتا » يدفع تاجر رسوما جمركية على بضائع له فى ثلاثة أماكن مختلفة . فإذا دفع ثلث قيمة هذه البضائع فى المكان الأول ، وربع قيمة ما تبقى من البضائع فى المكان الثانى ، وخمس قيمة الباقى الأخير فى المكان الثالث وكانت الرسوم الجمركية الكلية هى ٢٤ جنيهاً فاوجد قيمة البضائع الأصلية .

العبـــــارة الأولى : يدفع التاجر ثلث ما يملك فى المكان الأول . « إذا طرحنا مما يملكه التاجر (س) ماقيمته $\frac{س}{٣}$ فاننا نحصل على مايتبقى له (ص) بعد دفع الرســوم الجركية الأولى » ،

$س - \frac{١}{٣} س = ص$

$\frac{٢}{٣} س = ص$ ………………… (١)

<u>**العبـــــــارة الثانية :**</u> يدفع التاجر فى المكان الثانى ربع ما بقى له . « إذا طرحنا ($\frac{\text{ص}}{\text{٤}}$) من ص نحصل ما يتبقى للتاجر (ع) بعد دفع الرسوم الجمركية فى المكانين الأول والثانى ص — $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ ص = ع

$\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ ص = ع . ... (٢)

<u>**العبـــــــارة الثالثة :**</u> دفع التاجر خمس ما تبقى له اخيراً فى المكان الثالث وكان مجموع ما دفعه فى الاماكن الثلاثة يساوى ٢٤ جنيها .

«إذا أضفنا $\frac{\text{ع}}{\text{٥}}$ إلى $\frac{\text{ص}}{\text{٤}}$ إلى $\frac{\text{س}}{\text{٣}}$ نحصل على ٢٤ »

$$\frac{\text{ع}}{\text{٥}} + \frac{\text{ص}}{\text{٤}} + \frac{\text{س}}{\text{٣}} = \text{٢٤} \quad \text{... ... ... (٣)}$$

من (٢) ، (٣) ينتج أن

$$\left(\frac{\text{٣}}{\text{٤}} \times \frac{\text{ص}}{\text{٥}}\right) + \frac{\text{ص}}{\text{٤}} + \frac{\text{س}}{\text{٣}} = \text{٢٤}$$

أو $\frac{\text{٢}}{\text{٥}}$ ص + $\frac{\text{س}}{\text{٣}}$ = ٢٤ ... ... (٤)

ومن (١) ، (٤)

$$\left(\frac{\text{٢}}{\text{٥}} \times \frac{\text{٢}}{\text{٣}}\,\text{س}\right) + \frac{\text{س}}{\text{٣}} = \text{٢٤}$$

أو $\frac{\text{٣}}{\text{٥}}$ س = ٢٤

$$\text{س} = \frac{\text{٢٤} \times \text{٥}}{\text{٣}} = \text{٤٠}$$

أى أن قيمة بضائع التاجر هى ٤٠ جنيها .

لقد راعينا فى حل الأمثلة السابقه أن يكون ذلك على خطوات مطولة لكى نبين أن حل المسائل بواسطة علم الجبر ليس إلا نوعا من الترجمة له قوانين نحوية خاصة . وكما سبق أن ذكرنا سيجد القارىء أنه ليس من الضرورى أن يجرى هذه الخطوات بالتفصيل عندما يحصل على الخبرة الكافية فى استعمال لغة الأرقام . وإذا اتقن الإنسان هذه اللغة سيجد أن من الأسهل له أن يرمز إلى أحد المجاهيل المطلوب تعيينها فى المسألة بعدد معنوى (حرف مثلا) ثم يكتب كل ما يعلمه عنه من فروض المسألة

بطريقة جبريه حتى يصل إلى جملة واحدة مستقلة تكون هى المعادلة البسيطة التى تعين قيمة المجهول فمثلا يمكن حل المثال الخامس بطريقة سريعة كما يأتى :

ليكن عمر ابنى س ∴ عمر أبى ٥ س

ويكون عمرى (١٠٠ − ٥ س) ،

٥ س − (١٠٠ − ٥ س) + س = (١٠٠ − ٥ س) + ٨

∴ ١٦ س = ٢٠٨ ∴ س = ١٣ سنة .

وجميع الأمثلة التى حلت بطريقة الترجمة يمكن إختصارها إلى جمل لاتحتوى إلا على العدد المعنوى الذى يرمز إلى المجهول الذى نبحث عنه . ويمكن استعمال هذه الطريقة لحل المسائل التى تحتوى على مجهولين إذا كانت العلاقة بينهما بسيطة واضحة . والمثال الآتى يوضح طريقة حل مسألة تحتوى على ثلاثة مجاهيل دون أدنى صعوبة .

(مثال ٧) : يحتوى صندوق على ثلاثة أنواع مختلفة من المسامير عددها الكلى يساوى ١٨٧٢ مسمارا . وعدد مسامير النوع الأول يساوى ثلاث مرات عدد مسامير النوع الثانى . وعدد مسامير النوع الثانى يساوى أيضا ثلاثة أضعاف عدد مسامير النوع الثالث . أوجد عدد مسامير كل نوع .

يمكن ترجمة ذلك كما يلى : عدد مسامير النوع الثانى يساوى ثلث عدد مسامير النوع الأول (ص = $\frac{س}{٣}$) . وعدد مسامير النوع الثالث يساوى ثلث عدد مسامير النوع الثانى (ع = $\frac{ص}{٣}$) . وعدد الجميع (س + ص + ع) = ١٨٧٢

∴ س + $\frac{س}{٣}$ + $\frac{١}{٣}$ ($\frac{س}{٣}$) = ١٨٧٢

س (١ + $\frac{١}{٣}$ + $\frac{١}{٩}$) = ١٨٧٢

∴ $\frac{١٣}{٩}$ س = ١٨٧٢

∴ س = $\frac{١٨٧٢ \times ٩}{١٣}$ ١٢٩٦ مسمارا

أى أن عدد مسامير النوع الأول ١٢٩٦ مسمارا . وعدد مسامير النوع الثانى يساوى ثلث هذا العدد أى ٤٣٢ مسمارا وعدد مسامير النوع الثالث يساوى ثلث هذا الأخير أى ١٤٤ مسمارا .

اختبار صحة النتيجة ١٢٩٦ + ٤٣٢ + ١٤٤ = ١٨٧٢ .

إذا احتوت مسألة على أكثر من مجهول واحد وكان كل مجهول يزيد أو ينقص عن المجاهيل الأخرى بكميات معلومة ، أو كان يساوى حاصل ضرب المجاهيل الأخرى فى كميات معلومة ، فإنه يمكن إختصار عبارات المسألة الكلامية إلى عبارة رياضية تحتوى على مجهول واحد فقط . أما إذا تعذر ذلك فإنه يمكننا حل المسألة إذا استطعنا الحصول على عدد من المعادلات المستقلة يساوى عدد المجاهيل . والمثال الآتى يوضح كيفية الحل :

(مثال ٨) : إذا كان ثمن رطلين من الزبد وثلاثة أرطال من السكر هو ٧ بنس ٢ شلن
وثمن ثلاثة أرطال من الزبد ورطلين من السكر هو ٣ بنس ٣ شلن
فأوجد ثمن كل من رطل الزبد ورطل السكر .

من فروض المسألة ، إذا كان س هو سعر رطل الزبد ، ص هو سعر رطل السكر يكون .

٢س + ٣ص = ٣١ بنسا

٣س + ٢ص = ٣٩ بنسا

نلاحظ أن لدينا معادلتين تحتوى كل منهما على س ، ص . وحيث أنه يمكننا أن نقوم بأى تغيير فى أى طرف من أى معادلة على شرط أن تجرى نفس التغيير فى الطرف الثانى لنفس المعادلة ، فإنه يمكننا أن نتخلص من أحد المجهولين بطريقة بسيطة تسمى «بطريقة حل المعادلات الآنية» . إذا ضربنا طرفى المعادلة الأولى فى ٣ وطرفى الثانية فى ٢ فإننا نحصل على معادلتين تحتوى كل منهما على نفس الحد المحتوى على س وهما

٦س + ٩ص = ٩٢

٦س + ٤ص = ٧٨

ويكون باقى طرح (٦س+٤ص) من (٦س+٩ص) مساويا لباقى طرح ٧٨ من ٩٣ ، أى أن

٥ص = ١٥ ∴ ص = ٣ (بنسا) .

ويمكن الحصول بعد ذلك على قيمة س بالتعويض عن ص بقيمتها العددية فى إحدى المعادلتين الأصليتين

٢س + ٩ = ٣١

∴ ٢س = ٢٢ ∴ س = ١١ بنس .

ويكون سعر رطل السكر ٣ بنس وسعر رطل الزبد ١١ بنس . وفى الحالة العامة إذا كان س ، ص هما مجهولين وكانت ا ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و كميات معلومة فإنه يمكننا حل المعادلتين

اس + ب ص = حـ

، ء س + هـ ص = و

بالطريقة الآتية :

لحذف س اضرب طرفى المعادلة الأولى فى ء وطرفى الثانية فى ا فتحصل على المعادلتين

اءس + ب ء ص = حـ ء

اءس + اهـ ص = او

وبطرح طرفى الثانية من طرفى الأولى ينتج

(ب ء − اهـ) ص = حـ ء − او

وهذه معادلة بسيطة تحتوى على مجهول واحد هو ص وأعداد أخرى معلومة . وكان من الممكن حذف المتغير ص بدلا من المتغير س (إذا كانت عمليات حذف ص أسهل من العمليات التى تلزم لحذف س) وذلك بضرب المعادلة الأولى فى هـ والثانية فى ب والطرح فينتج أن

(اهـ − ب ء) س = حـ هـ − ب و .

ومع أن الهنود والعرب لم يستعملوا كثيراً من رموز المؤثرات ، التي تغنينا في علم الجبر الحديث عن استعمال الأفعال الرياضية عند ترجمة أي حديث من الأحاديث العامة إلى لغة الأرقام والكميات (كما رأينا في الأمثلة السابقة) ، فإنهم قد وجدوا قواعد هامة ذكرت في الباب الثالث . وقد ميز «الخوارزمي» بين قاعدتين هامتين . الأولى هي قاعدة المقابلة وهي القاعدة التي نسميها الآن قاعدة جمع الحدود المتشابهة وهي تساعدنا على تحاشي التكرار فمثلا إذا كان

ن + ٢ن = س + ٦س − ٣س

فإن ٣ن = ٤س

والقاعدة الثانية هي « قاعدة الجبر » * وهي القاعدة التي أخذ منها العلم الحديث اسمه وهي تختص بنقل الحدود من أحد طرفي معادلة إلى طرفها الثاني فمثلا إذا كان

ب س + ن = ل فإن ب س = ل − ن .

---

* **حاشية للترجمة العربية**

استخدم الخوارزمي كلمة « الجبر » عنوانا لكتابه المعروف « الجبر والمقابلة » ، الذي يعتبر أول كتاب وضع في هذا العلم ويتضح مقصد الخوارزمي بكلمة الجبر من العبارة الآتية الواردة في كتابه المذكور « .. فيكون ما لا يعدل أربعين شيئا الا أربعة أموال فاجبرها بالأربعة الأموال وزدها على المال فيكون أربعين شيئا تعدل خمسة أموال . فالمال الواحد يعدل ثمانية أجذار (أشياء) وهو أربعة وستون جذرها ثمانية .. »

وترجمة عبارة الخوارزمي باللغة الحديثة في علم الجبر هي :

س٢ = ٤٠س − ٤س٢ (١)

فاذا جبرت الطرف الأيسر لهذه المعادلة بزيادة ٤س ٢ الناقصة فانك لا بد أن تضيف هذه الزيادة أيضا الى الطرف الأيمن فتصبح المعادلة :

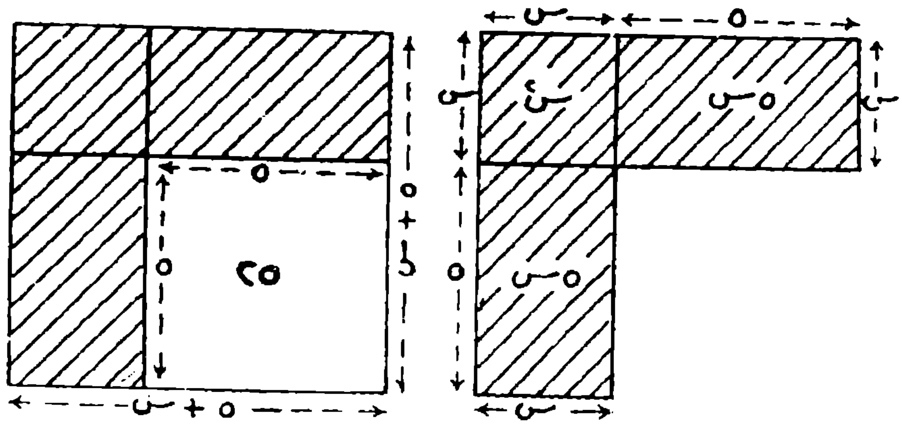
٥س٢ = ٤٠س (٢)

أي خمسة أموال تعدل ٤٠ شيئا أو جذرا » ألخ

فالخوارزمي لم ينظر الى أن المعادلة (٢) تنتج من المعادلة (١) بنقل أحد حدود الطرف الأيسر الى الأيمن ولكنها تنتج منها بجبر الطرف الأيسر باضافة ما ينقصه من المال (واضافة مثل ذلك الى الطرف الآخر) . ولو كانت معادلة الخوارزمي على الصورة :

هذا وقد أعطى الخوارزمى أيضاً الطريقة المستعملة الآن فى حل معادلة الدرجة الثانية ذات المجهول الواحد وهى نفس الطريقة التى أعطاها ديوفانتس . والمثال الآتى مأخوذ عن الخوارزمى .

س^{٢} + ١٠س = ٣٩



شكل (١٠٤)

حل معادلة الدرجة الثانية بطريقة الخوارزمى لاكمال المربع

(١) س^{٢} + ١٠س = ٣٩ (٢) س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = ٢٥ + ٣٩

(س + ٥)^{٢} = ٦٤ = ٢٨ س + ٥ = ٨

إذا فرضنا أننا رسمنا مربعاً طول ضلعه س وحدة ومددنا ضلعين متقابلين من أضلاعه مسافة تساوى ٥ وحدات ثم أكملنا المستطيلين الناشئين اللذين طول ضلعين من أضلاعهما س ، ٥ ، فإن مساحة الشكل الكلى تكون :

س^{٢} + ٥س + ٥س = س^{٢} + ١٠س .

س٢ = ٤٠س + ٤س٢ لما استخدم كلمة الجبر فى نقل ٤ س٢ من الطرف الأيسر الى الطرف الأيمن ولكن الامر اختلط على الكتاب الغربيين نوعا فقالوا ان كلمة الجبر معناها نقل الحدود من أحد طرفى المعادلة الى الطرف الآخر .

وأما المقابلة فيتضح معناها من العبارة الآتية :

« .. فيكون خمسين درهما وما لا تعدل تسعة وعشرين درهما وعشرة أشياء فيقابل به وذلك أنك تلقى من الخمسين تسعة وعشرين فيبقى أحد وعشرون ومال تعدل عشرة أشياء .. »

وترجمة هذه العبارة بلغة الجبر الحديثة

٥٠ + س٢ = ٢٩ + ١٠س

وبعد « المقابلة »

٢١ + س٢ = ١٠س

وإذا أكملنا المربع (أنظر شكل ١٠٤) الذى طول ضلعه ٥ وحدات فإن مساحة الشكل الكلى تساوى

$س^{٢} + ١٠ س + ٢٥ = (س + ٥)^{٢}$ كما نعلم من العرض ٤ .

ومن المعادلة السابقة يكون :

$$س^{٢} + ١٠ س = ٣٩$$

أو $س^{٢} + ١٠ س + ٢٥ = ٣٩ + ٢٥ = ٦٤$

$$\therefore (س + ٥)^{٢} = (٨)^{٢}$$

$$\therefore س + ٥ = ٨$$

$$\therefore س = ٨ - ٥ = ٣$$

ويسمى الخوارزمى س « الجذر » ، س٢ « المال »

طريقة الخوارزمى لحل المعادلة هى « فبابه أن تضعف الأجذار وهى فى هذه المسألة خمسة فتضربها فى مثلها فتكون خمسة وعشرين فتزيدها على التسعة والثلاثين فتكون أربعة وستين فتأخذ جذرها وهو ثمانية فتنقص منه نصف الأجذار هو خمسة فيبقى ثلاثة وهو جذر المال الذى تريد والمال تسعة » !! وإذا اعتبرنا الحالة العامة وكانت ب ، حـ أعدادا معلومة فإن جذر المعادلة

$س^{٢} + ب س = حـ$ هو

$$س = \sqrt{\frac{ب^{٢}}{٤} + حـ} - \frac{ب}{٢}$$

وطبعا $\frac{ب^{٢}}{٤}$ هو مربع نصف معامل س ، أو حاصل ضرب نصف الأجذار فى مثلها ، بلغة الخوارزمى .

ولا تزال طريقة الخوارزمى لإيجاد قيمة س من معادلة تحتوى على س٢ تسمى

بطريقة اكمال المربع ، وهذا يذكرنا بالطرق المصرية القديمة لحـل المعادلات التى ذكرت فى العرض ٤ . ولا تزال المعادلة السـابقة تسمى بالانجليزية «Quadratic Equation» وهو اسم مشتق من الكلمة اللاتينية «Quadratum» التى معناها « الشكل الرباعى » . والكتب الحديثة فى علم الجبر لا تستعمل الشكل الهندسى ١٠٤ فى شرح حل هذه المعادلة .

مثال : رجلان يمشى الأول ربع ميل فى الساعة زيادة عما يمشيه الثانى . فاذا قطع الأول مسافة ٣٤ ميلا فى زمن يقل نصف ساعة عن الزمن الذى قطع فيه الثانى نفس المسافة فاوجد سرعة كل من الرجلين .

العبارة الأولى : الرجل الأول يسير ربع ميل فى الساعة زيادة عن الثانى . . إذا أضفنا إلى (ع) سرعة الرجل البطىء فى الساعة $\frac{1}{4}$ ميل نحصـل على سرعة الرجل السريع فى الساعة (عَ) .

$$\frac{1}{4} + ع = عَ$$

$$\therefore \quad عَ = \frac{٤ع + ١}{٤} \qquad (١)$$

العبارة الثانية : الرجل الأول قطع المسافة فى زمن يقل نصف ساعة عن الزمن الذى قطعها فيه الرجل الثانى « إذا طرحنا $\frac{1}{2}$ من الزمن (ن ساعة) الذى استغرقه الرجل الثانى فى قطع المسافة نحصل على الزمن (نَ ساعة) الذى قطعها الرجل الأول فيه ،

$$ن - \frac{1}{2} = نَ \qquad (٢)$$

العبارة الثالثة : يقطع الرجل الأول ٣٤ ميلا فى نَ ساعة بسرعة عَ ميل/ساعة ويقطع الرجـل الثانى نفس المسافة فى ن ساعة بسرعة ع ميل / ساعة . « لكى نحصل على سرعة كل من الرجلين نقسم ٣٤ على الزمن الذى استغرقه كل منهم فى قطع المسافة » .

$$ع = ٣٤ \div ن$$

$$\therefore \nu = \frac{٣٤}{ع} \qquad (٣)$$

$$، \quad ع = ٣٤ \div \nu'$$

$$\therefore \nu' = \frac{٣٤}{ع'} \qquad (٤)$$

من (٢) ، (٣) ينتج أن

$$\frac{٣٤}{ع} - \frac{١}{٢} = \frac{٣٤}{ع'} \qquad (٥)$$

ومن (١) ، (٤)

$$\therefore \frac{٣٤}{ع} - \frac{١}{٢} = \frac{٣٤ \times ٤}{٤ع + ١}$$

وباستعمال قاعدة الطرفين والوسطين ينتج أن :

$$١٨ + ٢٧١ع - ٤ع^{٢} = ٢٧٢ع$$

$$\therefore -ع - ٤ع^{٢} = -٦٨$$

$$\text{أى } ع^{٢} + \frac{١}{٤}ع = ١٧$$

وباستعمال قاعدة الخوارزمى يكون :

$$ع = \sqrt{\frac{١}{٤}\left(\frac{١}{٤}\right)^{٢} + ١٧} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٤}$$

$$= \sqrt{\frac{١٠٨٩}{٦٤}} - \frac{١}{٨} = \frac{٣٣}{٨} - \frac{١}{٨} = ٤$$

وتكون سرعة الرجل الثانى تساوى ٤ ميل / ساعة وسرعة الرجل الأول تساوى ٤ ½ ميل / ساعة .

اختبار صحة النتيجة : الرجل الأول يقطع المسافة فى زمن قدره ٢٤ ÷ $\frac{١}{٤}$ ٤ = ٣٤ ÷ $\frac{٣٤}{٨}$ = ٨ ساعات . والرجل الثانى يقطعها فى ٣٤ ÷ ٤ = $\frac{١}{٢}$ ٨ ساعة .

سيلاحظ القارىء أننا حصلنا على قمية واحدة لجذر المعادلة فى كل من المثالين السابقين . وكما أنه يصعب الإجابة على كثير من الأسئلة التى نسألها فى الحياة العامة بجواب واحد فإنه ليس من الضرورى أن يكون لكل معادلة جذر واحد . وفى الواقع أنه يوجد لكل معادلة من الدرجة الثانية جذران ، أحدهما هو الجواب الذى نبحث عنه والآخر ظل له . وقد أدهشت هذه النتيجة الرياضيين العرب رغم درايتهم بقوانين الإشارات وحسب هذه القوانين يكون :

$$-١ \times -١ = ١^{٢}$$

أيضاً

$$+١ \times +١ = ١^{٢}$$

∴ $\sqrt{١^{٢}} = ١$ أو -١ ونكتب هذه النتيجة على الصورة : ± ١

أى أن علامة الجذر التربيعى تمثل عملية جبرية لها جوابان فمثلا :

$$١٠٠ = (\pm ١٠)^{٢} ، ٤٩ = (\pm ٧)^{٢} .$$

وإذا رجعنا إلى المثال الذى أعطاه الخوارزمى ليشرح به طريقة حل المعادلة ذات الدرجة الثانية لوجدنا أن الجذر يعطى بإحدى القيمتين الآتيتين :

$$س = ٨ - ٥ = ٣$$

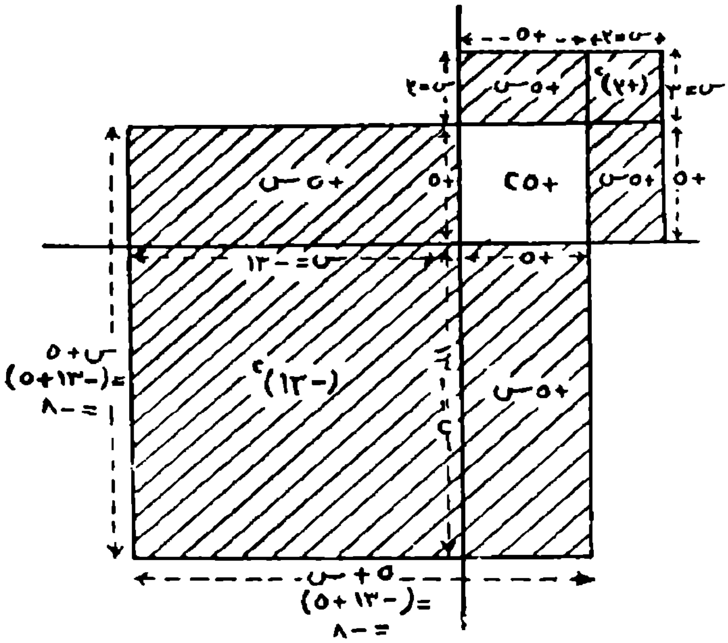
أو $س = -٨ - ٥ = -١٣$

وكلا من الجوابين يحقق المعادلة السابقة كما يأتى :

$$٣^{٢} + ١٠ \times ٣ = ٩ + ٣٠ = ٣٩ ،$$

$$(-١٣)^{٢} + ١٠ \times (-١٣) = ١٦٩ - ١٣٠ = ٣٩ .$$

وسبب اهمالنا لجذر المعادلة الثانى هو أننا لم نفهم للآن المعنى الطبيعى للأعداد − ٣ أو − ١٣ . وعندما تدرس علم الهندسة المعـــدل سترى أن الأشكال الهندسية لا يمكن أن تكون متساوية من جميع الوجوه إذا كانت أوضاعها مختلفة (بعكس هندسة اقليدس) ومن ذلك سنفهم معنى عدد مثل − ٣ أو − ١٣ .



شكل (٥ - ١)

مسألة الخوارزمى فى الهندسة المعدلة

فى الشكل لا تعلم قيمة س . والشكل يبين فقط الطريقة الحسابية التى تتبع . فى الهندسة المعدلة المشروحة فى الباب القادم سترى أنك اذا أعطيت الكميات المرسومة الى أعلى أو الى اليمين اشارات موجبة ، فانه يتحتم عليك أن تعطى الكميات المقاسة جنوبا أو يسارا اشارات سالبة .

تدلنا المعادلة على أن :

س + ٥ = ٨ أو -٨

وهذا يعنى أن مساحة المربع الذى طول ضلعه س + ٥ هى ٦٤ وحدة مربعة . المربع الكبير السفلى يتكون من مستطيلين مساحتهما معا : ٢ × ٥ (- ١٣) = - ١٣٠ وحدة مربعة ، ومربعين مساحتهما معا (- ١٣) (- ١٣) + (- ٥)(- ٥) أو ١٩٤ وحدة مربعة . المساحة الكلية تساوى ١٩٤ - ١٣٠ = ٦٤ .

ومن المهم أن نلاحظ أن من الممكن أن يكون جذرا معادلة الدرجة الثانية عددين موجبين . والمثال الآتى يوضح ذلك . فما هو العدد الذى إذا جمع على مربعه ٦ كان الناتج خمسة أمثال العدد ؟ .

يمكن كتابة هذه المسألة بلغة الجبر كما يأتى : إذا كان :

س² + ٦ = ٥ س فأوجد قيمة س

س² - ٥ س = - ٦

وباستعمال قاعدة الخوارزمى يكون :

س = √ - ٦ + (- ٥/٢)² - (- ٥/٢)

$$= \sqrt{-٦ + \frac{٢٥}{٤}} + \frac{٥}{٢}$$

$$= \pm \frac{١}{٢} + \frac{٥}{٢}$$

$$= +٢ \text{ أو } +٣ \,.$$

ولاختبار صحة النتيجة نلاحظ أن :

$$٢^{٢} + ٦ = ٤ + ٦ = ٥ \times ٢$$

$$٣^{٢} + ٦ = ٩ + ٦ = ٥ \times ٣ \,.$$

وكما أنه من الجائز أن يكون جذرا معادلة الدرجة الثانية عددين موجبين فمن الجائز أيضا أن يكونا عددين سالبين . بل إن من الجائز ألا يوجد أى عدد موجب أو سالب يحقق معادلة معينة من الدرجة الثانية . ولقد أدهشت النتيجة الأخيرة الإيطالى كاردان فى نهاية الفترة التى سبقت اكتشاف الهندسة المعدلة . وكمثال على معادلات هذا النوع نأخذ المسألة الآتية :

« ما هو العدد الذى إذا أضيف إلى مربعه ٥ أنتج ضعف العدد ؟ »

أى أوجد جذر المعادلة :

$$س^{٢} + ٥ = ٢\,س$$

$$س^{٢} - ٢\,س = -٥$$

$$\therefore\ س = \sqrt{-٥ + ١} + ١$$

$$= ١ \pm \sqrt{-٤}$$

$$= ١ \pm ٢\sqrt{-١}$$

وعلينا الآن أن نسأل أنفسنا عن معنى $\sqrt{-١}$. من تعريف الجذر التربيعى يمكننا أن نقول أن $\sqrt{-١}$ هو العدد الذى إذا ضرب فى نفسه أنتج -١ . إذا أمكننا الحصول على هذا العدد فإنه يمكننا أن نتحقق من صحة النتيجة التى وصلنا إليها وذلك بالتعويض فى المعادلة كما يأتى :

$$س = ١ \pm ٢\sqrt{-١}$$

$$\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} = (١ \pm ٢\sqrt{-١})^{٢} - ٢\,(١ \pm ٢\sqrt{-١})$$

$$= ١ \pm ٤\sqrt{-١} - ٤ - ٢ \mp ٤\sqrt{-١} = -٥$$

ورغم أن هذا يبين لنا أن النتيجة التي حصلنا عليها صحيحة من وجهة النظر الجبرية فإننا لا نستطيع أن نقول ما هو $\sqrt{-١}$ وذلك لأننا نعلم أن :

$$\text{ا} \times \text{ا} = \text{ا}^{٢} \quad ، \quad -\text{ا} \times -\text{ا} = \text{ا}^{٢}$$

وعلى ذلك فإن $\sqrt{-١}$ لا يمكن أن يكون عدداً موجباً ولا عدداً سالباً مثل -٢ التي يمكن التعبير عنها طبيعياً في الهندسة المعدلة كعدد خلفي أو ذي اتجاه عكسي. وكل الذي نستطيع أن نقوله هو أن $\sqrt{-١}$ هو جزء من لغة الجبر يمكن استعماله في عبارات معينة نسميها نحن معادلات الدرجة الثانية . وعندما كشف الرياضيون هذه الأعداد لأول مرة سموها « بالأعداد التخيلية » وطبعاً هذه التسمية لا تقدم ولا تؤخر . سنرى في الباب التاسع الذي يختص بدراسة الهندسة المعدلة أنه كما أن العدد « -٥ » يمثل خمس وحدات في اتجاه معين فكذلك $\sqrt{-٥}$ يمثل $\sqrt{٥}$ من الوحدات في اتجاه معين وسيساعدنا هذا التعريف على استخدام الأعداد التخيلية في الحياة العملية ولا توجد الآن صعوبة مطلقا في إيجاد حاصل ضرب $\sqrt{-١٠٠}$ في عدد معين مثلا ، بل إن عملية الضرب ربما تكون أسهل في التعبير من وصف مايحدث عند ماتغوص سفينة ١٠ أقدام أو ترتفع ١٠ أقدام .

وقاعدة الخوارزمي تعطي حل معادلة الدرجة الثانية في الحالة العامة التي يختلف معامل $\text{س}^{٢}$ فيها عن الوحدة . مثلا المعادلة :

$$\text{ا}\,\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} + \text{حـ} = ٠$$

يمكن كتابتها على الصورة :

$$\text{س}^{٢} + \frac{\text{ب}\,\text{س}}{\text{ا}} = -\frac{\text{حـ}}{\text{ا}}$$

وباستعمال قاعدة الخوارزمي يكون :

$$س = \sqrt{\frac{-ح}{ا} + \left(\frac{ب}{٢ا}\right)^٢} - \frac{ب}{٢ا}$$

$$\therefore س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ اح}}{٢ا}$$

ويمكننا اختبار صحة النتيجة بالمثال العددي الآتي : جذرا المعادلة

$$٣ س^٢ - ٧ س = ٦$$

هما

$$س = \frac{٧ \pm \sqrt{٤٩ + ٧٢}}{٦} = \frac{٧ \pm ١١}{٦}$$

$\therefore$ س $=$ ٣ أو $-\frac{٢}{٣}$. بالتعويض نتأكد من صحة الجواب .

١ — المتسلسلات :

لقد ساعدت لغة الأعداد الجديدة على اكتشاف كثير من خواص الأعداد الطبيعية . وكان من الطبيعي أن يهتم الهنود والعرب بالمعلومات الصينية القديمة كما قاموا بكثير من الاكتشافات الهامة بأنفسهم . فمثلا أعطانا « إريابهاتا » قواعد الجمع متسلسلات مختلفة مثل :

١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ..

$١^٢$ ، $٢^٢$ ، $٣^٢$ ، $٤^٢$ ، ..

$١^٣$ ، $٢^٣$ ، $٣^٣$ ، $٤^٣$ ، ..

وقد تفسر النتيجة التي حصلنا عليها في الباب الخامس وهي « مجموع ن حداً من متسلسلة الأعداد الطبيعية يساوي الحد المثلثي النوني » ، السهولة التي وجد بها الرياضيون الهنود قوانين جمع المتسلسلات السابقة . ففي حالة الأعداد الطبيعية يكون:

ن	مجموع الحدود الأولى التي عددها ن		
١	١	= ١	$ح_١$
٢	١ + ٢	= ٣	$ح_٢$
٣	١ + ٢ + ٣	= ٦	$ح_٣$
٤	١ + ٢ + ٣ + ٤	= ١٠	$ح_٤$
٥	١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥	= ١٥	$ح_٥$

ويمكن اختصار الجدول السابق بكتابته على الصورة :

$$\sum_{١}^{ن} ن = ح_ن = \frac{ن(ن+١)}{٢}$$

أما في حالة مربعات الأعداد الطبيعية فيكون الجدول على الصورة :

ن	$\sum_{١}^{ن}$	
١	١	= ١
٢	١ + ٤	= ٥
٣	١ + ٤ + ٩	= ١٤
٤	١ + ٤ + ٩ + ١٦	= ٣٠
٥	١ + ٤ + ٩ + ١٦ + ٢٥	= ٥٥
٦	١ + ٤ + ٩ + ١٦ + ٢٥ + ٣٦	= ٩١

ويمكن كتابة هذا الجدول على الصورة الآتية وهي تحتوي على أعداد مثلثية :

ن	مح $^{ن}_{١}$		
١	١	= ١ + ٠	= ١ + ٠
٢	٥	= ٣ + ٢	= ٣ + ٢ × (١)
٣	١٤	= ٦ + ٨	= ٦ + ٢ × (٤)
٤	٣٠	= ١٠ + ٢٠	= ١٠ + ٢ × (١٠)
٥	٥٥	= ١٥ + ٤٠	= ١٥ + ٢ × (٢٠)
٦	٩١	= ٢١ + ٧٠	٢٠ + ٢ × (٣٥)

ويكون لدينا المجموعتان الآتيتان من الأعـداد المثلثية

١ ٣ ٦ ١٠ ١٥ ٢١ ... ،

١ ٤ ١٠ ٢٠ ٣٥ ...

ويكون مجموع مربعات الأعداد الطبيعية الأولى التى عددها ن مساوياً لحاصل جمع العدد النونى المثلثى البسيط + ضعف العدد الـ (ن ـ ١) المثلثى ذو القيمة الثانية أى إلى :

$$\text{م}_{\text{ن}} + ٢ \times {}^{٢}\text{م}_{\text{ن}-١}$$

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٢} + ٢\,\frac{(\text{ن}-١)(\text{ن})(\text{ن}+١)}{٣\times٢}$$

$$= \tfrac{١}{٢}\text{ن}(\text{ن}+١)\left[١+\frac{٢\text{ن}-٢}{٣}\right]$$

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)(٢\text{ن}+١)}{٦}$$

ولاختبار صحة هذه النتيجة نلاحظ أن مجموع السبعة حدود الأولى من متسلسلة مربعات الأعداد الطبيعية يكون مساوياً

$$\frac{٧ \times ٨ \times ١٥}{٦} = ١٤٠$$

وهى نفس النتيجة التى تحصل عليها لو أضفنا ٤٩ (= ٧^٢) إلى ٩١ .

وبنفس الطريقة يمكننا إيجاد مجموع الحدود الـ ن الأولى من متسلسلة مكعبات الأعداد الطبيعية وهى :

١^٣ ، (١^٣ + ٢^٣) ، (١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣) ، (١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + ٤^٣) ، (١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + ٤^٣ + ٥^٣) ، ....

= ١ ، ٩ ، ٣٦ ، ١٠٠ ، ٢٢٥

= ١^٢ ، ٣^٢ ، ٦^٢ ، ١٠^٢ ، ١٥^٢

$$\therefore \sum_{١}^{ن} ن^٣ = (م_ن)^٢ = \left(\frac{ن(ن+١)}{٢}\right)^٢$$

$$= \frac{ن^٢(ن+١)^٢}{٤}$$

ويمكن التأكد من صحة هذه النتيجة بإضافة ٦^٣ (= ٢١٦) إلى ٢٢٥ .

وباستعمال هذا القانون يكون مجموع مكعبات الأعداد الطبيعية الست الأولى هو :

$$\frac{٣٦ \times ٤٩}{٤} = ٤٤١$$

ولا يبعد أن تكون هذه الخواص الجميلة للأعداد المثلثية هى التى أوحت إلى العالم الفرنسى « باسكال » (وهو العالم الذى اهتم بنظرية الاحتمالات التى هى أساس علم الإحصاء الحديث) باكتشاف المتسلسلة التى تسمى الآن « مثلث باسكال » . والواقع أن هـذه المتسلسلة وجدها عمر بن الخيام كما وجدت مرسومة فى « مرآة العناصر الأربعة الثمينة » الذى كتبه الرياضى الصينى شوشى كى فى حوالى سنة ١٣٠٠ بعد الميلاد . وفى حوالى هذا التاريخ كانت امبراطورية المغول تحاول ابتلاع أوربا الشرقية . وربما كان لاهتمام الأوربيين الشرقيين بالأعداد المثلثية صلة بذلك . وهذا يفسر لنا أيضاً السهولة التى وجد بها الرياضيون الهنود مجموع متسلسلات كثيرة معقدة . ويرجع الفضل فى اكتشاف مثلث باسكال ، شأنه فى ذلك شأن نظرية فيثاغورس ، إلى ثقافة

شرقية قديمة ، وهذا المثلث هو :

١

١ ١

١ ٢ ١

١ ٣ ٣ ١

١ ٤ ٦ ٤ ١

١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

١ ٦ ١٥ ٢٠ ١٥ ٦ ١

١ ٧ ٢١ ٣٥ ٣٥ ٢١ ٧ ١

وإذا بدأنا القراءة فى الاتجاه القطرى من أعلى ، من اليمين إلى اليسار فإننا نحصل على عدة متسلسلات ، متسلسلة الواحد ، متسلسلة الأعداد الطبيعية متسلسلة الأعداد المثلثية البسيطة ثم متسلسلات الأعداد المثلثية من الرتب التالية (فى الباب الخامس) . أما إذا قرأنا فى اتجاه أفقى فإننا نحصل على :

١

١ ١

١ ٢ ١

١ ٣ ٣ ١

١ ٤ ٦ ٤ ١

١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

١ ٦ ١٥ ٢٠ ١٥ ٦ ١

وإذا دققنا النظر فى الجدول السابق لوجدنا أنه يحتوى على أشياء عظيمة حقاً ،

(وربما وافقنا على ذلك « ميكل ستايفل » !!) . وأول هذه الأشياء هو مساعدتنا على كتابة مفكوك $(\text{س} + \text{ا})^{\text{ن}}$ دون أن نجرى عمليات الضرب . بضرب (س + ا) فى نفسه عدة مرات نحصل على :

$$\text{س} + \text{ا} = (\text{س} + \text{ا})^1$$

$$\text{س} + \text{ا}$$

$$\text{س}^2 + \text{ا}\text{س}$$

$$+ \text{ا}\text{س} + \text{ا}^2$$

$$\text{س}^2 + 2\text{ا}\text{س} + \text{ا}^2 = (\text{س} + \text{ا})^2$$

$$\text{س} + \text{ا}$$

$$\text{س}^3 + 2\text{ا}\text{س}^2 + \text{ا}^2\text{س}$$

$$\text{ا}\text{س}^2 + 2\text{ا}^2\text{س} + \text{ا}^3$$

$$\text{س}^3 + 3\text{ا}\text{س}^2 + 3\text{ا}^2\text{س} + \text{ا}^3 = (\text{س} + \text{ا})^3$$

$$\text{س} + \text{ا}$$

$$\text{س}^4 + 3\text{ا}\text{س}^3 + 3\text{ا}^2\text{س}^2 + \text{ا}^3\text{س}$$

$$\text{ا}\text{س}^3 + 3\text{ا}^2\text{س}^2 + 3\text{ا}^3\text{س} + \text{ا}^4$$

$$\text{س}^4 + 4\text{ا}\text{س}^3 + 6\text{ا}^2\text{س}^2 + 4\text{ا}^3\text{س} + \text{ا}^4 = (\text{س} + \text{ا})^4$$

$$\text{س} + \text{ا}$$

$$\text{س}^5 + 4\text{ا}\text{س}^4 + 6\text{ا}^2\text{س}^3 + 4\text{ا}^3\text{س}^2 + \text{ا}^4\text{س}$$

$$\text{ا}\text{س}^4 + 4\text{ا}^2\text{س}^3 + 6\text{ا}^3\text{س}^2 + 4\text{ا}^4\text{س} + \text{ا}^5$$

$$\text{س}^5 + 5\text{ا}\text{س}^4 + 10\text{ا}^2\text{س}^3 + 10\text{ا}^3\text{س}^2 + 5\text{ا}^4\text{س} + \text{ا}^5 = (\text{س} + \text{ا})^5$$

ويمكن تلخيص ذلك فيما يلى :

$$(\text{س} + \text{ا})^1 = \text{س} + \text{ا}$$

$$(\text{س} + \text{ا})^2 = \text{س}^2 + 2\text{ا}\text{س} + \text{ا}^2$$

$$(\text{س} + \text{ا})^3 = \text{س}^3 + 3\text{ا}\text{س}^2 + 3\text{ا}^2\text{س} + \text{ا}^3$$

$$(\text{س} + \text{ا})^{٤} = \text{س}^{٤} + ٤\,\text{ا}\,\text{س}^{٣} + ٦\,\text{ا}^{٢}\,\text{س}^{٢} + ٤\,\text{ا}^{٣}\,\text{س} + \text{ا}^{٤}$$

$$(\text{س} + \text{ا})^{٥} = \text{س}^{٥} + ٥\,\text{ا}\,\text{س}^{٤} + ١٠\,\text{ا}^{٢}\,\text{س}^{٣} + ١٠\,\text{ا}^{٣}\,\text{س}^{٢} + ٥\,\text{ا}^{٤}\,\text{س} + \text{ا}^{٥}$$

وواضح أن الأعداد الموجودة قبل كل حد فى المفكوك ، أى معادلات الحدود فى المفكوك ، هى بعينها أعـــداد متسلسلات مثلث عمر بن الخيام . وباستعمال هذه القاعدة يكون :

$$(\text{س}+\text{ا})^{٦} = \text{س}^{٦} + ٦\,\text{ا}\,\text{س}^{٥} + ١٥\,\text{ا}^{٢}\,\text{س}^{٤} + ٢٠\,\text{ا}^{٣}\,\text{س}^{٣} + ١٥\,\text{ا}^{٤}\,\text{س}^{٢} + ٦\,\text{ا}^{٥}\,\text{س} + \text{ا}^{٦} .$$

ويمكن التأكد من صحة ذلك بضرب $(\text{س}+\text{ا}) \times (\text{س}+\text{ا})^{٥}$. ونكون بذلك قد حصلنا على قاعدة بسيطة لكتابة مفكوك $(\text{س}+\text{ا})^{\text{ن}}$ وتسمى هـــذه القاعدة «نظرية ذات الحدين» . وإذا رجعنا إلى فى الباب الخامس لوجدنا أن الأرقام

$$١ \qquad ٤ \qquad ٦ \qquad ٤ \qquad ١ \quad \text{هى بعينها}$$

$$\text{ن}^{٤}_{٠} \qquad \text{ن}^{٤}_{١} \qquad \text{ن}^{٤}_{٢} \qquad \text{ن}^{٤}_{٣} \qquad \text{ن}^{٤}_{٤}$$

أى $١ \ ، \ \frac{٤}{١} \ ، \ \frac{٤ \times ٣}{١ \times ٢} \ ، \ \frac{٤ \times ٣ \times ٢}{١ \times ٢ \times ٣} \ ، \ ١$

وبنفس الطريقة يمكن كتابة معاملات $(\text{س}+\text{ا})^{٦}$ على الصورة

$$١ \qquad ٦ \qquad ١٥ \qquad ٢٠ \qquad ١٥ \qquad ٦ \qquad ١$$

$$\text{ن}^{٦}_{٠} \qquad \text{ن}^{٦}_{١} \qquad \text{ن}^{٦}_{٢} \qquad \text{ن}^{٦}_{٣} \qquad \text{ن}^{٦}_{٤} \qquad \text{ن}^{٦}_{٥} \qquad \text{ن}^{٦}_{٦}$$

أى $١ \ ، \ \frac{٦}{١} \ ، \ \frac{٦ \times ٥}{١ \times ٢} \ ، \ \frac{٦ \times ٥ \times ٤}{١ \times ٢ \times ٣} \ ، \ \frac{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} \ ، \ \frac{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥} \ ، \ ١$

ويكون مفكوك $(\text{س} + \text{ا})^{\text{ن}}$ هو

$$\text{س}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{ا}\,\text{س}^{\text{ن}-١} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)}{١ \cdot ٢}\,\text{ا}^{٢}\,\text{س}^{\text{ن}-٢} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)}{١ \cdot ٢ \cdot ٣}\,\text{ا}^{٣}\,\text{س}^{\text{ن}-٣}$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)(\text{ن}-٣)}{١\cdot٢\cdot٣\cdot٤}\,\text{ا}^{٤}\,\text{س}^{\text{ن}-٤} + \cdots + \text{ا}^{\text{ن}} \,.$$

ولا نعلم ما إذا كانت شخصية عمر بن الخيام الفريدة قد ساعدته على اكتشاف نظرية ذات الحدين . فقد كان شخصاً ماديا يؤمن باستعمال المنطق لتغيير الحياة وجعلها أقرب إلى رغبات القلب . ومن الجائز أن يكون اكتشاف عمر بن الخيام لنظرية ذات الحدين قد جاء صدفة محضة أثناء تسليته الرياضية مثل ما حدث عندما اكتشف «ليناردو بايزا» متسلسلة فيبوناسى .

ولقد ظهرت أهمية نظرية ذات الحدين وكثر استعمالها فى الفترة التى تلت اكتشاف الهندسة المعدلة . ولتوضيح إحدى فوائد النظرية نأخذ مثالا عدديا يمكن اختبار صحته بسهولة — لإيجاد قيمة $(٤,٨٤)^{٨}$ ليس من الضرورى مطلقا أن نجرى عمليات الضرب المتتالية إذ أن

$$(٤,٨٤)^{٨} = (٤ \times ١,٢١)^{٨} = ٤^{٨} \times (١,٢١)^{٨} = ٤^{٨}\left(١ + \frac{٢١}{١٠٠}\right)^{٨}$$

وباستعمال نظرية ذات الحدين

$$\left(١ + \frac{٢١}{١٠٠}\right)^{٨} = ١ + ٨ \times \frac{٢١}{١٠٠} + \frac{٨\times٧}{١\times٢}\left(\frac{٢١}{١٠٠}\right)^{٢} + \frac{٨\times٧\times٦}{١\times٢\times٣}$$
$$\times \left(\frac{٢١}{١٠٠}\right)^{٣} + \frac{٨\times٧\times٦\times٥}{١\times٢\times٣\times٤}\left(\frac{٢١}{١٠٠}\right)^{٤} + \cdots\cdots$$

وأهم مميزات المفكوك هو أننا نحصل على متسلسلة من الأرقام تصغر صغراً مطرداً . وعلى ذلك يمكننا أن نتوقف عند حد معين ونهمل الحدود الباقية حسب درجة التقريب المطلوبة فمثلا

$$(١,٠١)^{١٠} = ١ + ١٠ \times (٠,٠١) + \frac{١٠\times٩}{١\times٢} \times (٠,٠٠٠١) + \frac{١٠\times٩\times٨}{١\times٢\times٣} \times$$
$$(٠,٠٠٠٠٠١) + \cdots = ١ + ٠,١ + ٠,٠٠٤٥ + ٠,٠٠٠١٢٠ + ٠,٠٠٠٠٠٠٢١ + \cdots$$

ويكون الجواب الصحيح إلى سبعة أرقام عشرية هو ١,١٠٤٦٢٢١ .

ولقد استخدم نيوتن وزملاؤه من العلماء طريقة جمع المتسلسلات باستعمال الأعداد المثلثية وخواص المثلث الصفرى فى إيجاد قوانين لها فوائد كثيرة فى الحياة العملية . ولقد تكلمنا عن المثلث الصفرى فى باب سابق وكما يذكر القارىء كان المثلث الصفرى لمجموعة الأعداد المثلثية من الدرجة الثانية على الصورة .

٠

١   ١

٣   ٤   ٥

٣   ٦   ١٠   ١٥

١   ٤   ١٠   ٢٠   ٣٥

وفى الحالة العامة نعتبر المثلث الصفرى الآتى الذى يتلاشى عن نفس الوضع

٠

$ف^{3}_{1}$ $ف^{3}_{2}$

$ف^{2}_{1}$ $ف^{2}_{2}$ $ف^{2}_{3}$

$ف^{1}_{1}$ $ف^{1}_{2}$ $ف^{1}_{3}$ $ف^{1}_{4}$

$س_{1}$ $س_{2}$ $س_{3}$ $س_{4}$ $س_{5}$

يدل كل حرف من الحروف «ف» على الفرق بين الرقمين فى الصف الذى تحته مباشرة واللذين يقع بينهما . أى أن $ف^{ن}_{م}$ هو الحد الميمى فى صف الفروق النونى ، $ف^{2}_{3}$ هو الحد الثالث فى صف الفروق الثانى (من اليمين إلى اليسار) . ولإيجاد خواص هذا المثلث نعتبر أولا المثلث الصفرى ذو الصفوف الثلاثة

٠

$ف^{1}_{1}$ $ف^{1}_{2}$

$س_{1}$ $س_{2}$ $س_{3}$

حسب التعريف السابق يكون

$س_{٢} - س_{١} = ف^{١}_{١}$

$س_{٣} - س_{٢} = ف^{١}_{٢}$

ولكن $ف^{١}_{٢} - ف^{١}_{١} = ٠$

$\therefore ف^{١}_{٢} = ف^{١}_{١}$

$\therefore س_{٣} = س_{١} + ٢ف^{١}_{١}$.

وبنفس الطريقة إذا كان لدينا مثلث صفرى ذو أربعة صفوف

$$٠$$

$$ف^{٢}_{٢} \qquad ف^{٢}_{١}$$

$$ف^{١}_{٣} \qquad ف^{١}_{٢} \qquad ف^{١}_{١}$$

$$س_{٤} \qquad س_{٣} \qquad س_{٢} \qquad س_{١}$$

يكون :

$س_{٢} = س_{١} + ف^{١}_{١}$

$س_{٣} = س_{٢} + ف^{١}_{٢} = س_{٢} + ف^{١}_{١} + ف^{٢}_{١}$

$س_{٤} = س_{٣} + ف^{١}_{٣} + = س_{٣} + ف^{١}_{٢} + ف^{٢}_{٢} + ف^{٢}_{١} + ف^{١}_{١}$

$\therefore س_{٤} = س_{١} + ٣ف^{١}_{١} + ٣ف^{٢}_{١}$.

وبالمثل إذا كان لدينا مثلث صفرى ذو خمسة صفوف فإن

$س_{٥} = س_{١} + ٤ف^{١}_{١} + ٦ف^{٢}_{١} + ٤ف^{٣}_{١}$

وفى حالتى المثلثين الصفريين ذوى الستة والسبعة صفوف يكون

$س_{٦} = س_{١} + ٥ف^{١}_{١} + ١٠ف^{٢}_{١} + ١٠ف^{٣}_{١} + ٥ف^{٤}_{١}$

$س_{٧} = س_{١} + ٦ف^{١}_{١} + ١٥ف^{٢}_{١} + ٢٠ف^{٣}_{١} + ١٥ف^{٤}_{١} + ٦ف^{٥}_{١}$.

ويمكن اختبار صحة التعبيرين الأخيرين وذلك باستعمالها فى ايجاد الحدين السادس والسابع من متسلسلة الأعداد المثلثية ذات المرتبة الثانية فيكون :

$$\text{س}_{٧} = ١ + ٦ \times ٣ + ١٥ \times ٣ + ٢٠ \times ١ + ١٥ \times ٠$$
$$+ ٦ \times ٠ = ٨٤ .$$

والجدول الآتى يوضح معاملات الحدود

ن	$\text{س}_{\text{ن}}$	المعاملات					
٢	$\text{س}_{٢}$	١					
٣	$\text{س}_{٣}$	١	٢				
٤	$\text{س}_{٤}$	١	٣	٣			
٥	$\text{س}_{٥}$	١	٤	٦	٤		
٦	$\text{س}_{٦}$	١	٥	١٠	١٠	٥	
٧	$\text{س}_{٧}$	١	٦	١٥	٢٠	١٥	٦

وهذه الأرقام هى بعينها أرقام مثلث عمر بن الخيام ونقطة الاختلاف الوحيدة هى أن المعاملات الخاصة بالحد النونى (٧ مثلا) هى معاملات مفكوك ذى الحدين $(\text{س} + ١)^{\text{ن}-١}$ (أى $(\text{س} + ١)^{٦}$). وعلى ذلك يكون لدينا هذا القانون العام للمثلث الصفرى الذى عدد صفوفه ن

$$\text{س}_{\text{ن}} = \text{ا}\,\text{س}_{١} + \text{ب}\,\text{ف}^{١}_{١} + \text{ح}\,\text{ف}^{٢}_{١} + \text{د}\,\text{ف}^{٣}_{١} + \text{هـ}\,\text{ف}^{٤}_{١} + \text{و}\,\text{ف}^{٥}_{١} + \cdots$$

وتنتهى المتسلسلة عند ما تتلاشى الفروق. الكميات ا، ب، ح هى معاملات المفكوك $(\text{س} + ١)^{\text{ن}-١}$. واذا كتبنا

$$(\text{س} + ١)^{\text{ن}-١} = (\text{س} + ١)^{\text{م}}$$

فإن هذه المعاملات تكون

$$١ ، \frac{\text{م}}{١} ، \frac{\text{م}(\text{م}-١)}{١ \cdot ٢} ، \frac{\text{م}(\text{م}-١)(\text{م}-٢)}{١ \cdot ٢ \cdot ٣} ، \frac{\text{م}(\text{م}-١)(\text{م}-٢)(\text{م}-٣)}{١ \cdot ٢ \cdot ٣ \cdot ٤} ، \cdots$$

وبالتعويض عن $\text{م} = \text{ن} - ١$ تأخذ هذه المعاملات الصورة

$$\text{١} \text{ ، } \frac{\text{ن} - \text{١}}{\text{١}} \text{ ، } \frac{(\text{ن}-\text{١})(\text{ن}-\text{٢})}{\text{١٠٢}} \text{ ، } \frac{(\text{ن}-\text{١})(\text{ن}-\text{٢})(\text{ن}-\text{٣})}{\text{١٠٢٠٣}} \text{ ، }$$

$$\frac{(\text{ن}-\text{١})(\text{ن}-\text{٢})(\text{ن}-\text{٣})(\text{ن}-\text{٤})}{\text{١٠٢٠٣٠٤}} \text{ ، } \ldots$$

ويكون قانون المثلث الصفرى الذى له ن من الصفوف هو

$$\text{س}_{\text{ن}} = \text{س}_{\text{١}} + (\text{ن} - \text{١})\ \text{ف}_{\text{١}}^{\text{١}} + \frac{(\text{ن}+\text{١})(\text{ن}-\text{٢})}{\text{٢} \times \text{١}}\ \text{ف}_{\text{١}}^{\text{٢}}$$

$$+ \frac{(\text{ن}-\text{١})(\text{ن}-\text{٢})(\text{ن}-\text{٣})}{\text{٣} \times \text{٢} \times \text{١}}\ \text{ف}_{\text{١}}^{\text{٣}} + \ldots$$

وحيث أن الفروق التى رتبتها (ن - ١) تتلاشى ، يكون آخر حد محتويا على الفرق الذى رتبته (ن - ٢) أى $\text{ف}_{\text{١}}^{\text{٢}}$ ويكون عدد حدود السلسلة (ن - ١) حدا .

وباستعمال القانون السابق يمكننا الحصول على الحد النونى لأى متتابعة عددية إذا كان مثلث فروقها صفريا . فمثلا فى مجموعة الأعداد

١ ، ٥ ، ١٢ ، ٢٢ ، ٣٥ ، ٥١

نلاحظ أنه لايلزمنا إلا الأربعة حدود الأولى لتعيين المثلث الصفرى الآتى :

٠

٣ ٣

٤ ٧ ١٠

١ ٥ ١٢ ٢٢

ويكون عدد صفوف المثلث أربعة نقط أى أن الفرق $\text{ف}_{\text{١}}^{\text{٣}}$ والفروق التالية تتلاشى

$\therefore\ \text{س}_{\text{ن}} = \text{س}_{\text{١}} + (\text{ن} - \text{١})\,\text{ف}^{\text{٢}}_{\text{١}} + (\text{ن} - \text{١})(\text{ن} - \text{٢})\,\text{ف}^{\text{٢}}_{\text{١}}$

وبالتعويض عن الفروق بقيمتها العددية نجد أن .

$$\text{س}_{\text{ن}} = \text{١} + (\text{ن} - \text{١}) \times \text{٤} + \frac{(\text{ن} - \text{١})\ (\text{ن} - \text{٢})}{\text{١} \cdot \text{٢}} \times \text{٣}$$

$$= \text{١} + \text{٤ن} - \text{٤} + \frac{\text{٣ن}^{\text{٢}} - \text{٩ن} + \text{٦}}{\text{٢}}$$

$$= \tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\,(\text{٣ن}^{\text{٢}} - \text{ن})$$

$$= \frac{\text{ن}}{\text{٢}}\,(\text{٣ن} - \text{١}) .$$

والأعداد الخماسية التى حصلنا عليها فى الباب الخامس بطريقة الرسوم (المعروفة بالطريقة الهيروغليفية) مركبة بالطريقة السابقة .

وفيما يلى عدة مجموعات من الأعداد يمكن للقارىء أن يوجد الحد النونى لكل مجموعة

١ ، ٧ ، ١٩ ، ٢٧ ، ٦١ ، .....

١ ، ٨ ، ٢١ ، ٤٠ ، ٦٥ ، .....

٠ ، ٣ ، ٨ ، ١٥ ، ٢٤ ، .....

٠ ، ٢ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٠ ، .....

٤ ، ٧ ، ١٢ ، ١٩ ، ٢٨ ، .....

٢ ، ٥ ، ١٥ ، ٣٣ ، ٦٠ ، .....

وللتمرين على استعمال نظرية ذات الحدين ، يمكن للقارىء أن يحسب قيم المقادير $(\text{١,٠٢})^{\text{٧}}$ ، $(\text{٢,٠٣})^{\text{٤}}$ ، $(\text{٢,٠٠٦})^{\text{٦}}$ بحيث تكون صحيحة إلى خمسة أرقام عشرية بدون إجراء عمليات الضرب . كما يمكن للقارىء أن يعمل جدولا لمربعات الأرقام .

١ ، ١,٠٠١ ، ١,٠٠٢ ، ١,٠٠٣ .... ، ١,٩٩٩ ، ٢ .

مستقبل رموز الأعـداد :

لقد رأينا مقدار التقدم الذى حصل عليه الإنسان منذ وجد نظاما معقولا لكتابة الأعداد بدلا من الأنظمة غير المناسبة التى كان يستعملها الأغريق والساميون والمصريون والسياريون . وإن هذا الذى رأيناه ليشعرنا بما يمكن أن نستفيده إذا نحن استخدمنا نظاما أفضل مما لدينا الآن . فمثلا البلاد التى غيرت وحدات موازينها ومقاييسها إلى النظام العشرى توفر كثيراً من الجهد والوقت الذى يضيع فى البلاد التى لازالت تستعمل أنظمة عتيقة للمقاييس مثل بريطانيا . وهذا لايعنى أن النظام العشرى هو أفضل الأنظمة إذ لايوجد أى شىء يميز العدد ١٠ اللهم إلا عدة خرافات ذكرناها فيما قبل . والحساب الذى أساسه العدد ٥ (أنظر شكل ١٠٢) لن يكون بأى حال من الأحوال أصعب من الحساب الذى أساسه العدد ١٠ .

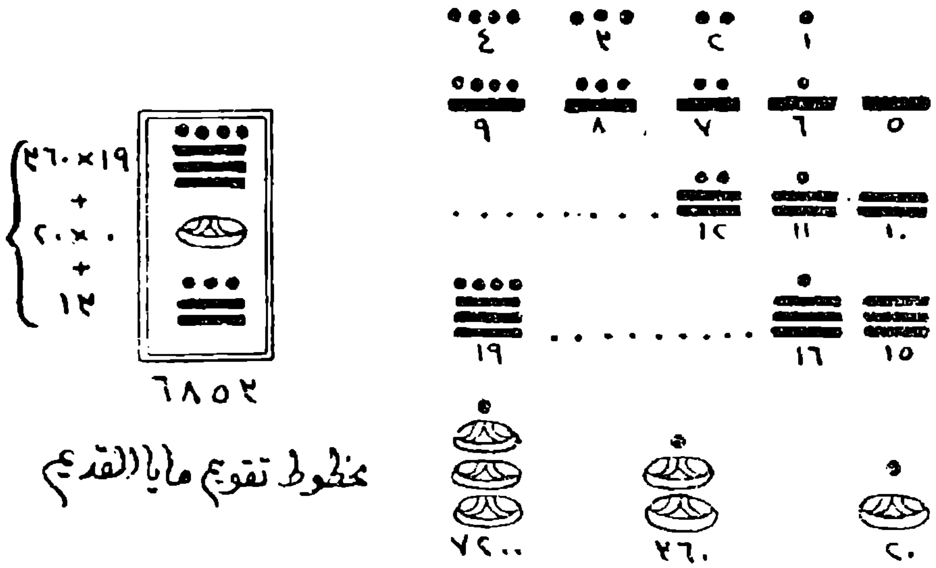
وعند التفكير فى نظام عددى جديد يفيد الإنسان يجب أن نتأكد أولا من صحة الانتقادات التى توجد من المحافظين الذين يعوقون التقدم . والحقيقة إن كلا من الرياضيين الذين اعتادوا استعمال الكسور السداسية فى حساب الدرجات والدقائق والثوانى ، ورجال الأعمال الذين اعتادوا استعمال المقاييس والأوزان التى أساسها العدد ١٢ (مثل نظام النقـــد الانجليزى) ، قد وجهوا بعض اعتراضات معقولة ، ولكنها غير كافية . للنظام العشرى . فرغم قدسية العدد ١٠ فهو غير مفيد فى اجراء الحسابات لأنه لايقبل القسمة إلا على ١ ، ٢ ، ٥ . ولكى يكون العدد أساساً مفيداً يجب أن يكون كثير العوامل . وعوامل العـدد ١٢ هى ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ بينما نلاحظ أن عوامل العدد ٦٠ هى ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٣٠ . وعلى ذلك يكون من أفضل الأمور أن نختار حلا وسطا نوفق به بين نظام الوحدات الانجليزى والنظام الفرنسى بإضافة رمزين جديدين إلى رموز الأرقام الهندية . وعمل اصطلاحات موضعية على الميزان الثنائى عشر . ويلى ذلك تعديل الموازين والمقاييس حسب الأساس الجديد . ويمكن للقارىء القيام بعمليات الجمع والضرب فى الميزان الحسابى الذى أساسه ١٢ .

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ♂ ♀ ١٠

(١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ ١١ ١٢)

وقد ذكرنا فى الباب الثانى أن رجال الدين السياريين كانوا قاب قوسين أو أدنى من

على نظام حسابى أساسه العدد ٦٠ وله جميع مميزات النظام الهندى وقد ذهب صانعوا التقاويم فى أمريكا الوسطى إلى أبعد من ذلك فقد استعملوا فكرتى الخط الرأسى والصفر وكان أساس نظامهم الحسابى فى بعض الأحيان هو العدد ٢٠ ، وكانت الرتب المتتالية هى ١ ، ٢٠ ، ٤٠٠ ، ٨٠٠٠ ، ..... وفى هذا النظام تناظر ٤٠٠ ، ٨٠٠٠ و ٧٦١٣ القيم ٣٦٠ ، ٧٢٠٠ ، ٦٨٥٣ فى شكل ١٠٦ (تقويم مايا) . وحيث أن تقويم مايا يحتوى على شهور مكونة من عشرين يوما ، شهور مكونة من ثلاثين يوما ، وسنين ذات ٣٦٠ يوما وسنين أخرى ذات ٣٦٥ يوما ، فانه يظن أن الرتب العددية الأولى ١ ، ٢٠ ، ٣٦٠ ، ٧٢٠٠ . . قد اختيرت لا لتسهيل عمليات الحساب وإنما لتؤدى وظيفة بدائية اجتماعية .



شكل (١٠٦)

فكرة الموضع المستخدمة فى مخطوط مايا ذى الأســــاس ٢٠ هى كما يلى : مجموعة الرموز السفلى تمثل عمـود الوحدات فى العداد ، أعلى العشرين وأعلى الـ ٣٦٠ ، وأعلى الـ ٧٢٠٠ .

لقد رأينا كيف عدلت وتقدمت لغة الأعداد لكى توافق حاجيات المجتمع ، عندما كانت الدولة الاسلامية تمتد من الهند إلى أسبانيا . وهذا يجعلنا نقدر الدين الذى يدين به الأوربيون البربريون القدماء إلى هؤلاء الشعراء الرياضيين ذوى الجلد الأسمر وإذا نظرنا بعد ذلك إلى ما أضافه علماء أوربا الشمالية إلى لغة الكم فلنذكر الدين الذى ندين به إلى هذه المدنية القديمة .

اكتشافات واختبارات

١ — احصل على جداول الضرب عندما يكون اساس النظام الحسابى هو ٢ ، ٦ ، ٤ ، ٦ ، ٨ . ثم أوجد حاصل ضرب ٢٤ × ٤٨ فى كل من الحالات السابقة وأختبر صحة النتيجة فى كل حالة .

٢ — تعلم أن

(س + ا) (س + ب) = س^{٢} + (ا + ب) س + اب

وتستطيع أن تختبر صحة النتيجة باجراء عملية الضرب إذا كانت ا = - ١ ، ب = ٦ فانه يمكننا وضع المقدار س^{٢} + ٥ س — ٦ على نفس الصورة السابقة أى كحاصل ضرب العاملين (س — ١) (س + ٦) ويمكنك اختبار صحة النتيجة بأن تحصل على خارج قسمة هذا المقدار على أى العاملين (س — ١) أو (س + ٦) . بنفس الطريقة أوجد عوامل كل من المقادير الآتية وأختبر صحة كل جواب تحصل عليه باجراء عملية القسمة أولا ثم باجراء عملية الضرب .

(١) ا^{٢} + ١٠ ا + ٢٤

(٢) ن^{٢} + ٥ ن + ٦

(٣) س^{٢} — ٣ س + ٢

(٤) م^{٢} + ٤ م + ٣

(٥) س^{٢} — ١٠ س + ١٦

(٦) و^{٢} + و — ٢٠

(٧) ن^{٢} — ٣ ن — ٤٠

(٨) ك^{٢} — ١٠ ك + ٢١

(٩) ح^{٢} — ١٢ ح + ٣٢

(١٠) ى^{٢} + ٨ ى — ٢٠

(١١) هـ^{٢} + ١٢ هـ + ٢٠

(١٢) ع^{٢} + ع — ٤٢

(١٣) ص^{٢} — ص — ٤٢

(١٤) ب^{٢} — ب — ٢٠

٣ — باجراء عملية الضرب يمكنك البرهنة على أن

(ا س + ب) (ا س — ب) = ا^{٢} س^{٢} — ب^{٢}

وأن (ا س + ب ص) (ا س — ب ص) = ا^{٢} س^{٢} — ب^{٢} ص^{٢}

لاحظ أن المقدار (٤ س^{٢} — ٢٥) مركب بنفس الطريقة من العاملين (٢ س + ٥) (٢ س — ٥) وبالمثل أوجد عاملى كل من المقادير الآتية :

(١) س^{٢} — ٣٦

(٢) ٩ س^{٢} — ٢٥

(٣) ٤ س^{٢} — ١٠٠

(٤) ١٠٠ ص^{٢} — ٢٥

(٥) ٦٤ س^{٢} — ٤٩

(٦) ٨١ س^{٢} — ٦٤

(٧) ٢٥ س^{٢} — ١٦

(٨) ٤٩ ن^{٢} — (١٦٩)^{٢}

(٩) ٢٥٦ ه^{٢} — ١٦٩ م^{٢}

(١٠) ٤ ن^{٢} — ٩ ك^{٢}

(١١) ن^{٢} — ٨١ ك^{٢}

(١٢) ٢٥ ل^{٢} — ٩

(١٣) ٣٦ ه^{٢} — ١٦ م^{٢}

(١٤) ٩ ا^{٢} — ٤٩ ب^{٢}

وبالاستعانة بعلامة الجذر التربيعي ، √ ، اكتب عوامل المقادير

(١٥) ٣ — س^{٢}

(١٦) ٢ — ٣ س^{٢}

(١٧) ٥ س^{٢} — ٣

(١٨) س^{٢} — ٢

(١٩) ٢ ا^{٢} — ٣

(٢٠) ٧ ا^{٢} — ٣ ب^{٢}

٤ — بإجراء عملية الضرب المباشر يمكنك البرهنة على أن

(ا س + ب)(ح س + د) = ا ح س^{٢} + (ا د + ب ح) س + ب د

لاحظ أن المقدار ٦ س^{٢} — ٧ س — ٢٠ مركب بنفس الطريقة وأنه يساوى حاصل ضرب العاملين (٣ س + ٤) (٢ س — ٥) حيث ا = ٣ ، ب = ٤ ، ح = ٢ ، د = — ٥.

أوجد بنفس الطريقة عوامل كل من المقادير الآتية واختبر النتيجة بالتعويض العددى :

(١) ٣ س^{٢} + ١٠ + ٣

(٢) ٦ س^{٢} + ١٩ س + ١٠

(٨) ٢٠ س^{٤} + س^{٢} — ١

(٩) ١٥ + ٤ س — ٤ س^{٢}

(٣) ٦ ن^{٢} + ٥ ن + ١	(١٠) ٦ ﻫ^{٢} ـ ﻫ ـ ١٢
(٤) ٣ ﻫ^{٢} + ٢٢ ﻫ + ٣٥	(١١) ١٥ س^{٢} + ٧ س ـ ٢
(٥) ٦ م^{٢} + ١١ م + ٣	(١٢) ٧ س ـ ٦ ـ ٢ س^{٢}
(٦) ٦ ل^{٢} ـ ٧ ل + ٢	(١٣) ١٥ ـ ٤ س ـ ٤ س^{٢}
(٧) ١١ ن^{٢} ـ ٥٤ ن + ٦٣	(١٤) ٧ س ـ ٦ س^{٢} + ٢٠

٥ ـ باجراء عملية الضرب المباشر يمكنك البرهنة على أن

(ا س + ب ص) (حـ س + ء ص) = ا حـ س^{٢} + (ا ء + ب حـ) س ص + ب ء ص^{٢}

المقدار ٦ س^{٢} + ٧ س ص ـ ٢٠ ص^{٢} مكون بنفس الطريقة كحاصل ضرب العاملين (٣ س ـ ٤ ص) (٢ س + ٥ ص) ، حيث ا = ٣ ، ب = ـ ٤ ، حـ = ٢ ، ء = ٥ .

استعمل هذه الطريقة فى كتابة عوامل كل من المقادير الآتية واختبر صحة النتيجة باجراء عمليتى الضرب والقسمة فى كل حالة .

(١) ٦ ا^{٢} + ١٧ ا س ـ ٣ س^{٢}	(٨) ٣٦ ن^{٢} + ٣ ن ل ر ـ ٥ ل^{٢} ر^{٢}
(٢) ١٥ ا^{٢} ـ ١٦ ا ب حـ ـ ١٥ ب^{٢} حـ^{٢}	(٩) ١٤ ء^{٢} + ١١ ء ﻫ ـ ١٥ ﻫ^{٢}
(٣) ١٦ ا^{٢} ـ ٣٧ ا ب ـ ٣٥ ب^{٢}	(١٠) ٣ ر^{٢} ـ ١٢ ر م ـ ١٦ م^{٢}
(٤) ٢ ا^{٢} ـ ١٧ ا ب ـ ٩ ب^{٢}	(١١) ٩ م^{٢} + ٩ م ﻫ ـ ٤ ﻫ^{٢}
(٥) ٦ ﻫ^{٢} ـ ٢٣ ﻫ و ـ ١٨ و^{٢}	(١٢) ٦ ل^{٢} ـ ن ل ـ ١٢ ن^{٢}
(٦) ٢١ م^{٢} + ١٣ م ل ـ ٢٠ ل^{٢}	(١٣) ٤ ل^{٢} ـ ٢٥ ل م + ٢٥ م^{٢}
(٧) ١٢ ن^{٢} ـ ٧ م ن ـ ١٢ م^{٢}	

٦ ـ لقد تعودت فى علم الحساب أن تختصر الكسر $\frac{١٤}{٢١}$ إلى الصورة المبسطة $\frac{٢}{٣}$ وذلك لأنك تلاحظ أن هذا الكسر يمكن كتابته على الصورة $\frac{٢ \times ٧}{٣ \times ٧}$. بنفس الطريقة استعمل طريقة التحليل إلى العوامل لوضع كل من المقادير الآتية فى أبسط صورة واختبر صحة النتيجة فى كل حالة بالتعويض العددى .

(١) $\frac{س + ص}{س^٢ + ٢ س ص + ص^٢}$ (٢) $\frac{س - ص}{س^٢ - ص^٢}$

(٣) $\frac{س + ص}{س^٢ - ص^٢}$ (٤) $\frac{س - ص}{س^٢ - ٢ س ص + ص^٢}$

(٥) $\frac{ا س + ا ص}{ا س^٢ - ا ص^٢}$ (٦) $\frac{٤٢ س^٢ ص ع}{٥٦ س ص ع^٢}$

(٧) $\frac{س^٢ + ٣ س + ٢}{س^٢ + ٥ س + ٦}$ (٨) $\frac{س^٢ + ٢ س + ١}{س^٢ + ٣ س + ٢}$

(٩) $\frac{س^٢ - ١}{٢ س^٢ + ٣ س - ٥}$ (١٠) $\frac{٩ س^٢ - ٤٩}{٣ س^٢ + ١٤ س - ٤٩}$

(١١) $\frac{ا^٤ ب + ا ب^٤}{ا^٤ - ا^٣ ب + ا^٢ ب^٢}$ (١٢) $\frac{٨ ا^٣ - ١}{٤ ا^٢ - ٤ ا + ١}$

(١٣) $\frac{٢ س^٣ - ٣ س^٢ + ٤ س - ٦}{س^٣ - ٢ س^٢ + ٢ س - ٤}$

(٧) ضع المقادير الآتية فى أبسط صورة ممكنة :

(١) $\frac{١}{ب} + \frac{١}{ح}$ (٢) $\frac{ا^٢ ب + ا ب^٢}{١ + ب}$

(٣) $س + ص - \frac{٩ س^٢ - ٤ ص^٢}{٣ س + ٢ ص}$ (٤) $١ + ٢ ب + \frac{٤ ب^٢}{١ - ٢ ب}$

(٥) $\frac{١}{س + ١} + \frac{١٣}{٢ س + ٢} - \frac{١٥}{٤ س + ٤}$

(٦) $\frac{(١ + ٢ ب)}{٣} - \frac{(١ - ٣ ب)}{٤}$ (٧) $\frac{١٧}{٤ س + ٨ ص} - \frac{١٣}{٢ س + ٤ ص}$

(٨) $\text{س}^2 + \text{س ص} + \text{ص}^2 - \text{س} \; \frac{(\text{س}^2 + 3\,\text{س ص} + 4\,\text{ص}^2)}{(\text{س} + \text{ص})}$

(٨) ضع كلا من المقادير الآتية على هيئة كسر واحد فى أبسط صورة ممكنة :

(١) $\frac{1}{\text{س}+1} + \frac{1}{\text{س}-1}$

(٢) $\frac{1}{\text{س}+1} - \frac{1}{\text{س}-1}$

(٣) $\frac{1}{\text{ا}-\text{ب}} - \frac{1}{\text{ا}+\text{ب}}$

(٤) $\frac{\text{ا}}{\text{ا}-\text{ب}} + \frac{\text{ب}}{\text{ا}+\text{ب}}$

(٥) $\frac{\text{س}}{\text{س}-\text{ص}} - \frac{\text{ص}}{\text{س}+\text{ص}}$

(٦) $\frac{\text{س}-\text{ص}}{\text{س}+\text{ص}} + \frac{\text{س ص}}{\text{س}^2-\text{ص}^2}$

(٧) $\frac{\text{س}}{2\text{ص}} - \frac{(\text{س}-\text{ص})}{2(\text{س}+\text{ص})}$

(٨) $\frac{\text{ص}-5}{\text{ص}-6} - \frac{\text{ص}-3}{\text{ص}-4}$

(٩) $\frac{\text{س}^2+\text{ص}^2}{\text{س}^2-\text{ص}^2} - \frac{\text{ص}}{\text{س}-\text{ص}} + \frac{\text{س}}{\text{س}+\text{ص}}$

(١٠) $\frac{\text{س}+\text{ن}}{\text{س}+\text{ل}} + \frac{\text{س}+\text{ل}}{\text{س}+\text{ن}} - \frac{2(\text{س}-\text{ن})(\text{س}-\text{ل})}{(\text{س}+\text{ن})(\text{س}+\text{ل})}$

(١١) $\frac{1}{\text{ن}^2-6\text{ن}+5} - \frac{2}{\text{ن}^2+2\text{ن}-3} + \frac{1}{\text{ن}^2-2\text{ن}-15}$

(١٢) $\frac{1}{\text{ن}} + \frac{1}{\text{ن}-1} - \frac{1}{\text{ن}+1} + \frac{2\text{ن}}{\text{ن}^2-1}$

(١٣) $\frac{\text{ن}}{\text{ن}^2-1} + \frac{1}{\text{ن}-1} - \frac{1}{\text{ن}+1}$

(٩) إذا اتبعنا طريقة ستيفنس وكتبنا $\frac{١}{١٠٠} = ١٠^{-٢}$ فبأخذ قيم عددية لكل من ا ، ب يبين صحة كلا من العلاقات الآتية :

$$١٠^{ا} \times ١٠^{ب} = ١٠^{ا+ب}$$

$$١٠^{ا} \div ١٠^{ب} = ١٠^{ا-ب}$$ (ا أكبر أو أصغر من ب)

$$(١٠^{ا})^{ب} = ١٠^{اب} = (١٠^{ب})^{ا} .$$

ثم اختبر صحة القانون العام

$$ن^{ا} \times ن^{ب} = ن^{ا+ب}$$ إذا كانت ن لا تساوى ١٠ .

(١٠) باستعمال الطرق المبينة فى الأمثلة السابقة وقاعدة الوسطين والطرفين حل المعادلات الآتية :

[ا] $$\frac{س+٢}{٣} - \frac{(س+١)}{٥} = \frac{س-٣}{٤} - ١$$

[ب] $$\frac{س+١}{١+ب} + \frac{س-٣ب}{١-ب} = ٣$$

[حـ] $$\frac{١}{٢س-٣} + \frac{س}{٣س-٢} = \frac{١}{٣}$$

[ء] $$\frac{٣}{س-١} - \frac{٢}{س-٢} = \frac{١}{س-٣}$$

[هـ] $$\frac{٢س-١}{س-٢} - \frac{س+٢}{٢س+١} = \frac{٢}{٣}$$

[و] $$\frac{س}{س-٢} - \frac{س}{س+٢} = \frac{١}{س-٢} - \frac{٤}{س+٢}$$

١١ — [ا] قطع رجل مسافة ثمانية أميال بحيث سار جزءا منها بسرعة ٣ميل\ساعة وركب أثناء الجزء الباقي عربة تسير بسرعة ١٢ ميل\ساعة . فاذا كان الزمن الكلى الذى استغرقته الرحلة هو ١¾ ساعة فما هو طول المسافة التى كان الرجل راكبا أثنائها ؟

[ب] سار قطار مسافة معينة بسرعة ٤٠ميل\ساعة ثم حدث عطل للقطار فتوقف عن السير لمدة ١٥ دقيقة أكمل رحلته بعدها بسرعة ٥٠ ميل\ساعة . فاذا كان الوقت الذى استغرقه القطار فى قطع الرحلة هو نفس الوقت الذى كان يستغرقه فى قطعها لو كان متحركا بسرعة ٤٠ ميل\ساعة دون أن يتعطل وكانت المسافة الكلية المقطوعة هى ٨٠ ميل . فما هى المسافة التى قطعها القطار قبل أن يتعطل .

[ح] إذا خفض تاجر سعر بيع بضاعة معينة بمقدار ٢½ ٪ من السعر الأول فما هى النسبة المئوية التى يجب أن تزيدها الكمية المباعة لكى يحصل التاجر على زيادة قدرها ١ ٪ فى ثمن البيع الكلى ؟

١٢ — حل المعادلات الآتية :

(١) $س^{٢} + ١١ س - ٢١٠ = ٠$

(٢) $س^{٢} - ٢ س = ٨٨$

(٣) $١٢ س^{٢} + س = ٢٠$

(٤) $(٣ س + ١)(٨ س - ٥) = ١$

(٥) $٣ س^{٢} - ٧ س - ١٣٦ = ٠$

(٦) $٢ (س - ١) = \frac{س - ١}{س + ١}$

(٧) $س (س - ب) = ا (ا - ب)$

(٨) $\frac{١}{س + ١} - \frac{١}{٢ + س} = \frac{١}{س + ١٠}$

١٣ — [ا] أوجد ثلاثة أعداد صحيحة متتالية مجموع مربعاتها يساوى ١١٠

[ب] ورقة مربعة الشكل قص منها مستطيلا طوله يساوى طول ضلع المربع وعرضه يساوى ٦ سم ثم لصق فى المستطيل الباقى مستطيلا آخر طوله يساوى عرض المستطيل وعرضه يساوى ٦ سم بحيث كان الشكل الجديد مستطيلا مساحته ٥٠٠ سم^{٢} أوجد طول ضلع المربع الأصلى .

[حـ] طول محيط العجلة الخلفية لعربة يزيد قدما واحدا عن محيط العجلة الأمامية للعربة . فاذا كانت العجلة الأمامية تدور ٢٢ دورة زيادة عن العجلة الخلفية فى الميل الواحد فأوجد نصف قطر كل من العجلتين .

[ى] ا ب حـ مثلث قائم الزاوية عند حـ فاذا كان طول الضلع ا ب يزيد عن طول الضلع ا حـ بمقدار ٣ سم وكان الضلع ب حـ ينقص ٢ سم عن نصف طول ا حـ فأوجد أطوال أضلاع المثلث .

١٤ – يمكن حل مثال ٥ ص (٣٢٨) بطريقة أخرى كما يلى :

٥ س = ع (١) ، ٢ ص + ٨ = س + ع (٢) ،
ص = ١٠٠ – ع (٣)

وبالتعويض عن ع من (١) فى كل من (٢) ، (٣) ينتج أن :

٢ ص + ٨ = س + ٥ س ، ص = ١٠٠ – ٥ س

أى ٢ ص – ٦ س = – ٨ (٤)

ص + ٥ س = ١٠٠ (٥)

لدينا الآن مجهولان (س ، ص) ومعادلتان لتعيينهما وطريقة حل هاتين المعادلتين هو حذف أحد المجهولين وواضح أن حذف ص سيكون أسهل من حذف س . بضرب طرفى المعادلة (٥) فى ٢ ينتج لدينا المعادلتان :

٢ ص – ٦ س = – ٨ (٤)

٢ ص + ١٠ س = ٢٠٠ (٦)

وبطرح طرفى المعادلة (٤) من طرفى المعادلة (٦) ينتج أن :

١٦ س = ٢٠٨

∴ س = ١٣ .

وهذا هو المطلوب الوحيد فى المسألة . وإذا كان المطلوب تعين ص أيضاً فاننا نعوض عن س بقيمتها فى إحدى المعادلتين الأصليتين (٤) ، (٥) فنحصل على معادلة بسيطة يمكن بواسطتها تعيين ص . ونلاحظ أننا عند حل المعادلتين (٤) (٥) لانحتاج

أن نضرب طرفى المعادلة (٤) فى عامل عددى ، ولكن قد يكون هـــذا ضروريا فى الحالات الأخرى فمثلا عند حل المعادلتين :

٣ س + ٤ ص = ١٥   (١)

٢ س + ٥ ص = ١٧   (٢)

لحذف س نضرب طرفى المعادلة الأولى فى ٢ وطرفى الثانية فى ٣

∴ ٦ س + ٨ ص = ٣٠

٦ س + ١٥ ص = ٥١

وبالطرح ينتج أن :

٧ ص = ٢١

∴ ص = ٣

بالتعويض عن ص بقيمتها فى (١) ينتج أن :

٣ س + ١٢ = ١٥

∴ ٣ س = ٣   ∴ س = ١

ولاختبار صحة هذا الجواب نعوض بقيمتى س ، ص فى المعادلة (٢) فيكون :

٢ + ١٥ = ١٧ .

ولإيجاد قيمة كميتين مجهولتين يلزمنا عبارتان مختلفتان عنهما . أى أنه يلزمنا معادلتان مستقلتان . ويمكن تلخيص الطريقة العامة لحل المعادلات الآتية كما يلى :

الخطـــوة الاولى : رتب المعادلات التى لديك بحيث تقع الحدود المتشابهة (س مثلا) تحت بعضها

الخطوة الثانيـــة : اختر أحد المجاهيل لحذفه

الخطوة الثالثـــة : اضرب طرفى المعادلة الأولى فى معامل المجهول الذى ستحذفه فى المعادلة الثانية ثم أجرى نفس العملية فى المعادلة الثانية .

الخطوة الرابعـــة : اطرح طرفى إحدى المعادلتين الجديدتين من طرفى الأخرى .

الخطوة الخامسة : حل المعادلة البسيطة الناتجة .

الخطوة السادسة : عوض بالقيمة التى حصلت عليها لأحد المجهولين فى إحدى المعادلتين الأصليتين لإيجاد قيمة المجهول الثانى .

الخطوة السابعة : اختبر صحة النتيجة بالتعويض عن المجهولين فى المعادلة الأصلية الثانية .

هذا ويمكن حل المعادلات التى تحتوى على ثلاثة مجاهيل بطريقة مماثلة ، ويلزم لذلك ثلاثة معادلات مختلفة . والخطوة الأولى لحل هذه المعادلات هى حذف أحد المجاهيل من اثنتين منها ثم حذف نفس المجهول من المعادلة الثالثة وإحدى المعادلتين السابقتين وبذلك نحصل على معادلتين تحتوى كل منهما على مجهولين فقط . فمثلا :

٢ س + ٣ ص = ٤ ع

، ٣ س + ٤ ص = ٥ ع + ٤

، ٥ س − ٣ ع = ص − ٢

رتب المعادلات فى الوضع الآتى :

٢ س + ٣ ص − ٤ ع = ٠ (١)

٣ س + ٤ ص − ٥ ع = ٤ (٢)

٥ س − ص − ٣ ع = −٢ (٣)

ثم نحذف ص من المعادلتين (١) ، (٣) بأن نضرب طرفى المعادلة (٣) فى −٣ فيكون :

٢ س + ٣ ص − ٤ ع = ٠

، −١٥ س + ٣ ص + ٩ ع = ٦

وبطرح المعادلتين ينتج أن :

١٧ س − ١٣ ع = −٦ (٤)

لكى نحذف ص من (٢) ، (٣) نضرب طرفى (٣) فى −٤ فيكون :

٣ س + ٤ ص − ٥ ع = ٤

− ٢٠ س + ٤ص + ١٢ ع = ٨

بالطرح يكون

٢٣ س − ١٧ ع = − ٤ (٥)

ويمكن حل المعادلتين (٤) ، (٥) وإيجاد قيمة كل من س ، ع بالطريقة السابقة وبالتعويض بقيمتهم فى المعادلة (١) يمكن الحصول على قيمة ص . نختبر صحة النتيجة بعد ذلك بالتعويض بقيم المجاهيل جميعها فى كل من (٢) ، (٣) .

حل المعادلات الآتية :

(١) س = ٥ ص ، ١٠س − ص = ٨

(٢) ٣ ص = ٤ س ، ٨س − ٥ص = ٤

(٣) س = ٥ ص − ٤ ، ١٠ص − ٣ س = ٢

(٤) ٦٠ س − ١٧ ص = ٢٨٥ ، ٧٥ س − ١٩ ص = ٣٩٠

(٥) س + ص = ٢٣ ، ص + ع = ٢٥ ، ع + س = ٢٤

(٦) ٢ س + ٧ ص = ٤٨ ، ٥ ص − ٢ س = ٢٤ و س + ص + ع = ١٠

١٥ — المسائل الآتية يمكن حلها بواسطة المعادلات الآتية :

[ا] إذا كان الحد الثالث من متوالية عددية هو ٨ والحد العاشر هو ٣٠ ، فأوجد الحد السابع .

[ب] الحد الرابع من متوالية عددية هو − $\frac{١}{٨}$ والحد السابع هو $\frac{١}{٦٤}$ ، أوجد الحد الأول .

[حـ] حجرة مستطيلة الشكل ضعف طولها يساوى ثلاثة أمثال عرضها . وإذا زاد عرض الحجرة ثلاثة أقدام ونقص طولها ثلاثة أقدام فإنها ستصبح مربعة الشكل . أوجد كلا من طول وعرض الحجرة .

[ء] ا ، ب مدينتان واقعتان على خط سكة حـــديدية والمسافة بينهما مائة ميل ، حـ ، ء محطتان واقعتان بين المدينتين . فإذا كانت المسافة بين حـ ، ء تزيد عشرة أميال عن المسافة بين ا ، حـ وكانت المسافة بين ب ، ء تزيد عشرين ميلا عن المسافة بين حـ ، ء فاوجد المسافة بين حـ ، ء بالأميال .

١٦ ــ باستعمال [ا] الأعداد المثلثية ، [ب] المثلثات الصفرية أوجد الحد النونى للتسلسلات الآتية :

(١) ١ ، ٦ ، ١٥ ، ٢٨ ، ٤٥ (٤) ١ ، ٧ ، ١٩ ، ٢٧ ، ٦١ ، ٩١

(٢) ١ ، ٦ ، ١٨ ، ٤٠ ، ٧٥ (٥) ١ ، ٤ ، ١٠ ، ١٩ ، ٣١ ، ٤٦

(٣) ١ ، ٢٠ ، ٧٥ ، ١٨٤ ، ٣٦٥ ، ٦٣٦

(٦) ١ ، ٥ ، ١٣ ، ٢٥ ، ٤١ ، ٦١

١٧ ــ أوجد مفكوك كل من المقادير الآتية :

[ا] باستعمال نظرية ذات الحدين [ب] باجراء عمليات الضرب المباشر

$(س+٢)^{٥}$ ، $(ا+ب)^{٣}$ ، $(س+ص)^{٤}$ ، $(٢س+ا)^{٦}$ ، $(٣ا-٢ب)^{٤}$ ، $(س-١)^{٧}$

اختبر صحة النتيجة بتكرار عملية القسمة .

١٨ ــ استخدم نظرية ذات الحدين لحساب قيمة كل من المقادير الآتية صحيحاً إلى أربعة أرقام عشرية :

$(١,٠٤)^{٣}$ ، $(٠,٩٨)^{٥}$ ، $(١,١٢)^{٤}$ ، $(٥,٠٥)^{٣}$

١٩ ــ أكتب ٢٧٢ ، ٨٥٧٣ بحساب تقويم مايا . وأوجد حاصل ضرب ٢٧ × ٤٣ بحساب هذا التقويم . ولو أن العرب وصلوا إلى أمريكا قبل كولومبس لحصلوا على نفس النتيجة .

قوانين لمساعدة الذاكرة

(١) إذا كان $\text{س}^{٢} + \text{ا}\,\text{س} + \text{ب} = ٠$ فإن

$$\text{س} = \frac{-\text{ا} \pm \sqrt{\text{ا}^{٢} - ٤\text{ب}}}{٢}$$

(٢) $\text{ا}^{٠} = ١$ لجميع قيم ا التي لا تساوي صفراً ، $\text{ا}^{-\text{ن}} = \frac{١}{\text{ا}^{\text{ن}}}$

(٣) $$(\text{ا} + \text{ب})^{\text{ن}} = \text{ا}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{ا}^{\text{ن}-١}\,\text{ب} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)}{١\cdot٢}\,\text{ا}^{\text{ن}-٢}\,\text{ب}^{٢}$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)}{١\cdot٢\cdot٣}\,\text{ا}^{\text{ن}-٣}\,\text{ب}^{٣} + \dots + \text{ب}^{\text{ن}}$$

لعب وفوازير عددية

(١) اختر أي عدد . اضرب العدد الذى قبله مباشرة فى العدد الذى بعده مباشرة . اضف إلى حاصل الضرب ١ . اعطنى العدد الذى حصلت عليه فيكون العدد الذى اخترته هو [الجذر التربيعى للعدد الأخير] .

وتوضيح هذه اللعبة هو كما يأتى : إذا كان العدد الذى اخترته هو ا فالعدد الذى قبله مباشرة ا − ١ والذى بعده مباشرة هو ا + ١ ويكون حاصل ضربهما هو .

$(ا − ١) (ا + ١) = ا^{٢} − ١$. وبإضافة ١ إلى هذا العدد تكون النتيجة هى $ا^{٢}$ وبأخذ الجذر التربيعى نحصل على العدد الأصلى .

ويمكن تأليف كثير من اللعب والفوازير العددية المشابهة بتطبيق قواعد الرموز الجبرية والتحليل إلى العوامل وفيما يلى بعض من هذه الفوازير .

(٢) اختر عدداً أقل من ١٠ . اضربه فى ٢ واجمع على الناتج ٣ . اضرب الناتج الأخير فى ٥ واضف إلى الكل عدداً آخر أقل من ١٠ . اطرح من النتيجة النهائية ١٥ فيكون لديك عدد مكون من رقمين ويكون رقم العشرات هو العدد الأول ورقم الآحاد هو العدد الثانى . ويمكن وضع هذه المسألة فى صيغة جبرية كما يلى :

$$(٢ ا + ٣) ٥ + ب = ١٠ ا + ب + ١٥ .$$

(٣) اختر عدداً ما . ربعه واطرح من الناتج ٩ . اقسم الناتج الأخير على العدد الذى يزيد عن العدد الذى اخترته ٣ . فإذا علم خارج القسمة فما هو العدد الأصلى ؟ . عبر عن ذلك جبرياً .

(٤) اختر عددا معينا واجمع عليه ٢ ثم ربع الناتج واطرح منه أربعة أمثال العدد الأصلى . استنتج العدد الأصلى إذا علم باقى الطرح . وضح الجواب وفكر فى فوازير مشابهة .

(٥) عبر جبريا عما يأتى ، إذا قبل كل من عددين القسمة على عدد آخر فإن كلا من مجموع العددين وباقى طرحهما يقبل القسمة على نفس العدد ، ثم استعمل الطرق الموضحة فى (الباب الخامس وفى ص٣٢٦) لتوضيح القواعد الآتية للميزان العشرى :

(ا) يقبل العدد القسمة على ٥ إذا كان رقم أحاده صفرا أو ٥ .

(ب) يقبل العدد القسمة على ٣ إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة ٣ ويقبل العدد القسمة على ٩ إذا كان مجموع ارقامه يقبل القسمة على ٩ .

(حـ) يقبل العدد القسمة على ٤ إذا قبل العدد المكون من رقمى الآحاد والعشرات فيه القسمة على ٤ ويقبل العدد القسمة على ٨ إذا قبل العدد المكون من أرقام آحاده وعشراته ومئاته القسمة على ٨ ويقبل العدد القسمة على ١٦ إذا قبل العدد المكون من أرقام آحاده وعشراته ومئاته وآلافه القسمة على ١٦ .

(ى) استعمل نتيجتى ب ، حـ فى إيجاد شرط قبول الأعداد القسمة على كل من ٦ ، ١٢

(هـ) بملاحظة أن العدد ١٠٠١ يقبل القسمة على كل من ٧ ، ١١ ، ١٣ برهن على أن العدد المكون من ستة أرقام يقبل القسمة على أى عدد من الأعداد الثلاثة السابقة . إذا كان الفرق بين العددين الممثلين بالثلاثة أرقام الأولى والثلاثة أرقام الأخيرة منه يقبل القسمة على العدد المعين . عمم هذه القاعدة للأعداد التى عدد أرقامها زوجى وأكثر من ٦ .

أجوبة المسائل

ليلاحظ القارىء أن أجوبة بعض المسائل العددية مقربة فليس من الضرورى أن تتفق أجوبته معها تماماً وإنما يجب ألا تختلف عنها كثيراً .

الباب الثالث

(٦) [ا] س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} [ب] ٦ س + ٦ ص + ١٠ ع

[حـ] ٣ ا^{٢} + ١٢ ا + ١٢ = ٣ (ا + ٢)^{٢} [ء] ٢ س − ٣

[هـ] ا^{٢} − ٢ ا ب − ب^{٢}

[و] س^{٢} ص ع + س ص^{٢} ع + س ص ع^{٢} = س ص ع (س + ص + ع)

[ز] ١٦ ا^{٣} ب^{٤} [ح] ٢ س^{٦} [ط] − ا^{٢} − ٤ س^{٢} [ى] $\frac{١}{٢}$ س ص^{٣}

[ك] ٣ ا ب   [ل] $\frac{١}{٢}$ ا ء

(٨) [ا] ١٢   [ب] ١٢   [حـ] ١٤   [ء] ٥   [هـ] ٢   [و] ٦

[ز] ٣   [ح] $\frac{١}{٢}$ [ط] ٣   [ى] ١٨   [ك] ١   [ل] ٥

[م] ٢   [ن] ١٦   [س] ١٢ + ب   [ع] ا − ب

(٩) ٢٨٥ ، ٢٥٥ جنيهاً   (١٠) ٣٤٢ ، ١٧١ ، ١١٤ جنيهاً

(١١) ساعة ونصف بعد بدء ا فى المسير .

(١٢) ١٢ .

(١٣) تستهلك العربة ا ٢١٢ جالوناً لتقطع ٦٠٠٠ ميلا وتستهلك العربة ب ١٦٥ جالوناً فقط .

	بنس	شلن	
(١٤)	٦	١	عن المكيال .

الباب الرابع

(٧) ٣س + ٧ص ، ١٢ – ٥ب ، ١٤ – ٩ب ، ١ + ٣ ، ... الخ

(٩) (س – ١)(س + ١) ، (ا + ب – ح)(ا + ب + ح) ،
(ا + ب – ح)(ا – ب + ح) ، (ا – ب)(ا + ب)(ا^{٢} + ب^{٢}) ،
(٩ – س)(٩ + س) ، (ا – ب – ح)(ا + ب + ح) ،
(س + ص – ١)(س + ص + ١) ،
(س – ص)(س + ص)(س^{٢} + ص^{٢})(س^{٤} + ص^{٤}) ،
(ا + ب – ١)(ا + ب + ١) ، (س + ص – ٢)(س + ص + ٢) ،
٣(٢س + ١) .

(١٠) (١) ٩٠° (٢) ٦٠° (٢) ٥٠° (٤) ١٠° (٥) ٧٨°

(١٢) ٦٠° ، ٤٩° ، ٣٨$\frac{١}{٢}$°

(١٣) ٤٦$\frac{١}{٢}$° ، ٤٣$\frac{١}{٢}$° ، ٥٧$\frac{١}{٢}$° / ٣٢$\frac{١}{٢}$° ، ٦٨° ، ٢٢° .

(١٥) ٣$\sqrt{٣}$ = ٥,٢ قدما ، ٦ أقدام

(١٦) ٦٨,٢° (١٧) ٣$\sqrt{٣}$ = ٥,٢ قدما .

(١٨) ٤٥,١٤° (٢٠) ٤٢ ياردة

الباب الخامس

(١) ٥,١٩٦ ، ٤,٢٤٣ ، ٣,٤٦٤ ، ٤,٨٩٩ ، ٣,١٦٢ ، ٥,٤٧٧

(٢) $\frac{١}{٤}\sqrt{٧}$ ، $\frac{١}{٢}\sqrt{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$

(٥) ل = هـ + (ن – ١) ى ، ... الخ

(٧) (١) ٢ن – ١ ، ن^{٢} (٢) ٣ن – ٢ ، $\frac{١}{٢}$ن(٣ن – ١)

(٣) ٥ن ، $\frac{٥}{٢}$ن(ن + ١) (٤) $\frac{١}{٢}$ن ، $\frac{١}{٤}$ن(ن + ١)

(٥) ٤ن – ١٠ ، ٢ن^{٢} – ٨ن (٦) – (ن – ٢) ا ،

$\frac{١}{٢}$ ا(٣ن – ن^{٢}) ، (٧) $\frac{١}{٢}$(١٤ – ٥ن) ، $\frac{١}{٤}$(٢٣ن – ٥ن^{٢}) ، ٣ ، ٢

(٨) $\frac{١}{٢}ن(ن+١)$

(٩) $٧\frac{٤}{٥}$ ، $٩\frac{٣}{٥}$ ، $١١\frac{٢}{٥}$ ، $١٢\frac{١}{٥}$

(١٠) $١\frac{١}{٢}$ ، ٢ ، $٢\frac{١}{٢}$

(١١) الفرق بين حدين متتاليين يساوى (ل − هـ) \ (ن + ١)

(١٤) (١) $٢^{ن-١}$ ، $٢^{ن} - ١$ ، (٢) $(٠,٩)^{ن}$ ، $١٠\{٠,٩ - ٠,٩^{ن+١}\}$

(٣) $\frac{٣}{ن_٢ + ١}$ ، $\frac{٣}{٢}\left(١ - \frac{١}{ن_٢}\right)$

(٤) $أ^{ن-١}س^{٦-ن}$ ، $\frac{س^{٦-ن}(س^{ن}-١)}{س-١}$ (٥) $٣^{ن-١}$ ، $\frac{١}{٢}(٣^{ن}-١)$

(١٥) ٢٥ ، ١٢٥ (١٦) $\frac{٢}{٩}$ ، $\frac{٤}{٢٧}$ ، $\frac{٨}{٨١}$

(١٧) النسبة بين حدين متتاليين $\left(\frac{ل}{هـ}\right)^{\frac{١}{ن+١}}$

(٢٠) $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢٥}{٩٩}$ ، $\frac{٧٩١}{٩٩٩}$ (٢١) ٢ ، $١\frac{١}{٤}$

(٢٢) [أ] $ن^{٣} - (ن-١)^{٣} = ٣ن^{٢} - ٣ن + ١$ ، ن(٢ن − ١) ؛ [ب] ن(٣ن − ٢)

(٢٣) ٤! = ٢٤ ، ٨! = ٤٠٣٢٠ ، ١٢! = ٤٧٩٠٠١٦٠٠ ، ١٦١

(٢٤) ٥٦ ، ٤٩٥ ، ٤٣٦٨ (٢٥) ٧٢٠ (٢٦) ١٦ ، ٢٦

(٢٧) ٥٠٤٠ ، ٧٢٠ ، ٤٨ ، ٢٤ (٢٨) ١٥ ، ٣

الباب السادس

(١١) ١,٥٧ ميلا (١٢) ٥١١٠ ياردة تقريبا (١٣) ٦٠,٩ قدما

(١٤) ١٣,٦٥ ميلا (١٥) ٩ ميلا

(١٦) حا ٢أ = ٢ حا أ جتا أ

حا ٣أ = ٣ حا أ $جتا^{٢}$ أ − $حا^{٣}$ أ = ٣ حا أ − ٤ $حا^{٣}$ أ

جتا ٢ا = جتا^{٢} ا − جا^{٢} ا

جتا ٣ ا = جتا^{٣}ا − ٣ جتا ا حا^{٢}ا = ٤ جتا^{٣}ا − ٣ جتا ا .

(٢٢) ... = ٧٨١٣ ميلا ، ... = ٥١١٧ ميلا ، ... = ١١٩٦٢ ميلا

(٢٣) ا م = ٢٩٩٦ ميلا ، ا ع = ٤٨٦٣ ، م ع = ١٨٩٠ ميلا

(٢٥) ٤١٣٣ ميلا   (٢٦) ٤٢,٤ ميلا   (٢٧) ½٥٣َ ٣٣° أو ½٦َ ٢٨°

(٣٠) [ا] $\frac{٣}{٤}$ {١ − (− ٣)^{ن}}   [ب] $\frac{١}{٩}$ {١ − (− ٢)$^{-ن}$}

[حـ] $\frac{٢٧}{٢٣}$ {١ − (− $\frac{٢}{٣}$)^{ن}}   [ى] $\frac{٣}{٥}$ {١ − (− $\frac{٢}{٣}$)^{ن}}

(٣١) − ا ر$^{٢ن-١}$ ، ا ر^{٢ن} .

الباب السابع

(٢) [١] (١ + ٤) (١ + ٦) ،   [٢] (ب + ٢) (ب + ٣)

[٣] (س − ١) (س − ٢)   [٤] (م + ١) (م + ٣)

[٥] (س − ٢) (س − ٨)   [٦] (و + ٥) (و − ٤)

[٧] (ن + ٥) (ن − ٨)   وهكذا ...

(٣) [١] (س + ٦) (س − ٦)   [٢] (٢ س + ٥) (٢ س − ٥)

[٣] ٤ (س + ٥) (س − ٥)

[٤] ٢٥ (٢ ص + ١) (٢ ص − ١) ... الخ

[٩] (١٦ ن + ١٣ م) (١٦ ن − ١٣ م) ، ...

[١٥] ($\sqrt{٣}$ + س) ($\sqrt{٣}$ − س)

[١٦] ($\sqrt{٢}$ + $\sqrt{٣}$ س) ($\sqrt{٢}$ − $\sqrt{٣}$ س)

(٤) [١] (س + ٣) (٢ س + ١)   [٢] (٢ س + ٥) (٣ س + ٢)

[٣] (٢ ن + ١) (٣ ن + ١)   [٤] (ن + ٥) (٣ ن + ٧)

[٦] (٢ل − ١) (٣ل − ٢) .... ، [٨] (٤س^{٢} + ١) (٥س^{٢} − ١)
[١٠] (٢ن − ٣) (٣ن + ٤) ، ...
[١٢] (٣ + ٢س) (٥ − ٢س)

(٥) [١] (١٢ + ٣س) (١٣ − س) ، [٢] (١٢ − ٥ب ح) (١٥ + ٣ب ح)
[٣] (١ − ٧ب) (١٦ − ٥ب)
[٤] (١ + ب) (١٢ − ٩ب) ، ...

(٦) [١] ، [٢] $\frac{\text{١}}{\text{س + ص}}$ ، [٣] ، [٤] ، [٥] $\frac{\text{١}}{\text{س − ص}}$ ، [٦] $\frac{\text{٣س}}{\text{٤ع}}$

[٧] $\frac{\text{(س + ١)}}{\text{(س + ٣)}}$ [٨] $\frac{\text{(س + ١)}}{\text{(س + ٢)}}$

[٩] $\frac{\text{س + ١}}{\text{٢س + ٥}}$ [١٠] $\frac{\text{٣س + ٧}}{\text{س + ٧}}$ [١١] $\frac{\text{ب(ا + ب)}}{\text{ا}}$ ،

[١٢] $\frac{\text{(٤ا}^{٢}\text{ + ٢ا + ١)}}{\text{٢ا − ١}}$ [١٣] $\frac{\text{(٢س − ٣)}}{\text{(س − ٢)}}$

(٧) [١] $\frac{\text{ا(ب + ح)}}{\text{ب ح}}$ [٢] اب [٣] − ٢س + ٣ص

[٤] $\frac{\text{ا}^{٢}}{\text{١ − ٢ب}}$ ، [٥] $\frac{\text{١٥}}{\text{٤(س + ١)}}$ [٦] $\frac{\text{(١ + ١٧ب)}}{\text{١٢}}$

[٧] $\frac{\text{١}}{\text{٤(س + ٢ص)}}$ [٨] $\frac{\text{ص}^{٢}\text{(ص − س)}}{\text{ص + س}}$

(٨) [١] $\frac{\text{٢س}}{\text{س}^{٢}\text{ − ١}}$ [٢] − $\frac{\text{٢}}{\text{س}^{٢}\text{ − ١}}$ [٣] $\frac{\text{٢ب}}{\text{ا}^{٢}\text{ − ب}^{٢}}$

[٤] $\frac{(أ^{٢} + ٢أب - ب^{٢})}{٢أ - ب^{٢}}$ ، . . . . . .

(٨) $\frac{٢}{(ص - ٤)(ص - ٦)}$ (٩) $\frac{٢س}{س + ص}$ . . . . .

، (١١) $\frac{١٢}{(ن - ١)(ن + ٣)(ن - ٥)}$ وهكذا . . .

(١٠) [١] ١٩ [٢] (١ + ٢ب) [٣] $\frac{١٢}{٢٣}$ [٤] ٢ $\frac{١}{٢}$
[٥] $- \frac{٤}{٣}$ [٦] $- \frac{١}{٧}$

(١١) [١] ٤ $\frac{١}{٢}$ ميل [٢] ٣٠ ميلا [٣] ٢,٥٩ ٪

(١٢) [١] ١٠ ، − ٢١ [٢] ١١ ، − ٨ [٣] ١ $\frac{١}{٤}$ ، − ١ $\frac{١}{٢}$
[٤] $\frac{٢}{٣}$ ، − $\frac{٣}{٨}$ [٥] ٨ ، − $\frac{١٧}{٣}$ [٦] ١ ، − $\frac{١}{٢}$
، [٧] ١ ، ب − ١ [٨] ٢ ، − ٤

(١٣) [١] ٥ ، ٦ ، ٧ أو − ٧ ، − ٦ ، − ٥ [ب] $\frac{١}{٢}$(٣ + $\sqrt{٢٠٨١}$) قدما
[ﻫ] ٢ $\frac{٦}{٢١}$ ، ٢ $\frac{١٧}{٤٤}$ قدما

(١٤) [١] س = ١٠ ، ص = ٢ [٢] ٣ ، ٤ [٣] ٦ ، ٢
[٤] ٩ ، ١٥ [٥] ١١ ، ١٢ ، ١٣ [٦] ٣ ، ٦ ، ١

(١٥) [ا] ٢٠ $\frac{٤}{٧}$ [ب] $\frac{١٧}{٢٤}$ [حـ] ل = ١٨ ، ب = ١٢ قدما [ء] ٢٥ [ﻫ] ٣٠

(١٦) (١) ن (٢ن − ١) (٢) $\frac{١}{٢}$ ن^{٢} (ن + ١) (٣) ن (٣ن^{٢} − ٢)
(٤) ٣ن^{٢} − ٣ن + ١ (٥) $\frac{١}{٢}$ (٣ن^{٢} − ٣ن + ٢) (٦) ٢ن^{٢} − ٢ن + ١

(١٨) (١) ١,١٢٤٩ (٢) ٠,٩٠٣٩ (٣) ١,٥٧٣٥ (٤) ١٢٨,٧٨٧٦

صدر من كتب العلوم فى مجموعة الألف كتاب

(زراعة ، صناعة ، طب ، كيمياء ، فلك ، حيوان ، رياضيات)

١ ـ **العلوم عند العرب** ـ للأستاذ قدرى حافظ طوقان

٢ ـ **الطاقة الذرية : ماضيها ، حاضرها ، مستقبلها** ـ للدكتور عبد الحميد أحمد أمين

٣ ـ **الكيمياء فى خدمة الطب** ـ للأستاذ احمد مختار الجمال

٤ ـ **العلم والحياة الانسانية** ـ للأستاذ مصطفى كامل الجنيدى

٥ ـ **العلم فى عالم متغير** ـ تأليف ل. ج. ف. برمبل

٦ ـ **قصة الكون من السديم الى الانسان** ـ للدكتورين محمد جمال الدين الفندى ومحمد يوسف حسن

٧ ـ **الرادار فى السلم** ـ للدكتورين اسماعيل هزاع ورزق سدره

٨ ـ **الطاقة الذرية واستعمالها فى السلم** ـ تأليف جيرالد وندت

٩ ـ **العلم والحياة** ـ للأستاذ عز الدين فراج

١٠ ـ **الغذاء الكامل** ـ للأستاذ عز الدين فراج

١١ ـ **قصة الحديد** ـ للأستاذ يوسف الحارونى

١٢ ـ **الطاقة الذرية** ـ للدكتورين محمد جمال الدين نوح واسماعيل هزاع

١٣ ـ **الذرة فى خدمة السلام** ـ المجتمع المصرى للثقافة العلمية

١٤ ـ **قصة الطقس** ـ تأليف شو

١٥ ـ **العلم يعيد بناء العالم** ـ تأليف جيمس ستوكلى

١٦ ـ **طبيعيات الجو وظواهره** ـ للدكتور محمد جمال الدين الفندى

١٧ ـ **التليفزيون** ـ للأستاذ فوزى كامل لطفى

١٨ ـ **الانسان والميكروب والمرض** ـ تأليف جون دور

١٩ ـ **الفيروس والانسان** ـ تأليف ف. م. برنت

٢٠ ـ **استخدام الطاقة الذرية** ـ تأليف أوتوهان

٢١ ـ **عالج نفسك بالغذاء** ـ للدكتور ابراهيم فهيم

٢٢ ـ **الكشف والفتح فى الميدان العلمي** ـ تأليف الدكتور مالكولم بير

٢٣ ـ **البحر المحيط بنا** ـ تأليف راشيل كارسون

٢٤ ـ **الانسان فى العالم الحديث** ـ تأليف جوليان هكسلى

٢٥ ـ **الوراثة والسلالة والمجتمع**

٢٦ ـ **الى عالم آخر** ـ تأليف ورنر بودلر وترجمة الدكتور عبد الحميـد أحمد أمين ومراجعة الدكتور محمد رضا مدور

٢٧ ـ **الشمس**

٢٨ ـ **مدخل الى العلوم الطبيعية**

٢٩ ـ **الرياضة للمليون** ـ تأليف لانسوت هوجين

٣٠ ـ **الانسان ... هذا المجهول**

٣١ ـ **استخفاء الحيوان**

الكتب التى نشرتها مكتبة الشرق بالفجالة

من مشروع الألف كتاب

١ ـ عذراء اللورين	تأليف ماكسويل اندرسن
٢ ـ بين العمل والأمل	تأليف المس جنى لى
٣ ـ حركات الشباب الاجتماعية	تأليف الدكتور محمد فتحى
٤ ـ الرياضة للمليون	تأليف لانسلوت هوجبن

طبع بدار العالم العربى بالقاهرة
٢٣ شارع الظاهر تليفون ٤٤٧٠٦


روائع مجلة
الابتسامة
من الكتب
المعالجة
والصفحات الفردية